



Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die **Bedürfnisse** der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Zweiundzwanzigster Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1854.

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Zweiundzwanzigster Theil.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagshandlung

Th. Kunike.

1854.

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

altsverzeichniss des zweiundzwanzigsten Theils.

Arithmetik.

Trigonometrie.

Mechanik.

Nautik.

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Note über Gleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Wenn eine Function $\varphi(x)$ so beschaffen ist, dass alle ihre ungeraden Differentialquotienten

$$\varphi'(x) \quad \varphi'''(x) \quad \varphi^{V}(x) \ldots .$$

r einen bestimmten Werth von x, den wir α nennen wollen, verschwinden, so ist die Function $\varphi(x)$ eine Function von x^2+ax+b o $a=-2\alpha$ und b willkührlich ist), wodurch, wenn $\varphi(x)=0$ ird, sich diese Gleichung durch Substitution von $x^2+ax+b=\xi$ f eine Gleichung halb so hohen Grades reducirt.

Der Beweis dieses Satzes ist höchst einfach; setzt man nämlich

$$\varphi(x)=\varphi(-\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2})$$

d entwickelt letzteres nach Taylor's Reihe, $x+\frac{a}{2}$ als Zuwachs $-\frac{a}{2}$ ansehend, so hat man:

$$\varphi(x)=\varphi(-\frac{a}{2})+(x+\frac{a}{2})\varphi'(-\frac{a}{2})+\frac{1}{2!}(x+\frac{a}{2})^2\varphi''(-\frac{a}{2})+\ldots,$$

da nach der Voraussetzung die ungeraden Differentialquotienten

$$\varphi'(-\frac{a}{2}) \quad \varphi'''(-\frac{a}{2}) \quad \varphi^{V}(-\frac{a}{2})\ldots.$$

tlich gleich Null sind:

$$X_0 \quad X_2 \quad X_4 \ldots$$

und die ungeraden von

$$X_1 \quad X_3 \quad X_5 \ldots$$

sämmtlich für einen bestimmten Werth von x verschwinden: findet diess statt, so hat die lineare Differentialgleichung lauter particuläre Integrale von der genannten Form.

I.

Beginnen wir vorerst mit einer Differentialgleichung erster Ordnung. Sei

$$(1) \qquad X_1 y' + X_0 y = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung, und setzen wir

$$(2) \qquad y = \varphi(x^2 + ax + b),$$

so ist

$$y' = (2x + a)\varphi'(x^2 + ax + b),$$

und folglich geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$(3) \quad X_1(2x + a)\varphi'(x^2 + ax + b) + X_0\varphi(x^2 + ax + b) = 0.$$

Sind nun X_0 und $X_1(2x+a)$ Functionen von x^2+ax+b, so folgt aus (3) wirklich $\varphi(x^2+ax+b)$ als Function von x^2+ax+b, und somit hat dann y die in (2) vorausgesetzte Form.

Damit also die Differentialgleich. (1) das Integral $y=\varphi(x^2+ax+b)$ habe, genügt es, dass X_0 und $X_1(2x+a)$ Functionen sind von x^2+ax+b; nun ist X_0 eine Function hievon, wenn

$$X_0' \quad X_0''' \quad X_0^{V} \ldots$$

für $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden, und $X_1(2x+a)$, wenn

$$[X_1(2x+a)]' \quad [X_1(2x+a)]''' \quad [X_1(2x+a)]^{V} \ldots$$

für $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden. Nun ist:

$$(4) \quad \begin{aligned} [X_1(2x+a)]' &= (2x+a)X_1' + 2X_1, \\ [X_1(2x+a)]''' &= (2x+a)X_1''' + 2.3X_1'', \\ [X_1(2x+a)]^{V} &= (2x+a)X_1^{V} + 2.5X_1^{IV}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Für $x = -\frac{a}{2}$ gehen dieselben über in:

$$2X_1 \qquad 2.3X_1'' \qquad 2.5X_1^{IV} \ldots.$$

und werden Null, wenn

$$X_1 = 0 \qquad X_1'' = 0 \qquad X_1^{IV} = 0 \ldots.$$

sind. Wenn daher die geraden Differentialquotienten von X_1 und die ungeraden Differentialquotienten von X_0 für den bestimmten Werth $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden, so ist das Integral der Differentialgleichung (1) von der Form:

$$y = \varphi(x^2 + ax + b).$$

II.

Gehen wir jetzt zur Differentialgleichung

$$X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \tag{5}$$

über. Aus

$$y = \varphi(x^2 + ax + b)$$

folgen:

$$y' = (2x + a)\,\varphi'(x^2 + ax + b),$$
$$y'' = (2x + a)^2 \varphi''(x^2 + ax + b) + 2\varphi'(x^2 + ax + b);$$

und setzt man diese Werthe in die vorgelegte Gleichung (5), so erhält man:

$$X_2[(2x + a)^2 \varphi'' + 2\varphi'] + X_1(2x + a)\varphi' + X_0\varphi = 0,$$

oder geordnet:

$$X_2(2x + a)^2 \varphi'' + [2X_2 + X_1(2x + a)]\,\varphi' + X_0\varphi = 0. \tag{6}$$

Ist nun wieder jeder der Coefficienten von φ, φ' und φ'' eine Function von $x^2 + ax + b$, so ergibt sich φ als Function von $x^2 + ax + b$, was mit der vorausgesetzten Form übereinstimmt. Damit der Coefficient von φ'' eine Function ist von $x^2 + ax + b$, müssen die ungeraden Differentialquotienten von X_2 für $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden, denn der andere Factor des Coefficienten von φ'', nämlich $(2x + a)^2$, ist für sich eine Function von $x^2 + ax + b$, da

$$(2x + a)^2 = 4(x^2 + ax + b) + (a^2 - 4b).$$

[illegible]

$$y = \varphi(x^2 + ax + b):$$

$$y' = (2x+a)\,\varphi'\,(x^2+ax+b),$$
$$y'' = (2x+a)^2\varphi''(x^2+ax+b) + 2\varphi'(x^2+ax+b),$$
$$y''' = (2x+a)^3\varphi'''(x^2+ax+b) + 6(2x+a)\,\varphi''(x^2+ax+b).$$

Diese Werthe, in die Differentialgleichung (9) eingeführt, geben:

$$X_3[(2x+a)^3\varphi''' + 6(2x+a)\,\varphi''] + X_2[(2x+a)^2\varphi'' + 2\varphi'] + X_1(2x+a)\,\varphi' + X_0\varphi = 0,$$

oder geordnet:

$$X_3(2x+a)^3\varphi''' + [6X_3(2x+a) + X_2(2x+a)^2]\,\varphi'' + [2X_2 + X_1(2x+a)]\,\varphi' + X_0\varphi = 0.$$

Der erste Coefficient ist eine Function von x^2+ax+b, wenn $X_3(2x+a)$ es ist; weil der weggelassene Factor $(2x+a)^2$, wie gerade früher gezeigt, eine Function von x^2+ax+b ist. $X_3(2x+a)$ ist aber eine Function von x^2+ax+b, wenn für $x = -\frac{a}{2}$

$$X_3 = 0 \qquad X_3'' = 0 \qquad X_3^{IV} = 0 \ldots.$$

wird, wie diess aus den Gleichungen (4) folgt, wenn man in denselben überall X_3 statt X_1 einführt.

Die ungeraden Differentialquotienten des zweiten Coefficienten sind:

$$[6X_3(2x+a)+X_2(2x+a)^2]' = 6[X_3(2x+a)]' + [X_2(2x+a)^2]',$$
$$[6X_3(2x+a)+X_2(2x+a)^2]''' = 6[X_3(2x+a)]''' + [X_2(2x+a)^2]''',$$
$$[6X_3(2x+a)+X_2(2x+a)^2]^V = 6[X_3(2x+a)]^V + [X_2(2x+a)^2]^V,$$

. . . .

von denen jeder aus zwei Theilen zusammengesetzt ist; der erste Theil wird Null, weil

$$X_3 = 0 \qquad X_3'' = 0 \qquad X_3^{IV} = 0 \ldots.$$

ist, und diese Bedingungen, wie eben gesagt wurde, hinreichen zum Verschwinden der ersten Theile; der zweite Theil eines jeden Gliedes wird gleich Null, wenn

$$X_2' = 0 \qquad X_2''' = 0 \qquad X_2^V = 0 \ldots.$$

Die ungeraden Differentialquotienten des dritten Coefficienten bestehen abermals aus zwei Theilen, von denen die ersten kraft der eben aufgeschriebenen Gleichungen verschwinden, und die zweiten dann, wenn

[illegible]

[illegible] Differential- [illegible]

[illegible]

betrachten [illegible]

[illegible] enthält [illegible]

[illegible] Differential- [illegible]

[illegible] Vereinfachungen [illegible]

stattfinden [illegible] und [illegible] von

[illegible]

für $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden, wenn

$$X' = 0 \quad X''' = 0 \quad X^{V} = 0 \ldots.$$

werden. Denkt man sich nun den Werth von y und die Werthe von y', y'', y''',.... in die Differentialgleichung (10) eingeführt und dann nach den Differentialquotienten von φ geordnet, so erhält man als erstes Glied, das mit dem Factor $\varphi^{(n)}$ behaftet ist:

$$X_n (2x + a)^n.$$

Das zweite Glied der Differentialgleichung, welches $\varphi^{(n-1)}$ zum Factor hat, besteht im Allgemeinen aus zwei Theilen, den einen liefert $y^{(n)}$, den andern $y^{(n-1)}$; sie sind:

$$X_n (2x + a)^{n-2} \qquad X_{n-1} (2x + a)^{n-1},$$

beide noch mit constanten Factoren multiplicirt, deren Werth für uns hier ohne Interesse ist; eben so besteht das dritte Glied der Differentialgleichung, welches $\varphi^{(n-2)}$ zum Factor hat, im Allgemeinen aus drei Theilen; dieselben sind nach Auslassung der constanten Factoren:

$$X_n (2x + a)^{n-4} \qquad X_{n-1} (2x + a)^{n-3} \qquad X_{n-2} (2x + a)^{n-2},$$

und so das vierte Glied aus den vier Theilen:

$$X_n (2x+a)^{n-6} \; X_{n-1} (2x+a)^{n-5} \; X_{n-2} (2x+a)^{n-4} \; X_{n-3} (2x+a)^{n-3}$$

u. s. f.; hiebei ist jedoch zu bemerken, dass $2x + a$ in der Differentialgleichung nie zu einer negativen Potenz erhoben erscheinen kann. Falls daher irgend eines der auf eben angeführte Weise gebildeten Glieder Theile hat, wo $2x + a$ zu einer negativen Potenz erhoben vorkäme, so müsste dieses ganz weggelassen werden.

Betrachten wir nun jedes einzelne Glied separat.

Die ungeraden Differentialquotienten von $X_n (2x + a)^n$ sind Null, wenn entweder

$$X_n' = 0 \quad X_n''' = 0 \quad X_n^{V} = 0 \ldots.$$

oder wenn

$$X_n = 0 \quad X_n'' = 0 \quad X_n^{IV} = 0 \ldots.$$

für $x = -\frac{a}{2}$ ist; ersteres tritt ein für gerade, letzteres für ungerade n.

Die ungeraden Differentialquotienten der Glieder, welche d
Factor $\varphi^{(n-1)}$ besitzen, bestehen im Allgemeinen aus zwei The
len; der erste Theil, welcher ein ungerader Differentialquotie
von $X_n(2x+a)^{n-2}$ ist, wird unter denselben Umständen Null, a
es das erste Glied $X_n(2x+a)^n$ wird, weil n und $n-2$ zu gleich
Zeit gerade und ungerade sind; der andere Theil aber wird Nu
genau unter den entgegengesetzten Umständen, nämlich für e
gerades n, wenn

$$X_{n-1}=0 \quad X_{n-1}''=0 \quad X_{n-1}^{IV}=0 \ldots.$$

ist, und für ein ungerades n, wenn

$$X_{n-1}'=0 \quad X_{n-1}'''=0 \quad X_{n-1}^{V}=0 \ldots.$$

ist. Von den drei Theilen, aus welchen der Coefficient von $\varphi^{(n-}$
besteht, sind die beiden ersten Theile Null, unter denselben Um
ständen, welche die Coefficienten von $\varphi^{(n)}$ und $\varphi^{(n-1)}$ verschwi
den machen; was den letzten Theil anbelangt, so ist dieser f
gerade n Null, wenn

$$X_{n-2}'=0 \quad X_{n-2}'''=0 \quad X_{n-2}^{V}=0 \ldots.$$

sind, oder wenn n ungerade ist, für

$$X_{n-2}=0 \quad X_{n-2}''=0 \quad X_{n-2}^{IV}=0 \ldots.$$

u. s. f. u. s. f.

Wenn daher die geraden Differentialquotienten, den nullte
mit eingeschlossen, von

$$X_1 \quad X_3 \quad X_5 \ldots.$$

und die ungeraden von

$$X_0 \quad X_2 \quad X_4 \ldots.$$

sämmtlich für $x=-\frac{a}{2}$ verschwinden, so hat die Differentialgl
chung der $n$ten Ordnung lauter particuläre Integrale von der Forr

$$y=\varphi(x^2+ax+b).$$

Man kann diesen Satz kürzer auch so aussprechen:

Sind

$$X_0 \quad X_2 \quad X_4 \ldots. \quad \text{und} \quad \frac{X_1}{2x+a} \quad \frac{X_3}{2x+a} \quad \frac{X_5}{2x+a} \ldots.$$

Functionen von x^2+ax+b, so sind die particulären Integrale d
linearen Differentialgleichung

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0$$

von der Form

$$y = \varphi(x^2 + ax + b).$$

Sollte der Fall sein, dass die geraden Differentialquotienten von

$$X_0 \quad X_2 \quad X_4 \ldots.$$

und die ungeraden von

$$X_1 \quad X_3 \quad X_5 \ldots.$$

sämmtlich für $x = -\frac{a}{2}$ verschwinden, so wird, wenn man in der gegebenen Differentialgleichung $y = \varphi(x^2 + ax + b)$ setzt, dieselbe ... durch $2x + a$ abkürzbar sein (denn X_0 X_2 $X_4 \ldots.$ sind ob... durch $2x + a$ theilbar und X_1 X_3 $X_5 \ldots.$ haben respective die Factoren y' y''' $y^{IV} \ldots.$, welche auch durch $2x + a$ theilbar sind), und die so entstehende Gleichung Coefficienten haben, die einen Schluss erlauben auf das Vorhandensein lauter particulärer Integrale von der angenommenen Form.

Nehmen wir als Beispiele folgende Differentialgleichungen vor:

$$y''' + A_1 x y'' + A_2 x^2 y' + A_3 x^3 y = 0.$$

Man erkennt bald, dass

$$y = \varphi(x^2)$$

Form sämmtlicher particulärer Integrale ist. Die Substitution dieses Ausdruckes gibt, wenn man zugleich $x^2 = \xi$ setzt:

$$8\xi\varphi''' + (4A_1\xi + 12)\varphi'' + (2A_2\xi + 2A_1)\varphi' + A_3\xi\varphi = 0,$$

diese lässt sich nach Petzval's Methode integriren. Ich bemerke zugleich, dass die vorgelegte Gleichung ein specieller Fall folgender allgemeinen von Petzval betrachteten ist:

$$x^3 y''' + x^2 y'' (A_2 + B_2 x^m) + x y' (A_1 + B_1 x^m + C_1 x^{2m})$$
$$+ y (A_0 + B_0 x^m + C_0 x^{2m} + D_0 x^{3m}) = 0,$$

die daraus hervorgeht, wenn man:

$$A_0 = B_0 = C_0 = A_1 = B_1 = A_2 = 0 \quad \text{und} \quad m = 2$$

setzt.

$$y''' + A_1(x+a) y'' + A_2(x+a)^2 y' + A_3(x+a)^3 y = 0.$$

Sämmtliche particuläre Integrale dieser Differentialgleichung sind von der Form

$$y = \varphi[(x+a)^2].$$

Substituirt man diesen Ausdruck und setzt $(x+a)^2 = \xi$, so erhä man wieder genau dieselbe Gleichung wie oben, nämlich:

$$8\xi\varphi''' + (4A_1\xi + 12)\varphi'' + (2A_2\xi + 2A_1)\varphi' + A_3\xi\varphi = 0.$$

Die beiden Gleichungen von ganz allgemeiner Ordnungszahl

$$y^{(n)} + A_1 x y^{(n-1)} + A_2 x^2 y^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} y' + A_n x^n y = 0$$

und

$$y^{(n)} + A_1(x+a)y^{(n-1)} + A_2(x+a)^2 y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + A_{n-1}(x+a)^{n-1} y' + A_n(x+a)^n y =$$

haben lauter particuläre Integrale von der Form

$$y = \varphi(x^2) \text{ und } y = \varphi[(x+a)^2];$$

substituirt man statt y respective $\varphi(x^2)$ und $\varphi[(x+a)^2]$, zu gle cher Zeit $x^2 = \xi$ oder $(x+a)^2 = \xi$ annehmend, so erhält man Gle chungen vom $n$ten Grade, deren Coefficienten sämmtlich vom Grad $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ sind, je nachdem nämlich n gerade oder ungerad ist. Man kann dann leicht die Integration dieser Gleichunge $n$ten Grades abhängig machen von der Integration einer Gleichun vom Grade $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, deren Coefficienten aber vom $n$ten Grad sind.

V.

Es ist nicht schwer, diese Untersuchungen weiter fortzuführe und auszudehnen auf Gleichungen, deren sämmtliche particulär Integrale von der Form $y = \varphi(x^3 + ax^2 + bx + c)$ oder allgemei von der Form $y = \varphi(u)$ sind, wo $u = \psi(x)$ ist, unter $\psi(x)$ eine be kannte, gegebene Function von x verstanden. Man hat nämlic aus $y = \varphi(u)$:

$$y' = u'\varphi'(u),$$

$$y'' = u'^2\varphi''(u) + u''\varphi'(u),$$

$$y''' = u'^3\varphi'''(u) + 3u'u''\varphi''(u) + u'''\varphi'(u),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Differentialgleichungen (1), (5) und (9) gehen durch Ei führung von $y = \varphi(u)$ über in folgende andere:

$$X_1 u' \varphi'(u) + X_0 \varphi(u) = 0,$$

$$X_2 u'^2 \varphi''(u) + (X_2 u'' + X_1 u')\varphi'(u) + X_0 \varphi(u) = 0,$$

$$X_3 u'^3 \varphi'''(u) + (3X_3 u' u'' + X_2 u'^2)\varphi''(u) \\ + (X_3 u''' + X_2 u'' + X_1 u')\varphi'(u) + X_0 \varphi(u) = 0.$$

Erstere wird ein particuläres Integral von der Form $y = \varphi(u)$ haben, wenn $X_1 u'$ und X_0 Functionen von u sind; die Gleichung (5) hat zwei particuläre Integrale von der Form $y = \varphi(u)$, wenn $X_2 u'^2$, $X_2 u'' + X_1 u'$ und X_0 Functionen von u sind; eben so hat die Gleichung (9) drei particuläre Integrale von der genannten Form, wenn $X_3 u'^3$, $3X_3 u' u'' + X_2 u'^2$, $X_3 u''' + X_2 u'' + X_1 u'$ und X_0 Functionen von u sind, u. s. f. u. s. f.

II.

Erweiterung eines Satzes vom Schwerpunkte.

Von

Herrn Dr. *H. Burhenne*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbschule in Cassel.

Bekannt ist die folgende Eigenschaft des Schwerpunktes: Sind gleichschwere Punkte A_1, A_2, A_3,.... gegeben, und bedeutet B den Schwerpunkt dieses Systems, so ist die Summe aus den Quadraten der Abstände, das ist

$$(A_1 B)^2 + (A_2 B)^2 + (A_3 B)^2 + \ldots.$$

ein Minimum, in Bezug auf die festen Punkte A und den veränderlichen Punkt B. Es ist auch bekannt, dass, wenn hier die Linien $A_1 B$, $A_2 B$, $A_3 B$,.... nach Grösse und Richtung Kräfte vorstellen, diese sich im Punkte B das Gleichgewicht halten.

Das Gleichgewicht ist nur ein besonderer Fall am Parallelogramme der Kräfte, nämlich wenn die Resultirende gleich Null wird. Man hat die Eigenschaften des Schwerpunktes bereits in das geometrische Gebiet gezogen. Aber dieselbe Beachtung verdient die Zusammensetzung von Linien, wie sie mittelst des Parallelogrammes oder Parallelepipedes der Kräfte geschieht. Dadurch wird man aufmerksam gemacht, einen allgemeineren Satz zu bilden, der jenen vom Schwerpunkte in sich begreift. Dieser Satz ist folgender:

Es seien n Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ im Raume gegeben. Wählt man nun einen Punkt C, und bildet aus den sämmtlichen Linien A_1C, A_2C, $A_3C, \dots A_nC$, wie bei der Zusammensetzung der Kräfte, die resultirende Linie CD, so ist

$$(A_1D)^2+(A_2D)^2+(A_3D)^2+\dots+(A_nD)^2-(CD)^2$$

ein Minimum, in Bezug auf die festen Punkte A, das feste C und das veränderliche D. — In dem besonderen Falle, wo CD zu Null wird, ist C der Schwerpunkt des Systems und unser Satz geht in jenen vom Schwerpunkte über.

Der Beweis des Satzes ist folgender: Wir betrachten einen beliebigen Punkt E im Raume, verbinden denselben mit den Punkten A und dem C, und untersuchen das Vorzeichen der Differenz

$$[\Sigma AE^2-CE^2]-[\Sigma AD^2-CD^2].$$

Da hier

$$\Sigma AE^2=\Sigma(AD^2+ED^2-2AD.ED.\cos ADE)$$

und

$$\Sigma EC^2=\Sigma(CD^2+DE^2-2CD.DE.\cos CDE)$$

ist, so verwandelt sich jene Differenz in

$$(n-1)\,DE^2-2DE[\Sigma(AD.\cos ADE)-CD.\cos CDE].$$

Nun ist CD die Resultirende aller CA, also sind sämmtliche CA mit dem entgegengesetzten CD im Gleichgewichte, so dass, indem man alle Kräfte in die Richtung DE zerlegt,

$$\Sigma(AD.\cos ADE)-CD.\cos CDE=0$$

sein muss. Folglich wird jene Differenz zu

$$(n-1)\,DE^2,$$

ist also immer positiv. Demnach ist, wo auch der Punkt E liegen mag,

$$\Sigma AD^2 - CD^2 < \Sigma AE^2 - CE^2,$$

das heisst:

$$\Sigma AD^2 - CD^2$$

ist ein Minimum, was zu erweisen war.

Man sieht leicht, dass auch der umgekehrte Satz gilt: Wenn ein Punkt D zu $n+1$ festen Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, C$ so liegt, dass

$$\Sigma AD^2 - CD^2$$

ein Minimum wird, so ist CD die Resultirende aus den Linien $A_1C, A_2C, A_3C, \ldots A_nC$.

Die allereinfachste Anwendung findet unser Satz beim Parallelogramme. Sind die vier Eckpunkte eines Parallelogrammes der Folge nach L, M, N, P, so ist $NM^2 + NP^2 - LN^2$ kleiner als $MQ^2 + PQ^2 - LQ^2$, wo auch der Punkt Q liegen mag. Umgekehrt: Wenn ein Punkt N zu drei festen Punkten L, M, P so liegt, dass $NM^2 + NP^2 - LN^2$ ein Minimum wird, so sind L, M, N, P die aufeinander folgenden Ecken eines Parallelogrammes. — Ein anderes Beispiel ist folgendes: Wenn an einem (recht- oder schiefwinkligen) Parallelepipede LR ein Eckdurchmesser ist, von welchem die drei Kantenlinien LM, LN, LP ausgehen, so ist $RM^2 + RN^2 + RP^2 - RL^2$ ein Minimum, für die festen Punkte L, M, N, P und den veränderlichen Punkt R. Umgekehrt: findet dieses Minimum Statt, so ist LR der Eckdurchmesser des durch die Kantenlinien LM, LN, LP bestimmten Parallelepipedes.

III.

Verallgemeinerung der cardanischen Formel.

Von

Herrn Schulrath Dr. *J. H. T. Müller*

zu Wiesbaden.

Bei der Anwendung der cardanischen Formel wird beka
lich vorausgesetzt, dass die allgemeine kubische Gleichung

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

vorher auf die Form

$$y^3+py+q=0$$

mit fehlendem zweiten Gliede gebracht sei. Darnach hat man

$$p=\frac{-b^2+3ac}{3a^2};\quad q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$$

zu berechnen, um für

$$u=\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}\right\}}$$

und

$$v=\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)}\right\}}.$$

$$y'=u+v;$$
$$y''=-\tfrac{1}{2}(u+v)+\tfrac{1}{2}i(u-v)\sqrt{3};$$
$$y'''=-\tfrac{1}{2}(u+v)-\tfrac{1}{2}i(u-v)\sqrt{3}$$

und hieraus endlich $x=y-\frac{b}{3a}$ zu finden.

Da der Fall, dass die gegebene numerische Gleichung v
ständig ist, sehr oft vorkommt, so liegt das Bedürfniss nahe,
cardanische Formel so umzugestalten,

dass die Werthe von x aus a, b, c, d unmittelbar hergestellt werden,

so wie die Hoffnung, hieraus eine Erleichterung für die Rechnung zu gewinnen.

Auch ist die Kenntniss der unmittelbaren Abhängigkeit des x von a, b, c, d schon an und für sich interessant.

Dies zu untersuchen, was, so viel der Einsender weiss, bisher noch nicht geschehen *), ist der Gegenstand dieses kleinen Aufsatzes.

Werden anstatt p und q die oben angegebenen Werthe eingesetzt, so ist zunächst:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{(2b^3-9abc+27a^2d^2)^2}{4.27^2.a^6}+\frac{(-b^2+3ac)^3}{27^2.a^6}$$

$$=\frac{108a^2b^3d-27a^2b^2c^2-486a^3bcd+729a^4d^2+108a^3c^3}{4.27^2.a^6}.$$

Nach Ausscheidung des gemeinschaftlichen Factors $27a^2$ im Zähler und nach gehöriger Reduction erhält man:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\frac{27a^2d^2-b^2c^2+4ac^3+4b^3d-18abcd}{4.27.a^4}.$$

Der Zähler dieses Bruches lässt sich in

$$\left.\begin{array}{l} +4b^3d+4abcd \\ +4ac^3+4abcd \\ -b^2c^2+abcd \\ +27a^2d^2-27abcd \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} +4bd(b^2+ac) \\ +4ac(c^2+bd) \\ -bc(bc-ad) \\ +27ad(ad-bc) \end{array}\right.$$

also in

$$4bd(b^2+ac)+4ac(c^2+bd)+(ad-bc)(27ad+bc)$$

verwandeln.

Da in diesem Ausdrucke die Symmetrie namentlich durch den Factor 27 gestört ist, so wird man auf den Versuch geführt, der Grundgleichung, unbeschadet ihrer Allgemeinheit, eine andere

*) Ich bitte die Abhandlungen im Archiv Thl. XI. Nr. XXXIII. S. 345. — Thl. XII. Nr. XII. S. 166. — Thl. XVI. Nr. VI. S. 58. vergleichen. G.

Form zu geben, wornach sie dem entwickelten Kubus eines B
noms ähnlich wird. Es sei also die Gleichung

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0$$

gegeben, so dass

$$a,\ b,\ c,\ d \text{ in } \alpha,\ 3\beta,\ 3\gamma,\ \delta$$

übergeht.

Dann wird, nach Wegwerfung des gemeinschaftlichen Factors 27

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{\alpha^2\delta^2 - 6\alpha\beta\gamma\delta + 4\alpha\gamma^3 + 4\beta^3\delta - 3\beta^2\gamma^2}{2^2.\alpha^4}$$

$$= \frac{(\alpha^2\delta^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma^2) + 4(\alpha\gamma^3 + \beta^3\delta - \alpha\beta\gamma\delta - \beta^2\gamma^2)}{2^2.\alpha^4}$$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2)}{2^2.\alpha^4}. \qquad (1)$$

Dieser Werth ist völlig symmetrisch und erscheint nach ein
sehr leicht verständlichen Gesetze gebildet.

Entwickelt man ferner

$$\frac{q}{2} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{2.3^3.a^3},$$

so ergiebt sich nach einer leichten Zusammenziehung, so bald [illegible]
gemeinschaftliche Factor 27 auch hier ausgeschieden worden:

$$\frac{q}{2} = \frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{2.\alpha^3}. \qquad (2)$$

Man erhält demnach aus der gegebenen vollständigen kubischen Gleichung:

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0$$

für

$$\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \sqrt[3]{\left\{ -\frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{2\alpha^3} \pm \sqrt{\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2)}{2^2.\alpha^4}} \right\}}$$

wo das obere Vorzeichen für u und das untere für v
gilt.

$$x' = -\frac{\beta}{\alpha} + u + v;$$

$$x'' = -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{2}(u + v) + \frac{1}{2}(u - v)\sqrt{-3};$$

$$x''' = -\frac{\beta}{\alpha} - \tfrac{1}{2}(u+v) - \tfrac{1}{2}i(u-v)\sqrt{3}.$$

In u und v ist, wenn man von der 3 absieht,

1) in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: $\alpha\delta - \beta\gamma$ der Unterschied der Producte der äussern und innern Coefficienten;

2) in $\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \beta, \gamma, \delta\end{matrix}$: $\begin{matrix}\alpha\gamma - \beta^2 \\ \beta\delta - \gamma^2\end{matrix}$ der Unterschied des Products der äussern Coefficienten und des Quadrats des mittlern;

wornach sich das Gesetz der Bildung von u und v sogar leicht mit Worten wiedergeben lässt.

Setzt man $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, so ergiebt sich, was zur Probe der Rechnung dienen kann, sofort

$$\begin{matrix}u \\ v\end{matrix} = \sqrt[3]{\left\{-\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\gamma}{3}\right)^3\right)}\right\}},$$

in Uebereinstimmung mit der cardanischen Formel.

Gebraucht man bei der Berechnung vollständiger numerischer Gleichungen des dritten Grades die Aggregationslogarithmen, wie sie der Einsender dieses in seinen „Vierstelligen Tafeln, Halle 1844" zur Erleichterung umgestaltet hat, so ist die Anwendung der obigen Formel, zumal sich sowohl $\alpha\delta - \beta\gamma$, als auch $\alpha\gamma - \beta^2$ zweimal benutzen lässt, im Allgemeinen leichter und gleichförmiger, als wenn erst die Transformation der gegebenen Gleichung vorgenommen wird. Auch lässt sich dem Ausdrucke noch leicht eine für die Rechnung bequemere Form geben

Hat die gegebene Gleichung drei reelle Wurzeln, ist also

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2) < 0,$$

so giebt die Rechnung, wenn wir

$$-\frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{2\alpha^3} = A$$

und

$$\sqrt{\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)(\beta\delta - \gamma^2)}{2^2 . \alpha^4}} = iB$$

setzen, wo A und B reelle Zahlen sind:

$$u = \sqrt[3]{(A + iB)}; \quad v = \sqrt[3]{(A - iB)}.$$

2*

Sei

$$A+iB=\varrho(\cos\varphi+i\,\mathrm{fs}\,\varphi),$$

so ist auch

$$A-iB=\varrho(\cos\varphi-i\,\mathrm{fs}\,\varphi),$$

folglich in bekannter Weise

$$u=\varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\tfrac{1}{3}\varphi+i\,\mathrm{fs}\,\tfrac{1}{3}\varphi);\quad v=\varrho^{\frac{1}{3}}(\cos\tfrac{1}{3}\varphi-i\,\mathrm{fs}\,\tfrac{1}{3}\varphi);$$

also, für $\varrho=\sqrt{(A^2+B^2)}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{B}{A}$:

$$x'=-\frac{\beta}{\alpha}+2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$\left.\begin{matrix}x''\\x'''\end{matrix}\right\}=-\frac{\beta}{\alpha}-2\varrho^{\frac{1}{3}}(\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{3}\varphi\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\mathrm{fs}\,\tfrac{1}{3}\varphi);$$

oder, wegen $\frac{1}{2}=\cos 60^0$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}=\mathrm{fs}\,60^0$:

$$\left.\begin{matrix}x''\\x'''\end{matrix}\right\}=-\frac{\beta}{\alpha}-2\varrho^{\frac{1}{3}}\cos(60^0\mp\tfrac{1}{3}\varphi).$$

Die Rechnung bietet also auch für diesen Fall keine grösseren Schwierigkeiten, als bei der gewöhnlichen Annahme, dass das zweite Glied der kubischen Gleichung fehlt.

Aus diesen Gründen, und weil die Herleitung unserer Formel lehrreich ist und nicht viel Zeit kostet, besonders wenn man auf den Beweggrund zur Annahme der Form

$$\alpha x^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta=0$$

verzichtet, erscheint mir deren Aufnahme in den Unterricht zweckmässig.

Auch wird sie bei der Auflösung der biquadratischen Gleichungen von Nutzen sein, wobei man bekanntlich immer auf eine vollständige kubische Gleichung zurückkommt.

IV.

Zusätze zu meinen Arbeiten über höhere Gleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Ich habe in drei kleinen Abhandlungen, die in den Sitzungs-
richten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien
d zwar im Februar- und October-Hefte des Jahrgangs 1851 und
Märzhefte des Jahrgangs 1852 abgedruckt erschienen, unter
schiedenen Titeln Zusätze zu meinen Arbeiten über höhere
ichungen *) geliefert, und erlaube mir nun, einen Aufsatz ähn-
er Art hier zu veröffentlichen.

Der erste Theil desselben ist eine blosse Umarbeitung; ich
e mich nämlich bemüht, die theils von mir **), theils von
v. Ettingshausen gefundenen Eigenschaften der Haupt- und
jugirten Curven aus Einem Gesichtspunkte zu betrachten, um
rch unsere gemeinschaftlichen Arbeiten zu einem Ganzen zu
chmelzen. Die dabei angewandten Methoden zeichnen sich
den früheren, von mir gebrauchten, durch Kürze vortheil-
aus.

Der zweite Theil dieser Arbeit scheint mir von grösserer
chtigkeit. Ich stellte mir die Aufgabe, die Asymptoten der ho-
ntalen Projection der genannten Curven aufzufinden, und sodann

---

*) Siehe: Allgemeine Auflösung der Zahlengleichungen
einer oder mehreren Unbekannten.

**) Siehe: Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie
Wissenschaften zu Wien, im Julihefte des Jahrg. 1850.

die Gleichungen dieser horizontalen Projection nach absteigenden Potenzen der unabhängig Variablen zu entwickeln. Ich benützte hiezu das, von mir schon so oft mit Vortheil angewandte Horner'sche Verfahren, das sich, wie ich bemerkt habe, in sehr vielen Fällen eben so zur successiven Berechnung der einzelnen Glieder einer Reihe eignet, wie es sich bekanntlich zur successiven Berechnung der einzelnen Ziffern der Wurzeln einer Zahlengleichung als brauchbar erweist.

Damit nun das hier Dargebotene möglichst klar und verständlich werde, muss ich mir erlauben, den Weg anzudeuten, wie ich zu den Linien, von denen hier die Rede sein soll, und zu ihren Gleichungen gelangt bin. Meine Absicht war, die bekannten, aus dem Newton'schen Princip ausgehenden Methoden, welche zur Berechnung der reellen Wurzeln höherer Gleichungen dienten, auf die Berechnung der imaginären Wurzeln zu übertragen. Offenbar musste ich zuerst die Grenzen derselben bestimmen und da verfuhr ich so: Ich gab dem u in der zur Auflösung vorgelegten Gleichung

$$\varphi(u)=0$$

nicht bloss wie Descartes reelle Werthe allein, sondern auch imaginäre, wie $x+y\sqrt{-1}$, und zwar solche, welche, in $\varphi(u)$ statt u gesetzt, dasselbe reell machen; alsdann betrachtete ich diese x und y als Abscisse und Ordinate, und das Resultat ihrer Substitution, nämlich $\varphi(x+y\sqrt{-1})$, als dritte Coordinate z einer Curve, deren Gleichung man so schreiben könnte:

$$z=\varphi(u), \tag{1}$$

wo $u=x+y\sqrt{-1}$ und z reell ist. So oft man für zwei, dem u beigelegte, ein und demselben Aste dieser Curve angehörige Werthe $\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$ und $\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}$ entgegengesetzt bezeichnete z findet, kann man auf das Vorhandensein wenigstens Einer, zwischen $\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}$ und $\alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}$ liegenden Wurzel schliessen.

Die auf diese Weise aus der Gleichung (1) hervorgehenden Curven stehen mit der Function $\varphi(u)$ in einem Einklange, der durch die bisher übliche Constructionsweise nicht erreicht ward. Ich führe nur, um schnell ein Beispiel zu haben, die höchsten und tiefsten Punkte der durch

$$z=\varphi(u)$$

repräsentirten Curven an, für welche, wie ich gezeigt,

$$\varphi'(u)=0$$

sein muss. Die imaginären Wurzeln dieser Gleichung (falls sie nur, in $\varphi(u)$ substituirt, ein reelles Resultat liefern) entsprechen im Allgemeinen, gerade so wie die reellen Wurzeln derselben, höchsten und tiefsten Punkten; wird aber für einen Werth von u z ein Maximum, so wird für denselben Werth von u z auch ein Minimum; so ist z. B. wenn eine (reelle) Zahl $2a$ in zwei solche Theile getheilt werden soll, dass ihr (reelles) Produkt ein Maximum oder Minimum werde, diese Zahl in gleiche Theile zu theilen; das Produkt a^2 dieser Theile ist ein Maximum im Vergleich zu den reellen Zahlen $a+\delta$ und $a-\delta$; ein Minimum hingegen im Vergleich zu den imaginären Zahlen $a+\delta\sqrt{-1}$, $a-\delta\sqrt{-1}$, in die sich $2a$ zerlegen lässt.

Wir wollen jetzt die, auf die eben erwähnte Weise aus der Gleichung $z=\varphi(u)$ hervorgehenden Curven in näheren Betracht ziehen, und der Einfachheit unserer Untersuchungen wegen für $\varphi(u)$ folgende Form voraussetzen:

$$\varphi(u)=u^n+A_1u^{n-1}+A_2u^{n-2}+\ldots+A_{n-1}u+A_n,$$

unter A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$, A_n beliebige Zahlen verstanden. Wir denken uns u als Horizontal-, z als Höhencoordinate, so nämlich, dass, wenn wir von einem Punkte sprechen, dessen Coordinaten u und z sind, dadurch ein Punkt gemeint wird, dessen Coordinaten nach der gewöhnlichen Sprechweise x, y, z sind.

Suchen wir nun die Durchschnitte der aus $z=\varphi(u)$ hervorgehenden Curven mit Horizontal-Ebenen. Ist $z=h$ die Gleichung einer solchen, so ist für den Durchschnitt derselben mit den Curven $\varphi(u)=h$, und hieraus folgen, weil $\varphi(u)$ vom $n$ten Grade ist, n Werthe von u; sind diese

$$\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1},\quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1},\quad \alpha_3+\beta_3\sqrt{-1},\ldots$$

so schneidet die Ebene $z=h$ das Curvensystem in n Punkten, die folgende Coordinaten haben:

$$\begin{cases} x=\alpha_1 \\ y=\beta_1 \\ z=h \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\alpha_2 \\ y=\beta_2 \\ z=h \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\alpha_3 \\ y=\beta_3 \\ z=h \end{cases}$$

und hieraus sieht man, weil h ganz beliebig ist, dass jede Horizontal-Ebene dieses Curvensystem in n Punkten schneidet.

Betrachten wir nun einen einzelnen Curvenzweig des Systems (Taf. I. Fig. 1.). Die Ebene xy schneidet ihn in drei Punkten a, b und c. Wird die Ebene xy aufwärts geschoben, so schneidet sie

stets diesen Zweig in drei Punkten; gelangt die Ebene nach dem höchsten Punkte m, so findet hier eine Berührung statt, oder, was dasselbe ist, ein Schneiden in zwei unendlich nahen Punkten. Wird die Ebene noch weiter hinaufgerückt, so verschwinden zwei Durchschnittspunkte mit dieser Curve; da aber jede Horizontal-Ebene in gleichviel Punkten das System der Curven schneidet, so müssen statt der verloren gegangenen zwei neue Durchschnittspunkte erscheinen, die von einem Curvenzweige herrühren, dessen beide Aeste von m nach aufwärts sich erstrecken. Ganz eben solche Betrachtungen lassen sich vornehmen, wenn man die Ebene nach abwärts bewegt; vom tiefsten Punkte n tritt ein neuer Curvenzweig aus, dessen beide Aeste nach abwärts sich senken. Man könnte dem einwenden, dass die neuen Curvenzweige ja nicht genöthigt seien, gerade von m und n auszugehen; es genügt ja, wenn sie überhaupt von einem Punkte ausgehen, der dieselbe Höhe hat als diese. Wir wollen daher die höchsten und tiefsten Punkte von $z=\varphi(u)$ ein wenig näher in Betracht ziehen, und bloss der Einfachheit wegen voraussetzen, dass die Coefficienten von $\varphi(u)$ reelle Zahlen sind.

Schreibt man in $z=\varphi(u)$ statt u seinen Werth $x+y\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$z=\varphi(x+y\sqrt{-1}), \tag{1}$$

und wenn man den Theil rechts der Gleichung nach Taylor's Reihe entwickelt:

$$z=\varphi(x)+y\sqrt{-1}\,\varphi'(x)-\frac{y^2}{2!}\varphi''(x)-\frac{y^3\sqrt{-1}}{3!}\varphi'''(x)+\ldots.$$

oder geordnet:

$$z=\{\varphi(x)-\frac{y^2}{2!}\varphi''(x)+\ldots.\}+y\sqrt{-1}\,\{\varphi'(x)-\frac{y^2}{3!}\varphi'''(x)+\ldots.\};$$

und wenn man berücksichtigt, dass x und y so zu wählen sind, dass z reell wird, zerfällt diese Gleichung in folgende zwei:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} z=\varphi(x)-\frac{y^2}{2!}\varphi''(x)+\ldots., \\ y\,\{\varphi'(x)-\frac{y^2}{3!}\varphi'''(x)+\ldots.\}=0; \end{array}\right.$$

oder, weil die letzte derselben als Produkt zweier Factoren Null wird, wenn es der eine oder der andere Factor wird, in:

$$(3)\quad \begin{cases} z=\varphi(x) \\ y=0 \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} z=\varphi(x)-\frac{y^2}{2!}\varphi''(x)+\ldots. \\ \varphi'(x)-\frac{y^2}{3!}\varphi'''(x)+\ldots.=0 \end{cases}$$

und das sind die aus $z=\varphi(u)$ hervorgehenden, durch die Coordinaten x, y, z ausgedrückten Gleichungen unserer Curven.

Den Gleichungen (3) entspricht die von Descartes betrachtete, die ich Hauptcurve nennen will; das andere System der Gleichungen entspricht Curven, die gegen die Ebene xz symmetrisch gebaut sind, diese will ich conjugirte nennen. Jene reellen Werthe von x und y, welche in (3) oder (4) substituirt, $z=0$ geben, machen dann offenbar $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ zu Null und führen somit auf eine Wurzel $x+y\sqrt{-1}$ der Gleichung $\varphi(u)=0$.

Die Hauptcurve, d. i. die Curve (3), hat im Allgemeinen höchste und tiefste Punkte, deren Abscissen der Gleichung $\varphi'(x)=0$ genügen. Sei nun x_1 die Abscisse eines solchen Punktes, so hat man als Coordinaten desselben:

$$x=x_1,\quad y=0,\quad z=\varphi(x_1).$$

Diese Coordinaten genügen aber auch den Gleichungen (4), denn setzt man in ihnen statt x, y, z respective die Werthe x_1, 0, $\varphi(x_1)$ und beachtet man zugleich, dass $\varphi'(x_1)=0$ ist, so erhält man die Identitäten:

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_1),$$
$$0=0;$$

woraus man sieht, dass die höchsten und tiefsten Punkte der Hauptcurve, oder vielmehr, dass jene Punkte der Hauptcurve, deren Tangente horizontal läuft, Punkte sind, die auch den conjugirten Curven angehören.

Ein geometrisches Bild diene zur weiteren Veranschaulichung. Sei ABC (Taf. I. Fig. 2.) ein Theil des Bildes der Hauptcurve einer Gleichung $n$ten Grades. Eine horizontal durch MN gehende Ebene schneidet den, in der Figur sichtbar gemachten Theil der Hauptcurve in 4 Punkten; rückt diese Horizontal-Ebene weiter nach abwärts, so schneidet sie ebenfalls diesen Theil der Hauptcurve in 4 Punkten, und wird diess überhaupt so lange thun, bis die Ebene so weit herabgerückt ist, dass sie durch den tiefsten Punkt B geht, in welcher Lage zwei Punkte unendlich nahe zusammengerückt erscheinen. Ein weiteres Senken der Ebene nach abwärts

macht, dass die Hauptcurve bloss in 2 Punkten geschnitten wird; dadurch gingen zwei Schnittpunkte verloren, wenn nicht eben aus dem tiefsten Punkte B die conjugirten Curven aus beiden Seiten der Ebene xz heraustreten würden und nach abwärts sich senkten. Ganz aus demselben Grunde erheben sich aus den höchsten Punkten A und C Curven, die nach aufwärts steigen.

Wenn daher die Hauptcurve einen tiefsten Punkt hat, der ober der xy-Ebene, oder einen höchsten Punkt, der unter der xy-Ebene liegt, so kann man gewiss wenigstens auf Ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln der Gleichung $\varphi(u)=0$ schliessen; ich sage wenigstens, denn die conjugirte Curve könnte ja ein- oder mehreremal in ihrem Laufe aus einem Steigen in ein Senken oder aus einem Senken in ein Steigen umkehren und da zu mehreren Durchschnitten mit der xy-Ebene Veranlassung geben.

Fragen wir jetzt ganz allgemein nach den Coordinaten der höchsten und tiefsten Punkte der aus $z=\varphi(u)$ hervorgehenden Curven, deren Gleichungen folgende sind:

$$(2)\quad \begin{cases} z=\varphi(x)-\frac{y^2}{2!}\varphi''(x)+\frac{y^4}{4!}\varphi^{IV}(x)-\ldots, \\ y\{\varphi'(x)-\frac{y^2}{3!}\varphi'''(x)+\frac{y^4}{5!}\varphi^{V}(x)-\ldots\}=0. \end{cases}$$

Um diese zu finden, hat man aus der letzten dieser Gleichungen y zu suchen, hernach diesen Werth in die erste der beiden Gleichungen zu substituiren, so dass z als reine Function von x dasteht, dann wird für die höchsten und tiefsten Punkte, oder überhaupt für alle Punkte der Curven, an die horizontale Tangenten gezogen werden können, $\frac{dz}{dx}=0$ sein müssen.

Es ist sehr leicht einzusehen, dass die Gleichungen (2) sich in folgender Form wiedergeben lassen:

$$(5)\quad \begin{cases} z=\frac{1}{2}[\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})], \\ \varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=0; \end{cases}$$

die für

$$x+y\sqrt{-1}=u \text{ und } x-y\sqrt{-1}=v$$

übergehen in:

$$(6)\quad \begin{cases} z=\frac{1}{2}[\varphi(u)+\varphi(v)], \\ \varphi(u)-\varphi(v)=0. \end{cases}$$

Denkt man sich aus der unteren Gleichung y gefunden, hernach diess in die obere Gleichung substituirt, dann differenzirt, so erhält man:

$$(7)\qquad \frac{dz}{dx}=\tfrac{1}{2}\left[\varphi'(u)\cdot\frac{du}{dx}+\varphi'(v)\cdot\frac{dv}{dx}\right].$$

Nun ist:

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\sqrt{-1},\quad \frac{dv}{dx}=1-\frac{dy}{dx}\sqrt{-1};$$

folglich:

$$(8)\qquad \frac{dz}{dx}=\tfrac{1}{2}\left[\varphi'(u)\left(1+\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right)+\varphi'(v)\left(1-\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right)\right].$$

Diess ist abhängig von $\frac{dy}{dx}$, welches gefunden wird durch Differentiation der Gleichung

$$\varphi(u)-\varphi(v)=0,$$

und so gibt:

$$\varphi'(u)\left(1+\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right)-\varphi'(v)\left(1-\frac{dy}{dx}\sqrt{-1}\right)=0$$

oder

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(u)-\varphi'(v)}{\varphi'(u)+\varphi'(v)}\cdot\sqrt{-1}.$$

Es ist daher, wenn man diesen Werth in (8) substituirt, nach gemachten Reductionen:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2\varphi'(u)\varphi'(v)}{\varphi'(u)+\varphi'(v)}.$$

Setzt man

$$\varphi'(u)=\varphi'(x+y\sqrt{-1})=P+Q\sqrt{-1},$$

so ist

$$\varphi'(v)=\varphi'(x-y\sqrt{-1})=P-Q\sqrt{-1}$$

und daher

$$\frac{dz}{dx}=\frac{P^2+Q^2}{P},$$

Null wird für $P=0$, $Q=0$, also für

$$\varphi'(u)=0 \text{ und } \varphi'(v)=0.$$

Gibt es also einen Punkt der Curve $z=\varphi(u)$, für welchen $\varphi'(u)=0$ ist (es ist nämlich immer möglich, dass die aus der Gleichung $\varphi'(u)=0$ gefundenen Werthe, wovon einer $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ sein mag, gar nicht zu einem Punkte der Curve führen, deren Gleichung $z=\varphi(u)$ ist, oder, mit anderen Worten, es ist möglich, dass, wenn man in $\varphi(u)$ statt u $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ setzt, $\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ imaginär werde), so wird man, um beurtheilen zu können, ob dieser Punkt wirklich ein höchster oder tiefster ist, seine beiden nächstgelegenen Punkte in der Curve betrachten müssen; sind sie beide höher, so ist er ein tiefster, sind sie aber beide tiefer, so ist er ein höchster Punkt.

Sind also x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Curve $z=\varphi(u)$, für welchen $\varphi'(u)=0$ ist; ferner $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die Coordinaten eines in der Nähe desselben liegenden Punktes, so genügen sie offenbar als Punkte der Curve (5) folgenden Gleichungen:

$$z+\Delta z$$
$$=\tfrac{1}{2}[\varphi(x+\Delta x+y\sqrt{-1}+\Delta y\sqrt{-1})+\varphi(x+\Delta x-y\sqrt{-1}-\Delta y\sqrt{-1})],$$
$$0=\varphi(x+\Delta x+y\sqrt{-1}+\Delta y\sqrt{-1})-\varphi(x+\Delta x-y\sqrt{-1}-\Delta y\sqrt{-1});$$

die für

$$\Delta x+\Delta y\sqrt{-1}=\Delta u,\quad \Delta x-\Delta y\sqrt{-1}=\Delta v$$

übergehen in:

$$(9)\ \ldots\quad \begin{cases} z+\Delta z=\tfrac{1}{2}[\varphi(u+\Delta u)+\varphi(v+\Delta v)], \\ 0=\varphi(u+\Delta u)-\varphi(v+\Delta v); \end{cases}$$

welche, nach Taylor's Reihe entwickelt, sich so stellen:

$$z+\Delta z=\tfrac{1}{2}\{[\varphi(u)+\varphi(v)]+[\varphi'(u).\Delta u+\varphi'(v).\Delta v]$$
$$+\frac{1}{2!}[\varphi''(u).\Delta u^2+\varphi''(v).\Delta v^2]+\ldots\},$$

$$0=[\varphi(u)-\varphi(v)]+[\varphi'(u).\Delta u-\varphi'(v).\Delta v]$$
$$+\frac{1}{2!}[\varphi''(u).\Delta u^2-\varphi''(v).\Delta v^2]+\ldots$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (6), die für jeden Punkt der Curve gelten, von denen wir jetzt sprechen, und die Gleichungen $\varphi'(u)=0$, $\varphi'(v)=0$, die für jene Punkte gelten, an welche horizontale Tangenten gezogen werden können und für welche die jetzige Untersuchung eigentlich angestellt wird, so hat man statt der zwei aus (9) gezogenen Gleichungen folgende:

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2!}[\varphi''(u).\Delta u^2 + \varphi''(v).\Delta v^2] + \ldots\right\},$$

$$0 = \frac{1}{2!}[\varphi''(u).\Delta u^2 - \varphi''(v).\Delta v^2] + \ldots;$$

die, wenn man wieder statt u, v, Δu und Δv ihre Werthe einführt, übergehen in:

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2!}[\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\Delta x+\Delta y\sqrt{-1})^2 + \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\Delta x-\Delta y\sqrt{-1})^2] + \ldots\right\}$$

$$0 = \frac{1}{2!}[\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\Delta x+\Delta y\sqrt{-1})^2 - \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\Delta x-\Delta y\sqrt{-1})^2] + \ldots$$

Setzt man in denselben $\Delta x = \cos\varphi.\Delta s$, $\Delta y = \sin\varphi.\Delta s$, so hat man:

$$\Delta z = \tfrac{1}{4}[\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)]\Delta s^2 + \ldots,$$

$$0 = \tfrac{1}{4}[\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) - \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)]\Delta s^2 + \ldots,$$

die sich für fortwährend kleiner werdende Δx und Δy ohne Ende folgenden Gleichungen nähern:

$$\delta z = \tfrac{1}{4}[\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi)]ds^2,$$

$$0 = \varphi''(x+y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) - \varphi''(x-y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi - \sqrt{-1}\sin 2\varphi);$$

woraus:

$$\delta z = \tfrac{1}{2}\varphi''(x+y\sqrt{-1})(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi)\,ds^2,$$

$$(10)\qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\varphi''(x+y\sqrt{-1}) - \varphi''(x-y\sqrt{-1})}{\varphi''(x+y\sqrt{-1}) + \varphi''(x-y\sqrt{-1})}.\sqrt{-1}$$

folgt. Aus der letzten Gleichung erhält man für φ, welches der Natur der Sache nach nur Werthe von 0° bis 360° haben kann, vier Werthe; ist der kleinste von ihnen α, so sind alle der letzten Gleichung genügenden:

$$\alpha, \quad \alpha+90^0, \quad \alpha+180^0, \quad \alpha+270^0.$$

Setzt man jetzt für φ in die erste der Gleichungen (10) α oder $\alpha+180^0$, so erhält man ein mit einem bestimmten Zeichen begabtes δz; also sind die beiden, nächst x, y, z sich befindenden einander entgegengesetzt liegenden Punkte, deren Coordinaten

$$x+\cos\alpha.ds, \quad y+\sin\alpha.ds, \quad z+\delta z$$

und

$$x+\cos(\alpha+180^0).ds, \quad y+\sin(\alpha+180^0).ds, \quad z+\delta z$$

sind, zu gleicher Zeit höher oder tiefer, als der, dessen Coordinaten

$$x, \quad y, \quad z$$

sind. Setzt man ferner für φ in die erste der Gleichungen (10) $\alpha+90^0$ oder $\alpha+270^0$, so erhält man wieder Ein, mit einem bestimmten, dem vorhergehenden gerade entgegengesetzten Zeichen begabtes δz; denn früher hatte man:

$$\delta z=\tfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\sqrt{-1}\sin 2\alpha)\varphi''(x+y\sqrt{-1}).ds^2,$$

und jetzt ist:

$$\delta z=\tfrac{1}{2}[\cos(2\alpha+180^0)+\sqrt{-1}\sin(2\alpha+180^0)]\varphi''(x+y\sqrt{-1}).ds^2.$$

War der Punkt, dessen beide Nachbaren die Horizontal-Coordinaten

$$x+\cos\alpha.ds, \quad y+\sin\alpha.ds$$

und

$$x+\cos(\alpha+180^0).ds, \quad y+\sin(\alpha+180^0).ds$$

hatten, ein höchster oder tiefster, so ist derselbe Punkt, dessen beide nächstgelegenen die Horizontal-Coordinaten

$$x+\cos(\alpha+90^0).ds, \quad y+\sin(\alpha+90^0).ds$$

und

$$x+\cos(\alpha+270^0).ds, \quad y+\sin(\alpha+270^0).ds$$

haben, respective ein tiefster oder höchster.

Hat man also die Maxima- und Minima-Werthe einer Function $z=\varphi(u)$ zu bestimmen, so bilde man die Gleichung $\varphi'(u)=0$ und suche ihre Wurzeln. Seien die reellen

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots$$

und die imaginären

$$\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}, \quad \alpha_2+\beta_2\sqrt{-1}, \quad \alpha_3+\beta_3\sqrt{-1}, \quad \alpha_4+\beta_4\sqrt{-1}, \ldots$$

Dann bilde man sich $\varphi''(x)$, substituire in demselben:

1) die Werthe von a_1, a_2, a_3, a_4,.... und untersuche das Zeichen des Resultats. Je nachdem dieses positiv oder negativ ist, hat die Hauptcurve tiefste oder höchste, hingegen die daselbt senkrecht stehende conjugirte Curve respective höchste oder tiefste Punkte;

2) jene von den imaginären Werthen $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, welche, in $z=\varphi(x)$ statt x substituirt, z reell machen. An diesen Punkten, welchen die Coordinaten

$$x=\alpha, \quad y=\beta, \quad z=\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

zukommen, findet auch ein Durchschneiden zweier Curvenzweige unter rechtem Winkel statt; einer von ihnen hat daselbst sein Maximum, der andere sein Minimum.

Wenn daher, um unsere letzt gezeichnete Figur beizubehalten, der conjugirte Curvenzweig, der sich daselbst abwärts senkte, nur irgendwo wieder erhebt und dadurch zu einem tiefsten Punkte Anlass gibt, so würde gleich von da sich eine andere Curve, die erstere senkrecht durchschneidend, nach abwärts senken, um einen höchsten Punkt herbeizuführen.

Die hier gemachten Schlüsse sind unstatthaft, wenn

$$\varphi''(x+y\sqrt{-1})=0, \text{ also auch } \varphi''(x-y\sqrt{-1})=0$$

ist; dann gehen die beiden aus (9) entwickelten Gleichungen über in:

$$\delta z=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3!}[(\Delta x+\Delta y\sqrt{-1})^3\varphi'''(x+y\sqrt{-1}) + (\Delta x-\Delta y\sqrt{-1})^3\varphi'''(x-y\sqrt{-1})]+\ldots\right\},$$

$$[\text{illegible}]= \frac{1}{3!}[(\Delta x+\Delta y\sqrt{-1})^3\varphi'''(x+y\sqrt{-1}) - (\Delta x-\Delta y\sqrt{-1})^3\varphi'''(x-y\sqrt{-1})]+\ldots;$$

und führen, auf dieselbe Weise, wie die früheren, ihnen analogen, behandelt, zu:

$$\delta z=\frac{1}{6}(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\sin 3\varphi)\varphi'''(x+y\sqrt{-1})ds^3,$$

$$\text{11)} \qquad \operatorname{tg} 3\varphi=\frac{\varphi'''(x+y\sqrt{-1})-\varphi'''(x-y\sqrt{-1})}{\varphi'''(x+y\sqrt{-1})+\varphi'''(x-y\sqrt{-1})}\cdot\sqrt{-1}.$$

Aus der letzten Gleichung erhält man für φ folgende sechs (zu drei sich unter gleichen Winkeln schneidenden Geraden führende) Werthe:

$$\alpha, \quad \alpha+60^0, \quad \alpha+120^0, \quad \alpha+180^0, \quad \alpha+240^0, \quad \alpha+300^0.$$

Setzt man für φ in die erste der Gleichungen (11) die beiden, in Beziehung auf den Punkt M einander gegenüberstehenden Punkte der Curve, entsprechenden Werthe α und $\alpha+180^0$, oder $\alpha+60^0$ und $\alpha+240^0$, oder $\alpha+120^0$ und $\alpha+300^0$, so erhält man in jedem Falle δz einmal positiv und ein andermal negativ, also hat keine der drei, sich im Punkte x, y, z unter gleichen Winkeln schneidenden Curven daselbst einen höchsten oder tiefsten Punkt, sondern alle drei haben daselbst einen Wendepunkt.

Die hier gemachten Schlüsse sind wieder unstatthaft, wenn

$$\varphi'''(x+y\sqrt{-1})=0, \text{ also auch } \varphi'''(x-y\sqrt{-1})=0$$

ist. Durch eine ähnliche, wie die eben gemachte Analyse überzeugt man sich in diesem Falle von dem Vorhandensein von vier, unter gleichen Winkeln sich schneidenden Curvenzweigen, wovon zwei in x, y, z ihren höchsten und die zwei andern, in ihrer Horizontalprojection zwischen ihnen liegenden, ihren tiefsten Punkt haben.

Und endlich ganz allgemein: Bestehen für irgend einen Punkt x, y, z unserer zu untersuchenden Curven die Gleichungen:

$$\varphi'(x+y\sqrt{-1})=\varphi'(x-y\sqrt{-1})=0,$$
$$\varphi''(x+y\sqrt{-1})=\varphi''(x-y\sqrt{-1})=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(m-1)}(x+y\sqrt{-1})=\varphi^{(m-1)}(x-y\sqrt{-1})=0;$$

so findet eine Vereinigung von m Curvenzweigen unter gleichen Winkeln statt, die, falls m gerade ist, da zum Theil ihre höchsten, zum Theil ihre tiefsten Punkte, falls aber m ungerade ist, da lauter Wendepunkte haben.

Wir gehen jetzt weiter zur Bestimmung der Asymptoten an die horizontale Projection dieser Curven, deren Gleichung

$$y\left\{\varphi'(x)-\frac{y^2}{3!}\varphi'''(x)+\frac{y^4}{5!}\varphi^V(x)-\ldots\right\}=0$$

ist. Sei

$$y=ax+b$$

die Gleichung einer Asymptote, so muss sich die vorgelegte Gleichung auf die Form

$$y=ax+b+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x^3}+\ldots.$$

gebracht denken lassen. Aus ihr ergeben sich die Gleichungen:

$$\lim\frac{y}{x}=a,$$
$$\lim(y-ax)=b,$$
$$\lim(xy-ax^2-bx)=\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

wo das Zeichen limes sich auf fort und fort wachsende Werthe von x bezieht. Um a zu bestimmen, braucht man in der Gleichung der Curven nur $\frac{y}{x}=a$, d. h. $y=ax$, zu setzen, und die Grenze zu suchen, gegen welche a beim unendlichen Wachsen von x convergirt. Hat man a gefunden, so ergibt sich b, wenn man in der Gleichung der Curve

$$y=ax+b$$

setzt und die Grenze sucht, gegen welche b für beständig wachsende x sich nähert. Jedem System reeller Werthe von a und b entspricht alsdann eine Asymptote. Setzt man daher in der vorgelegten Gleichung, die sich auch so schreiben lässt:

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x-y\sqrt{-1}),$$

$y=ax$, so erhält man:

$$\varphi(x+ax\sqrt{-1})=\varphi(x-ax\sqrt{-1}),$$

und wenn

$$\varphi(u)=u^n+A_1u^{n-1}+A_2u^{n-2}+\ldots.+A_{n-2}u^2+A_{n-1}u+A_n$$

ist (wo sämmtliche Coefficienten A reell sind):

$$(x+ax\sqrt{-1})^n+A_1(x+ax\sqrt{-1})^{n-1}+\ldots.+A_{n-1}(x+ax\sqrt{-1})+A_n=$$
$$(x-ax\sqrt{-1})^n+A_1(x-ax\sqrt{-1})^{n-1}+\ldots.+A_{n-1}(x-ax\sqrt{-1})+A_n.$$

Dividirt man beiderseits durch x^n, so ist:

$$(1+a\sqrt{-1})^n+\frac{A_1}{x}(1+a\sqrt{-1})^{n-1}+\ldots.+\frac{A_{n-1}}{x^{n-1}}(1+a\sqrt{-1})=$$

$$(1-a\sqrt{-1})^n+\frac{A_1}{x}(1-a\sqrt{-1})^{n-1}+\ldots.+\frac{A_{n-1}}{x^{n-1}}(1-a\sqrt{-1}),$$

und diese Gleichung nähert sich für wachsende x ohne Ende der Gleichung

$$(1+a\sqrt{-1})^n=(1-a\sqrt{-1})^n,$$

welcher, weil sie vom $n$ten Grade ist, n Werthe genügen, und diese sind:

$$a=0^0,\ a=\operatorname{tg}\frac{180^0}{n},\ a=\operatorname{tg}2.\frac{180^0}{n},\ \ldots\ a=\operatorname{tg}(n-1).\frac{180^0}{n};$$

denn, setzt man in ihr

$$a=\operatorname{tg}m.\frac{180^0}{n}$$

so erhält man die identische Gleichung:

$$(1+\operatorname{tg}m.\frac{180^0}{n}.\sqrt{-1})^n=(1-\operatorname{tg}m.\frac{180^0}{n}.\sqrt{-1})^n,$$

weil hieraus

$$(\cos m.\frac{180^0}{n}+\sqrt{-1}\sin m.\frac{180^0}{n})^n=(\cos m.\frac{180^0}{n}-\sqrt{-1}\sin m.\frac{180^0}{n})^n$$

oder endlich

$$\cos m.180^0+\sqrt{-1}\sin m.180^0=\cos m.180^0-\sqrt{-1}\sin m.180^0$$

hervorgeht.

Setzt man jetzt in der Gleichung

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x-y\sqrt{-1})$$

$y=ax+b$, so erhält man:

$$\varphi(x+ax\sqrt{-1}+b\sqrt{-1})=\varphi(x-ax\sqrt{-1}-b\sqrt{-1})$$

oder entwickelt:

$$\varphi(x+ax\sqrt{-1})+b\sqrt{-1}.\varphi'(x+ax\sqrt{-1})-\frac{b^2}{2!}\varphi''(x+ax\sqrt{-1})-\ldots=$$

$$\varphi(x-ax\sqrt{-1})-b\sqrt{-1}.\varphi'(x-ax\sqrt{-1})-\frac{b^2}{2!}\varphi''(x-ax\sqrt{-1})+\ldots$$

und da

$$\varphi(u)=u^n+A_1u^{n-1}+A_2u^{n-2}+\ldots+A_n,$$
$$\varphi'(u)=nu^{n-1}+A_1(n-1)u^{n-2}+A_2(n-2)u^{n-3}+\ldots,$$
$$\varphi''(u)=n(n-1)u^{n-2}+A_1(n-1)(n-2)u^{n-3}+A_2(n-2)(n-3)u^{n-4}+\ldots$$

u. s. w.

ist, so verwandelt sich obige Gleichung in:

$$(x+ax\sqrt{-1})^n+(A_1+bn\sqrt{-1})(x+ax\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$+[A_2+b(n-1)A_1\sqrt{-1}-\frac{b^2}{2}n(n-1)](x+ax\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots=$$

$$(x-ax\sqrt{-1})^n+(A_1-bn\sqrt{-1})(x-ax\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$+[A_2-b(n-1)A_1\sqrt{-1}-\frac{b^2}{2}n(n-1)](x-ax\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots$$

Nun ist a so gewählt worden, dass

$$(x+ax\sqrt{-1})^n=(x-ax\sqrt{-1})^n$$

ist; man kann daher beiderseits das erste Glied weglassen; dividirt man dann noch durch x^{n-1}, so erhält man:

$$(A_1+bn\sqrt{-1})(1+a\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$+\frac{1}{x}[A_2+b(n-1)A_1\sqrt{-1}-\frac{b^2}{2}n(n-1)](1+a\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots=$$

$$(A_1-bn\sqrt{-1})(1-a\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$+\frac{1}{x}[A_2-b(n-1)A_1\sqrt{-1}-\frac{b^2}{2}n(n-1)](1-a\sqrt{-1})^{n-2}+\ldots$$

und diess nähert sich für ohne Ende wachsende Werthe von x fort und fort der Gleichung:

$$(A_1+bn\sqrt{-1})(1+a\sqrt{-1})^{n-1}=(A_1-bn\sqrt{-1})(1-a\sqrt{-1})^{n-1}$$

oder, wenn man beiderseits mit $(1+a\sqrt{-1})(1-a\sqrt{-1})$ multiplicirt und dabei berücksichtigt, dass

$$(1+a\sqrt{-1})^n=(1-a\sqrt{-1})^n$$

ist:

$$(A_1+bn\sqrt{-1})(1-a\sqrt{-1})=(A_1-bn\sqrt{-1})(1+a\sqrt{-1}),$$

woraus folgt:

$$b=\frac{A_1}{n}a.$$

Die Gleichung der Asymptoten ist daher:

$$y=x\,\mathrm{tg}\,m.\frac{180^0}{n}+\frac{A_1}{n}\mathrm{tg}\,m.\frac{180^0}{n},$$

wo m die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n-1$$

hat. Alle n Asymptoten schneiden sich daher in dem einen Punkte, dessen Coordinaten

$$x=-\frac{A_1}{n},\quad y=0$$

sind. Ist n gerade, so geht die Gleichung jener Asymptote, für die $m=\frac{n}{2}$ ist, nämlich

$$y=(x+\frac{A_1}{n})\operatorname{tg} 90^\circ,$$

über in

$$x+\frac{A_1}{n}=0.$$

Da die allgemeine Gleichung der Asymptoten

$$y=x\operatorname{tg} m.\frac{180^\circ}{n}+\frac{A_1}{n}\operatorname{tg} m.\frac{180^\circ}{n}$$

ist, so lässt sich die Gleichung

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\varphi(x-y\sqrt{-1})$$

in Reihen verwandeln von der Form

$$y=x\operatorname{tg} m.\frac{180^\circ}{n}+\frac{A_1}{n}\operatorname{tg} m.\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x^3}+\ldots,$$

und diese sind für grosse Werthe von x gewiss convergent. Man könnte nun die Zahlen α, β, γ,.... genau so finden, wie wir a und b gefunden haben, allein bequemer scheint es zu sein, den Weg einzuschlagen, den wir gegangen sind bei der Berechnung der Wurzeln der Gleichungen; die einzelnen Ziffern derselben sind äquivalent den einzelnen Gliedern dieser Reihe, und so wie bei der Auflösung der Gleichungen die successive Berechnung der einzelnen Ziffern vor sich geht, genau so geht hier die successive Berechnung der einzelnen Glieder der Reihe vor sich.

Zum bessern Verständniss diene folgendes Beispiel:

$$\varphi(u)=u^4+9u^2-6u+5.$$

Die Gleichung

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})=0$$

geht in diesem Falle über in:

$$(1) \qquad y(2x^3+9x-3-2xy^2)=0.$$

Die Gleichung der Asymptoten ist, da man $A_1=0$, $n=4$ hat:

$$y=x\,\mathrm{tg}\,m.45^0,$$

und da m die Werthe 0, 1, 2, 3 annimmt:

$$y=0,\quad y=x,\quad x=0,\quad y=-x.$$

Die erste Gleichung $y=0$ leistet der Gleichung (1) identisch Genüge, es sind daher die mit α, β, γ,.... bezeichneten Grössen in diesem Falle sämmtlich gleich Null. Die zweite Gleichung $y=x$ entspricht einer Curve, deren Gleichung

$$y=x+\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x^3}+\ldots.$$

ist, und die sich vollständig aus (1) berechnen lässt, da aus derselben folgt:

$$y=\sqrt{x^2+\frac{9}{2}-\frac{3}{2x}},$$

und sich hier auf gewöhnliche Art leicht die Wurzel ziehen lässt; allein wir schlagen doch den vorhin angedeuteten Weg ein, weil er in jedem Falle passt, wie hoch auch immer der Grad der Gleichung (1) ist. Ordnet man daher die Gleichung

$$(2) \qquad 2x^3+9x-3-2xy^2=0$$

nach fallenden Potenzen von y, und bildet dann mittelst des Horner'schen Verfahrens eine neue Gleichung, deren Wurzeln um x kleiner sind, als die Wurzeln y der Gleichung (2), so hat man so vorgehend:

$$\begin{array}{ccc}
-2x & 0 & 2x^3+9x-3 \\
-2x & -2x^2 & 9x-3^* \\
-2x & -4x^{2*} &
\end{array}$$

die Gleichung

$$(3) \qquad -2xy^2-4x^2y+9x-3=0.$$

welche die Auflösung hat:

$$y=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x^3}+\ldots.$$

Vernachlässigt man jetzt in (3) für einen Augenblick die zweiten (und höheren) Potenzen von y, so geht sie über in:

$$-4x^2y+9x-3=0,$$

woraus

$$y=\frac{9}{4x}-\frac{3}{4x^2}$$

folgt; es ist somit

$$\alpha=\frac{9}{4}.$$

Bildet man nun wieder eine neue Gleichung, deren Wurzeln um $\frac{9}{4x}$ kleiner sind, als die Wurzeln y von (3), so hat man nach derselben Vorgangsweise:

$$\begin{array}{lll} -2x & -4x^2 & 9x-3 \\ -2x & -4x^2-\frac{9}{2} & -3-\frac{81}{8x}\,* \\ -2x & -4x^2-9\,* & \end{array}$$

Die Gleichung

$$(4)\qquad -2xy^2-(4x^2+9)y-3-\frac{81}{8x}=0$$

hat daher die Auflösung

$$y=\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x^3}+\dots$$

Vernachlässigt man in (4) für einen Augenblick das Glied mit y^2, so erhält man genähert:

$$-(4x^2+9)y-3-\frac{81}{8x}=0,$$

woraus

$$y=-\frac{3+\frac{81}{8x}}{4x^2+9}=-\frac{3}{4x^2}+\dots$$

hervorgeht. Es ist daher $\beta=-\frac{3}{4}$, und man hat weiter:

$$\begin{array}{lll} -2x & -4x^2-9 & -3-\frac{81}{8x} \\ -2x & -4x^2-9+\frac{3}{2x} & -\frac{81}{8x}+\frac{27}{4x^2}-\frac{9}{8x^3}\,* \\ -2x & -4x^2-9+\frac{3}{x}\,* & \end{array}$$

Durch Division des letzten Gliedes durch das vorletzte erhält man $\frac{81}{32x^3}$, also ist $\gamma = -\frac{81}{32}$ u. s. f.

Die Gleichung (2), der eine Asymptote $y=x$ entspricht, lässt sich daher in folgender Form stellen:

$$y = x + \frac{9}{4x} - \frac{3}{4x^2} - \frac{81}{32x^3} + \dots,$$

und da aus (2) für y zwei gleich grosse, einander entgegengesetzte Werthe folgen, so ist die Gleichung der Curve, deren Asymptote $y=-x$ ist:

$$y = -x - \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x^2} + \frac{81}{32x^3} - \dots$$

Der Asymptote $x=0$ entspricht eine Curve, deren Gleichung von der Form ist:

$$x = \frac{A}{y^2} + \frac{B}{y^4} + \frac{C}{y^6} + \dots$$

Um A, B, C,.... zu bestimmen, hat man die Gleichung $2x^3 + 9x - 3 - 2xy^2 = 0$ statt nach y nach x zu ordnen, man erhält da:

(2) $$2x^3 + x(9 - 2y^2) - 3 = 0.$$

Da für sehr grosse y x sehr klein ist, kann man statt dieser Gleichung nahezu setzen:

$$x(9 - 2y^2) - 3 = 0,$$

d. h.

$$x = \frac{3}{-2y^2 + 9} = -\frac{3}{2y^2} + \dots;$$

es ist somit $A = -\frac{3}{2}$.

Nach der frühern Weise vorgehend, hat man:

2	0	$-2y^2+9$	-3
2	$-\frac{3}{y^2}$	$-2y^2+9+\frac{9}{2y^4}$	$-\frac{27}{2y^2}-\frac{27}{4y^6}$ *
2	$-\frac{6}{y^2}$	$-2y^2+9+\frac{27}{2y^4}$ *	
2	$-\frac{9}{y^2}$ *		

und die Gleichung

$$2x^3 - \frac{9}{y^2}x^2 + \left(-2y^2 + 9 + \frac{27}{2y^4}\right)x - \frac{27}{2y^2} - \frac{27}{4y^6} = 0$$

hat:

$$x = \frac{B}{y^4} + \frac{C}{y^6} + \dots$$

zur Wurzel. Schreibt man nun wieder näherungsweise, die zweiten und höheren Potenzen von x vernachlässigend:

$$\left(-2y^2 + 9 + \frac{27}{2y^4}\right)x - \frac{27}{2y^2} - \frac{27}{4y^6} = 0,$$

so folgt:

$$x = -\frac{27}{4y^4} + \dots;$$

es ist daher $B = -\frac{27}{4}$; man findet dann weiter auf dieselbe Weise $C = -\frac{243}{8}$ u. s. w. Es folgt somit aus (2):

$$x = -\frac{3}{2y^2} - \frac{27}{4y^4} - \frac{343}{8y^6} + \dots.$$

Aus dem Allen sehen wir, dass die Gleichung (I) vier Linien repräsentirt, deren Gleichungen sind:

$$y = 0,$$

$$y = x + \frac{9}{4x} - \frac{3}{4x^2} - \frac{81}{32x^3} + \dots,$$

$$x = -\frac{3}{2y^2} - \frac{27}{4y^4} - \frac{343}{8y^6} + \dots,$$

$$y = -x - \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x^2} + \frac{81}{32x^3} - \dots.$$

Ganz ebenso lässt sich allgemein die Gleichung

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = \varphi(x - y\sqrt{-1})$$

durch n Gleichungen ersetzen. Diese sind:

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \quad y = \varphi_3(x), \dots \quad y = \varphi_n(x);$$

wo jedes $\varphi(x)$, mit Ausnahme des schon vorhin erwähnten Falles, die Form hat:

$$ax + b + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \dots$$

Werden diese Werthe in

$$z = \tfrac{1}{2}\left[\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})\right]$$

substituirt, was sich wieder leicht durch Anwendung desselben Verfahrens successive bewerkstelligen lässt, so erhält man:

$$z = \psi_1(x), \quad z = \psi_2(x), \quad z = \psi_3(x), \ldots \quad z = \psi_n(x);$$

wo jedes $\psi(x)$ (wenn n gerade ist, mit Ausnahme eines einzigen Falles) die Form annimmt:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n + \frac{A_{n+1}}{x} + \frac{A_{n+2}}{x^2} + \ldots$$

Man kann daher im Allgemeinen statt der aus $z = \varphi(u)$ hervorgehenden Gleichungen folgende Systeme von Gleichungen schreiben:

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x) \\ z = \psi_1(x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi_2(x) \\ z = \psi_2(x) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi_3(x) \\ z = \psi_3(x) \end{cases} \ldots \begin{cases} y = \varphi_n(x) \\ z = \psi_n(x) \end{cases}$$

und diese entsprechen den n, aus $z = \varphi(u)$ hervorgehenden Curven.

Ganz auf dieselbe Weise, nur bei weitem einfacher, lässt sich aus der Gleichung:

$$\varphi'(x) - \frac{y^2}{3!}\varphi'''(x) + \frac{y^4}{5!}\varphi^V(x) - \ldots = 0$$

y^2 in Form von Reihen der Gestalt:

$$y^2 = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \ldots$$

ableiten.

Es ist klar, dass man diese Entwickelungsweise einer Function in Reihen sehr verallgemeinern kann; wir erlauben uns vielleicht ein andermal darauf zurückzukommen. Zum Schlusse machen wir nur noch eine Bemerkung über die Curven, die aus der Gleichung

$$\varphi(z, u) = 0$$

hervorgehen, wenn man auch hier, analog der frühern Vorgangsweise, $u = x + y\sqrt{-1}$ setzt und z als reell ansieht. Da, wo bei dem gewöhnlichen Constructionsverfahren ein singulärer Punkt auftreten würde, erscheint hier im Allgemeinen derselbe Punkt gleichsam als Durchschnitt einer conjugirten Curve mit der xz-Ebene; so ist z. B. nach der gewöhnlichen Constructionsweise, wenn u und z die Abscisse und Ordinate bezeichnen,

$$z^2 = u^2(u^2 - 1)$$

die Gleichung einer Curve, und $x=0$, $z=0$ sind die Coordinaten eines singulären Punktes derselben; nach unserem Vorgange hingegen zerfällt sie in:

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = x^4 - x^2 - y^2(6x^2-1) + y^4, \\ xy(4x^2 - 2 - 4y^2) = 0; \end{array}\right.$$

und aus diesen gehen hervor folgende drei Systeme von Gleichungen:

$$(1)\ \left\{\begin{array}{l} z^2 = y^2 + y^4 \\ x = 0 \end{array}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{array}{l} z^2 = x^4 - x^2 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

$$(3)\ \left\{\begin{array}{l} z^2 = x^4 - x^2 - y^2(6x^2-1) + y^4 \\ y^2 = x^2 - \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Die aus der Gleichung (1) hervorgehende Curve liegt in der Ebene yz und schneidet die Ebene xz in dem Punkte, dessen Coordinaten $x=0$, $y=0$, $z=0$ sind; die aus (2) hervorgehende Curve, die mit der auf gewöhnliche Weise construirten identisch ist, liegt in der xz-Ebene, ihrer Gleichung leisten die Coordinaten desselben Punktes Genüge; endlich führt das System (3) auf nachfolgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = -\frac{1}{4}(4x^2-1)^2 \\ y^2 = x^2 - \frac{1}{2} \end{array}\right.,$$

denen für gar keine reellen Coordinaten x, y, z entsprochen wird.

V.

Zur Theorie der imaginären Grössen.

Von

Herrn Dr. *H. Burhenne*,

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbschule in Cassel.

Es ist bekannt, dass man schon seit längerer Zeit versucht hat, auch den imaginären Grössen eine reelle und anschauliche Bedeutung zu geben, indem man $\sqrt{-1}$ auf die seitliche (d. i. zur positiven und negativen senkrechte) Richtung bezog. In der neueren Zeit ist diese Construction des Imaginären in mehreren Werken ausführlich entwickelt, so dass sich bereits eine besondere Literatur über diesen Gegenstand gebildet hat.

In den bis jetzt darüber erschienenen Schriften ist nicht gezeigt, dass die geometrische Auslegung des Imaginären etwas Neues oder einen wesentlichen Nutzen bei der Behandlung von Aufgaben zu leisten im Stande ist. Daraus würde, wenn auch nicht auf die Schwäche, doch auf die Unfruchtbarkeit der neuen Theorie zu schliessen sein. — Es ist nun auffallend, dass in den mathematischen Werken nirgends der einzige Fall zur Sprache gebracht ist, wo die Interpretation des Imaginären wirklich zu etwas Neuem, nämlich zu einer wichtigen physikalischen Entdeckung geführt hat. Fresnel, welchem die Undulationstheorie so grosse Fortschritte verdankt, suchte seine 1821 bekannt gemachten Formeln für die Polarisation des Lichtes durch Reflexion, in den folgenden Jahren auch auf diejenigen Fälle, besonders bei den Reflexionen des Lichtes im Innern der Körper anzuwenden, wo diese Formeln imaginär werden. Dies beurtheilte Fresnel auf folgende Weise: „In verschiedenen geometrischen Fällen zeigt das Vorkommen einer imaginären Grösse eine Veränderung von 90 Graden in der Lage der Linie an, deren Länge mit $\sqrt{-1}$

multiplicirt ist, weshalb es wahrscheinlich ist, dass auch hier die Multiplication mit $\sqrt{-1}$ anzeigt, dass die Phase der Vibration um 90 Grade verändert wird." Nämlich in dem Falle, wo man für die Vibrations-Intensität des reflectirten Lichtes den imaginären Ausdruck $a+b\sqrt{-1}$ erhält, wird angenommen, dass dieselbe von zwei Wellensystemen herrührt, die sich im Gange um eine Viertel-Undulation unterscheiden und die Vibrations-Intensitäten a und b besitzen. Durch diese Auslegung des Imaginären wurde Fresnel in den Stand gesetzt, die Erscheinungen der sogenannten circularen Polarisation des Lichtes vorauszusagen, und seine Erwartungen sind sodann durch Experimente vollkommen bestätigt worden.

Dessenungeachtet hat nach meiner Ansicht die erwähnte Construction der imaginären Grössen keine wesentliche Bedeutung und steht nicht auf gleicher Stufe mit der bekannten geometrischen Deutung der negativen Grössen, welche Behauptung ich durch die folgenden Bemerkungen zu unterstützen suche.

Man construirt $x+y\sqrt{-1}$ durch den Radiusvector, dessen Endpunkt die rechtwinkligen Coordinaten x und y hat. Mit andern Worten: Es wird $x+y\sqrt{-1}$ auf die Form $\varrho . e^{\varphi\sqrt{-1}}$ gebracht und durch den Modulus ϱ unter dem Winkel φ (in Bezug auf die positive Richtung) dargestellt. Aber eben darin, dass man dabei x und y als rechtwinklige Coordinaten betrachtet, liegt etwas Willkührliches. Man könnte auch eine andere Function zweier reellen Grössen x und y wählen. Will man die neue Theorie darauf stützen, dass in einem Kreise der Radius die mittlere Proportionale zwischen dem $+r$ und $-r$ des senkrechten Durchmessers ist, so dehnt man, was auch schon Andere gerügt haben, einen Satz, der für absolute Linienlängen gilt und bewiesen wird, ohne Berechtigung auf Linien aus, deren Richtungen durch Vorzeichen unterschieden werden.

Dass die positiven und negativen Zahlen des Calculs eine reelle Bedeutung an den nach gerad entgegengesetzten Richtungen construirten Grössen gefunden haben, ist offenbar darin begründet, dass der Gegensatz zwischen den beiden Richtungen derselben Linie dem Gegensatze zwischen Addition und Subtraction der Zahlen entsprechend ist. Aber es zeigt sich bei den Rechnungsoperationen kein Gegensatz, der einer seitlichen (oder senkrechten) Richtung analog wäre. Auch würde eine solche Beziehung sogleich etwas Unbestimmtes enthalten. Nämlich es gehört zwar zu jeder Richtung eine einzige bestimmte, die ihr gerad entgegengesetzt ist, aber zu jeder Richtung gehören unzählige senkrechte Richtungen, eine Ebene voll.

Die reelle Auslegung des Imaginären ist **unverträglich** mit einer andern, bei allen Mathematikern üblichen Darstellungsweise. Z. B. Man betrachtet bekanntlich die Hyperbel als eine Ellipse, deren zweite Axe imaginär ist; aber dies hat mit jener Construction gar nichts zu schaffen und lässt sich nur im analytischen Sinne deuten. Bei der Hyperbel ist die **Richtung** der Queraxe reell, aber ihre **Länge** ist imaginär. Ueberhaupt sind bei der Hyperbel die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser reell, aber die Länge des einen ist imaginär. Wie stimmt dies mit jener Theorie? Wie könnte man die imaginären Grössen, welche in der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte vorkommen, auf eine einfache Weise durch Construction interpretiren?

Bei der Construction des Imaginären giebt man der Zahlenreihe gleichsam eine zweite Dimension. Aber der Begriff der Zahl bedarf nicht des Raumes, sondern gründet sich auf die Vorstellung der **Zeit**. Nämlich durch die Wiederholung der Eins ergiebt sich die natürliche Zahl, und Wiederholung geschieht in der Zeit. Die Zeit hat nur Eine Dimension (mit zwei einander entgegengesetzten Richtungen), ebenso die Zahlenreihe.

Wendet man jene Construction auf eine Wurzelgrösse des $n$ten Grades an, so erscheinen die n verschiedenen Werthe der Wurzel als **dieselben** Längen, nur in verschiedenen Richtungen. Dies ist ein bequemes Bild, welches die Auffassung der betreffenden Formeln erleichtert. Aber es bietet sich kein solch einfaches Bild dar für die unzähligen Werthe eines Logarithmus. Davon liegt der Grund natürlich darin, dass bei der $n$ten Wurzel aus einer Grösse alle n Werthe denselben Modulus haben, was bei den unzähligen Werthen eines Logarithmus nicht der Fall ist.

Bekanntlich zeigen in der Analysis die Formeln für die Kreisfunctionen, welche aus der Entwickelung von $e^{x\sqrt{-1}}$ hervorgehen, eine durchgreifende Analogie mit den Formeln für die hyperbolischen Functionen, welche aus der Entwickelung von e^x hervorgehen. Dagegen bei der Construction der imaginären Grössen zeigt sich dies nicht mehr, indem $e^{x\sqrt{-1}}$ die Einheit unter dem Winkel x bedeutet, während in e^x der Exponent mit der Richtung gar nichts zu schaffen hat.

Wollte man die gebräuchliche Construction einer Gleichung mit zwei Variabeln mittelst einer Curve, und jene graphische Darstellung des Imaginären **nebeneinander** anwenden, so würde nothwendig Verwirrung entstehen.

Wenn die Construction des Imaginären in manchen Fällen

gerechtfertigt erscheint, so ist dies mehr zufällig und durch besondere Umstände des Problems bedingt, so dass sich keine allgemeine Regel daraus machen lässt.

Z. B. Für eine Ellipse seien a und b die Halbaxen und c die Excentricität. Jenachdem nun $a > b$ oder $a < b$, hat man die Gleichung $c^2 = a^2 - b^2$ oder $c^2 = b^2 - a^2$; im ersten Falle ist c auf der Halbaxe a, und im zweiten Falle auf der dazu senkrechten Halbaxe b abzutragen; im ersten Falle ist das c in der zweiten Gleichung, im zweiten Falle das c in der ersten Gleichung imaginär. Hier besteht der Uebergang von der einen Gleichung zur andern in einer Drehung um einen Quadranten. Freilich steht nun das imaginäre c der einen Gleichung senkrecht auf dem reellen c der andern Gleichung, so dass hier der imaginäre Factor $\sqrt{-1}$ die Rolle eines Zeichens der Perpendicularität spielen muss. Aber dies liegt in den besondern Bedingungen des Gegenstandes.

Wir wählen noch eine sehr einfache Aufgabe: Eine gerade Linie $AB = a$ vom Ursprunge A in der Richtung der positiven x ist gegeben. Es wird in dieser Linie ein Punkt C von solcher Lage gesucht, dass die Proportion

$$AB : AC = AC : BC$$

stattfindet. Es sei $AC = x$. Soll nun der Punkt C von B aus in der Richtung nach A liegen, so hat man die Gleichung

$$(1) \qquad x^2 + ax - a^2 = 0,$$

welche die beiden reellen Wurzeln

$$x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5}),$$

$$x = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{5})$$

liefert, wodurch zwei Lagen für C bestimmt werden. Soll der Punkt C von B aus nach der dem BA entgegengesetzten Richtung liegen, so hat man die Gleichung

$$(2) \qquad x^2 - ax + a^2 = 0,$$

welche zwei imaginäre Wurzeln

$$x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{-3}),$$

$$x = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{-3})$$

liefert, woraus folgt, dass ein solcher Punkt in der Verlängerung von AB nicht existirt. Wenn man nun aber diese imaginären Werthe nach der oben angegebenen Weise construirt, so erhält man zwei Punkte, den einen rechts, den anderen links von AB, von welchen jeder mit den Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet, und folglich der vorgeschriebenen Proportion $AB:AC = AC:BC$ Genüge leistet, sobald man davon abgeht, dass der Punkt C in die Linie AB oder ihre Verlängerung fallen soll. Aber lässt man von dieser Forderung nach, so giebt es unendlich viele Punkte in der Ebene xy, welche der angegebenen Proportion entsprechen, und in einer der Gleichung vom vierten Grade

$$(3) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2[(a-x)^2+y^2]$$

zugehörigen Curve liegen. Dass jene Auslegung der beiden imaginären Wurzeln auf zwei einzelne der unzähligen Lösungen des allgemeiner aufgefassten Problemes hindeutet, beruht auf der besondern Beschaffenheit der Gleichung (3). Nämlich setzt man in dieser Gleichung $y=0$, so zerfällt sie in die beiden Gleichungen (1) und (2) des zweiten Grades; setzt man darin $x=\frac{1}{2}a$, so giebt sich $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, wodurch jene beiden gleichseitigen Dreiecke in symmetrischer Lage entstehen.

Versucht man demnach bei der Anwendung des Calculs den imaginären Ausdrücken, auf die man bei der Lösung eines Problemes geführt wird, eine geometrische Bedeutung zu geben, so muss man sich immer noch auf anderem Wege versichern, ob man, begünstigt durch die specifischen Umstände des Problems, die Wahrheit getroffen hat.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass ich, überzeugt von der Schwierigkeit, über den fraglichen Gegenstand bestimmter zu urtheilen, diesen Aufsatz nicht mit dem Gedanken, etwas Neues zu sagen, sondern mit dem Wunsche veröffentliche, Andere zu befördernden Discussionen zu veranlassen.

VI.

Zur Theorie der Kräftepaare.

Von

Herrn *Essen*,

Lehrer am Gymnasium zu Stargard.

---

1) In Bezug auf die herkömmlichen Definitionen des Kräfte-paars u. s. w. gelten für die vorliegende Abhandlung die nachstehenden Modificationen:

Ich nenne die Verbindungslinie eines beliebigen Punktes in der Richtung der einen Kraft des Paars mit einem ebenfalls beliebig gewählten Punkte in der Richtung der andern einen Arm. Das Product der Kraft des Paars in einen solchen Arm heisse das zu diesem Arm gehörige Moment. Steht der Arm senkrecht auf der Richtung der Kräfte, so soll das zugehörige Moment das rechtwinklige Moment oder das Moment schlechthin heissen. Bildet also die Kraft P des Paars mit irgend einem Arm p den Winkel φ, so ist Pp das zugehörige, $Pp\sin\varphi$ das rechtwinklige Moment. In dem besonderen Falle, dass $\varphi = 0$ oder $= \pi$ wird, also $Pp\sin\varphi = 0$, liegen beide Kräfte in derselben Geraden und heben daher einander auf.

2) Aus der Lehre von den Paaren, wie sie sich bei Poinsot findet, wird Folgendes vorausgesetzt:

I. Zwei Paare in derselben oder in parallelen Ebenen sind gleichgeltend, wenn sie gleiches (rechtwinkliges) Moment und gleichen Sinn haben.

II. Beliebig viele Paare in derselben oder in parallelen Ebenen sind einem einzigen gleichgeltend, dessen Ebene den Ebenen der gegebenen Paare parallel ist, und dessen Moment gleich ist dem Ueberschuss der Momentensumme aller der Paare, welche in dem einen Sinne wirken, über die Momentensumme derjenigen welche den entgegengesetzten Sinn haben.

III. Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen stehen im Gleichgewicht, wenn die Momentensumme der rechtsdrehenden derjenigen der linksdrehenden gleich ist.

3) Aus No. I. des vorigen Paragraphen folgt sogleich: Statt irgend eines Paares kann man ein anderes anbringen, dessen Kräfte denen des ersteren parallel sind, indem man diesen Kräften eine solche Grösse und Lage giebt, dass bei parallelen oder in dieselbe Gerade fallenden Armen das zugehörige Moment des einen Paares dem des anderen gleich wird und beide Paare gleichen Sinn haben.

Weiter ergiebt sich: Jede Anzahl von Paaren, deren Arme parallel sind oder in dieselbe Gerade fallen, können in eins verwandelt werden, indem man zuerst alle Paare so verlegt und verändert, dass sie an einem und demselben Arme wirken, und sodann alle durch denselben Punkt gehende Kräfte in eine Resultante vereinigt. Am bequemsten wird es sein, die Länge des gemeinsamen Armes gleich Eins zu nehmen.

4) Sind zwei Paare gegeben und die Kräfte des einen denen des andern parallel, so lassen sich dieselben durch eine sehr einfache Construction in ein resultirendes Paar zusammensetzen. Man zieht zu jedem Paar einen b e l i e b i g e n A r m, verlegt sodann eine dieser Paare nach 3) so, dass die beiden Arme in A mit Endpunkten zusammenstossen, deren Kräfte nach derselben Richtung hin wirken, und trägt von A aus auf jeden Arm das zugehörige Moment auf. Sind AB und AC die erhaltenen Längen, so ergänze man zum Parallelogramm und ziehe die Diagonale AD. Man kann der Arm des resultirenden Paares beliebig auf der Geraden AD oder ihr parallel gewählt werden; die Kräfte desselben müssen den gegebenen Kräften parallel sein und eine solche Grösse haben, dass das Moment, welches zum gewählten Arm gehört, gleich AD wird. Dabei wird diejenige Kraft, welche in Bezug auf den Arm auf derselben Seite liegt, wie der Punkt A in Rücksicht auf die Diagonale, mit den Kräften an A nach derselben Seite hin wirken müssen.

B e w e i s. Denn man kann mittelst Anwendung von 3) das an AB wirkende Paar, nachdem man die Kräfte beider Paare gleich Eins gemacht hat, an den Arm CD verlegen. Dadurch kommen nach C zwei gleiche, entgegengesetzte Kräfte, die einander aufheben. Somit bleibt ein einziges Paar, dessen Arm und zugehöriges Moment die Diagonale AD darstellt. Sind die Kräfte eines der gegebenen Paare denen des andern schon gleich, so kann man sogleich, ohne dass man die Kräfte gleich Eins macht,

aus beliebigen Armen ein Parallelogramm construiren. Die Kräfte des resultirenden Paares müssen dann, wenn sie an den Endpunkten der Diagonale angebracht werden, den gegebenen Kräften gleich sein.

5) Umgekehrt: Ist ein Paar gegeben, AD ein Arm desselben und $ABDC$ ein Parallelogramm, so wird Nichts geändert, wenn man jede der gegebenen Kräfte zweimal setzt, dann aber die beiden in D angreifenden Kräfte, ohne ihre Richtung zu ändern, an die Punkte B und C vertheilt.

6) Sind drei Paare gegeben, deren Kräfte sämmtlich parallel sind und deren Arme so in die Kanten eines Körperwinkels gelegt sind, dass am Scheitel desselben alle Kräfte nach derselben Seite wirken, so kann man, um ein resultirendes Paar zu erhalten, auf jene Kanten die Momente der bezüglichen Paare, welche zu den gegebenen Armen gehören, auftragen und aus den aufgetragenen Längen ein Parallelepipedum construiren. Wird nämlich ein beliebiger Arm parallel mit der Diagonale desselben genommen, so bestimmt diese Diagonale das zugehörige Moment des resultirenden Paars. Die Construction vereinfacht sich auch hier wieder, wenn die drei componirenden Paare mit gleichen Kräften gegeben sind.

7) Ist umgekehrt ein Paar am Arm AE gegeben und sind AB, AC, AD die Kanten eines Parallelepipedums, welches AE zur Diagonale hat, so wird Nichts geändert, wenn man jede der gegebenen Kräfte dreimal setzt, sodann aber die drei gleichen Kräfte in E an die Punkte B, C und D vertheilt.

8) Ist eine Kraft P am Angriffspunkte A gegeben, so kann man offenbar, ohne etwas zu ändern, diese Kraft sich selbst parallel nach einem beliebigen Punkte B verlegen, wenn man dazu noch die gegebene Kraft wiederum herstellt und sie durch eine andere, in B angreifende zu einem Paare ergänzt.

9) Sind irgend welche Kräfte an einem festen System gegeben, die sich um bestimmte Angriffspunkte willkürlich drehen lassen, dabei aber der Bedingung unterworfen sind, immer dieselbe Stellung gegen einander zu behalten, so lässt sich diese Bedingung noch auf folgende, anschaulichere Weise hinstellen:

Man führt ausser einem Systeme im Körper fester Axen OX, OY, OZ noch ein zweites Axensystem OX_1, OY_1, OZ_1 ein, welches beliebig um O drehbar ist, ohne dass jedoch die Neigung dieser Axen gegen einander verändert werden darf. Alsdann setzt man fest, dass, wenn eine Kraft zu Anfang mit OX_1, OY_1, OZ_1

bezüglich die Winkel α, β, γ bildet, diese Kraft sich bei jeglicher Verstellung dieses Axensystems zugleich so um ihren Angriffspunkt drehen solle, dass die genannten Winkel unveränderlich dieselben bleiben.

Nun lässt sich jede Kraft P an ihrem Angriffspunkt M, dessen auf die im Körper festen Axen bezogenen Koordinaten wir durch x, y, z bezeichnen, in drei Komponenten, bezüglich parallel mit OX_1, OY_1, OZ_1 zerlegen, die der Reihe nach durch X, Y, Z bezeichnet werden sollen. Sodann kann man zuerst die Komponente X nach O verlegen, indem man am Arm OM ein Paar mit dem dazu gehörigen Moment $X.OM$ hinzutreten lässt. Dieses Paar lässt sich nach 7) in drei Paare zerlegen, deren Arme OA, OB, OC bezüglich auf OX, OY, OZ liegen und Kanten eines Parallelepipedums sind, welches OM zur Diagonale hat. Dabei werden die Maasszahlen dieser Arme, abgesehen vom Vorzeichen, den Koordinatenwerthen x, y, z entsprechen. Setzt man nun fest:

I. dass beispielsweise die Komponente X positiv oder negativ genommen werden soll, jenachdem sie nach der Seite OX_1 oder nach der entgegengesetzten Seite wirkt;

II. dass einem Paare, wenn sowohl sein Arm OA, als auch die an A wirkende Kraft X nach der positiven Seite bezüglich von OX und OX_1 liegen, oder wenn es gleichen Sinn mit einem solchen Paare hat, ein positives, sonst aber ein negatives Moment zukommen solle;

so wird man finden, dass alsdann das Moment sowohl mit X als mit x jedesmal zugleich sein Zeichen wechsele. Die bezüglichen Momente der drei in Rede stehenden Paare sind daher in jedem Falle der Reihe nach

$$Xx, \quad Xy, \quad Xz.$$

Ebenso giebt die Komponente Y in M zuerst eine Kraft Y in O und sodann drei Paare mit den Momenten

$$Yx, \quad Yy, \quad Yz.$$

Endlich erhält man aus der Komponente Z eine Kraft Z in O und drei Paare mit den bezüglichen Momenten

$$Zx, \quad Zy, \quad Zz.$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit allen gegebenen Kräften, so hat man, wenn man in O alle Kräfte gleicher Richtung zusammenfasst, daselbst die drei Kräfte

$$\Sigma X,\ \Sigma Y,\ \Sigma Z;$$

und wenn man alle Paare, deren Kräfte parallel sind und deren Arme zugleich auf einer und derselben Axe liegen, nach 3), vereinigt, nachdem man vorher allen den Arm Eins gegeben hat, so erhält man neun Paare mit den bezüglichen Momenten:

$$\Sigma Xx,\ \Sigma Xy,\ \Sigma Xz;$$
$$\Sigma Yx,\ \Sigma Yy,\ \Sigma Yz;$$
$$\Sigma Zx,\ \Sigma Zy,\ \Sigma Zz.$$

Es ist aber offenbar Gleichgewicht vorhanden, wenn alle so eben aufgeführte Summen sammt den drei vorhergehenden ΣX, ΣY, ΣZ der Null gleich sind; und da diese Ausdrücke in Nichts sich ändern, wie man auch das Axensystem OX_1, OY_1, OZ_1 gegen das im Körper feste Axensystem stellen mag, so findet Gleichgewicht bei jeder Stellung desselben statt. Dass nun aber die ausgesprochene Bedingung nothwendig erfüllt sein muss, damit Gleichgewicht bei jeder Stellung vorhanden sei, geht aus folgender Betrachtung hervor:

Man verwandele je drei Paare, deren Arme auf derselben Axe liegen, wie z. B. diejenigen, deren Momente bezüglich ΣXx, ΣYx, ΣZx sind, nach 3) in ein einziges. Existiren nun alle drei möglichen resultirenden Paare, so kann es geschehen,

I. dass die Kräfte aller drei resultirenden Paare einander parallel sind, in welchem Falle sich dieselben nach 6) wiederum in ein einziges Paar zusammensetzen lassen. Nennen wir nun OR den Arm dieses letzten resultirenden Paares, und denken wir den Punkt O des festen Systemes auf unveränderliche Weise befestigt, so werden alle Kräfte unwirksam bis auf die in R angreifende Kraft. Diese aber wird nur in dem einen Ausnahmsfalle vernichtet, dass sie in die Gerade OR fällt.

II. Ferner kann es sich ereignen, dass die Kräfte der drei resultirenden Paare zwar nicht unter einander, aber doch sämmtlich einer mit dem Axensysteme OX_1, OY_1, OZ_1 fest verbundenen Ebene parallel sind. Dann kann man in dieser Ebene zwei neue Axen OU und OV annehmen, die ihre Stellung gegen die genannten Axen niemals verändern dürfen, und darauf die Kräfte der drei Paare nach diesen neuen Axen zerlegen. Dadurch erhält man sechs Paare, von denen sich je drei nach 6) in eins verwandeln lassen. Somit sind also nur noch zwei Paare vorhanden, deren Kräfte nicht parallel sein werden. Sind nun OR und OS die Arme dieser beiden Paare, so wird, wenn man sich die

Punkte O und R fest denkt, die in S angreifende Kraft nur dann vernichtet, wenn sie ausnahmsweise in die Ebene ROS fällt; sonst wird sie das System um OR drehen.

III. Finden aber weder die Voraussetzungen von No. I. noch die von No. II. statt, so denke man sich die im Körper feste Axe OX unbeweglich und das Axensystem OX_1, OY_1, OZ_1 so gestellt, dass die Kraft des an OY wirkenden Paars in die Ebene XY fällt. Dann wird, da alle übrigen Kräfte unwirksam geworden sind und also keinen Widerstand entgegensetzen können, die an OZ wirkende Kraft das System um OX drehen, wenn sie nicht, was sich immer vermeiden lässt, in der Ebene XZ oder auf der Geraden OZ liegen sollte.

Demnach wird das Gleichgewicht auch dann nicht für jede Stellung der Kräfte vorhanden sein können, wenn man sich den Körper ganz frei denkt.

Eben so wenig wird dies der Fall sein, wenn von den drei möglichen resultirenden Paaren bezüglich an OX, OY, OZ bloss zwei oder endlich bloss ein einziges existiren sollte, wie dies sogleich aus Nr. I. und Nr. II. des vorhergehenden Falles einleuchtet. Damit aber keins dieser Paare vorhanden sei, dürfen keine Komponenten dazu existiren; man muss also haben:

$$\Sigma Xx = \Sigma Xy = \Sigma Xz$$
$$= \Sigma Yx = \Sigma Yy = \Sigma Yz$$
$$= \Sigma Zx = \Sigma Zy = \Sigma Zz = 0.$$

Dass aber auch keine der Kräfte ΣX, ΣY, ΣZ existiren darf, geht daraus hervor, dass man sonst immer eine Resultante aus ihnen zusammensetzen könnte, die durch Nichts aufgehoben würde.

Sind alle gegebenen Kräfte parallel, so gestaltet sich die Sache viel einfacher. Man verlegt sodann ohne Weiteres jede Kraft P nach O und zerlegt das hinzutretende Paar am Arm OM in drei Paare

$$Px, \quad Py, \quad Pz.$$

Dann sind zum Gleichgewicht bei jeder Stellung der Kräfte offenbar nothwendig und hinreichend die Gleichungen

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0, \quad \Sigma Pz = 0;$$

wobei zu beachten ist, dass man die Maasszahlen der Kräfte positiv oder negativ zu nehmen hat, jenachdem sie nach der einen,

vorher nach Willkür gewählten Seite oder nach der entgegengesetzten wirken.

10) Jetzt sollen die Bedingungen ausgemittelt werden, welche erfüllt sein müssen, damit die Kräfte nur für gewisse Stellungen, nicht mehr für jede mögliche, im Gleichgewicht seien.

Wir denken uns beide Axensysteme rechtwinklig und wollen jetzt diejenigen Stellungen des einen gegen das andere ins Auge fassen, welche möglich sind, wenn OZ und OZ_1 zusammenfallen. In allen diesen Stellungen verschwindet zunächst das Paar ΣZz, weil seine Kräfte in die Richtung seines Armes fallen; ferner bleiben vier Paare, nämlich

$$\Sigma Xx,\ \Sigma Xy,\ \Sigma Yx,\ \Sigma Yy$$

beständig in der Ebene XY, und lassen sich daher nach 2) II. in ein einziges verwandeln, dessen rechtwinkliges Moment sein wird:

$$\pm[\Sigma(Xy - xY)\cos\psi - \Sigma(Xx + Yy)\sin\psi],$$

indem man durch ψ den veränderlichen Winkel X_1OX bezeichnet.

Dazu kommen noch vier Paare, deren Momente der Reihe nach sind

$$\Sigma Xz,\ \Sigma Yz,\ \Sigma Zx,\ \Sigma Zy.$$

Nun lässt sich nach Anleitung von 9) leicht beweisen, dass nicht bei jeder unter gegenwärtiger Beschränkung möglichen Stellung Gleichgewicht vorhanden sein kann, wenn nicht die bezüglichen Momente aller fünf Paare einzeln gleich Null sind. Die Gleichung

$$\Sigma(Xy - xY)\cos\psi - \Sigma(Xx + Yy)\sin\psi$$

zerfällt aber sogleich wegen der Veränderlichkeit des Winkels ψ in die beiden folgenden:

$$\Sigma(Xy - Yx) = 0,\quad \Sigma(Xx + Yy) = 0.$$

Sodann müssen aber ausser den Gleichungen

$$\Sigma Xz = \Sigma Yz = \Sigma Zx = \Sigma Zy = 0,$$

wie man leicht sieht, die folgenden erfüllt sein:

$$\Sigma X = ZY = \Sigma Z = 0.$$

11) Jetzt bleibt noch übrig, die Bedingungen des Gleichgewichts für eine einzige, ganz bestimmte Stellung auszumitteln. Am besten thut man alsdann, die Axen OX_1, OY_1, OZ_1 bezüg-

sich mit OX, OY, OZ zusammenzulegen, während diese jede beliebige Neigung zu einander haben können. Jetzt verschwinden aber von den neun Paarmomenten in 9) an und für sich drei, nämlich

$$\Sigma Xx,\quad \Sigma Yy,\quad \Sigma Zz,$$

weil die Kräfte dieser Paare in die Richtung ihres Armes fallen. Von den übrigen sechs Paaren fallen je zwei in eine Ebene und können daher nach 3) in ein einziges zusammengefasst werden. Die rechtwinkligen Momente der drei resultirenden Paare werden dann der Reihe nach sein:

$\pm\sin(XOY).\Sigma(yX-xY)$ in der Ebene XY,

$\pm\sin(XOZ)\Sigma(xZ-zX)$ „ „ „ XZ,

$\pm\sin(YOZ)\Sigma(zY-yZ)$ „ „ „ YZ.

Dazu kommen dann in O die drei Kräfte

$$\Sigma X,\quad \Sigma Y,\quad \Sigma Z.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, jedes einzelne der drei vorstehenden Momente und jede einzelne der genannten drei Kräfte gleich Null sein müsse. Denn wäre z. B. das Moment $\pm\sin XOY.(yX-xY)$ nicht gleich Null, so würden, wenn man sich die Axe OZ fest dächte, alle übrigen Kräfte vernichtet bis auf das Paar, dem das genannte Moment zukommt. Dieses Paar aber würde das System um die Axe OZ drehen, folglich könnte nicht Gleichgewicht sein. Zur Begründung des Gleichgewichts sind also nothwendig und hinreichend die Gleichungen

$$\Sigma X=\Sigma Y=\Sigma Z=0,$$

$$\Sigma(yX-xY)=\Sigma(xZ-zX)=\Sigma(zY-yZ)=0.$$

VIII.

Neue Grundlegung zu einer räumlichen Flächenvergleichung.

Von
Herrn *Essen*,
Lehrer am Gymnasium zu Stargard.

---

§. 1. Ergänzungen im Parallelogramm sind flächengleich.

§. 2. Umgekehrt: Ist ein Parallelogramm durch zwei sich schneidende Linien in vier Parallelogramme getheilt, von denen irgend zwei gegenüberstehende gleiche Flächen haben, so liegt der Durchschnittspunkt jener Linien auf derjenigen Diagonale des gegebenen Parallelogramms, welche durch das zweite Paar gegenüberstehender Theilparallelogramme geht.

Beweis ist leicht indirect zu führen.

§. 3. Sind ABC und abc zwei rechtwinklige Dreiecke und ausser den rechten Winkeln C und c noch die Winkel A und a gleich, so sind die aus AB und ac einerseits und andrerseits aus ab und AC gebildeten Rechtecke flächengleich.

Der bekannte Beweis folgt sogleich aus Betrachtung von Taf. I. Fig. 3. Hier sind die beiden Dreiecke so in einander gelegt, dass a in A, ab in die Richtung AC, ac in die Richtung AB gefallen ist; sodann sind BC und bc bezüglich um $CD = ab$ und um $cd = AB$ verlängert, die Rechtecke $ACDE$ und $Acde$ construirt und endlich die Hülfslinien BE und be gezogen. Man erkennt sogleich die Congruenz der Dreiecke ABE und Abe.

§. 4. Haben zwei Parallelogramme AD und ad gleiche Flächen, und ist Winkel $A = a$, so ist auch das aus zwei zusammenstossenden Seiten des einen AB und AC gebildete Rechteck dem

Rechteck aus zwei zusammenstossenden Seiten des andern ab und ac in Hinsicht auf die Fläche gleich.

Beweis. Man ziehe in Taf. I. Fig. 4. und Fig. 5. die Höhen CF und cf. Dann ist der Voraussetzung nach

$$1)\quad \text{Rechteck } ab \times cf = \text{Rechteck } AB \times CF;$$

sodann ist nach dem vorigen Satze

$$2)\quad \text{Rechteck } AC \times cf = \text{Rechteck } ac \times CF.$$

Nun seien in Taf. I. Fig. 6. $A'F'$ und $a'f'$ zwei in C' sich rechtwinklig schneidende Linien, und dabei:

$$A'C' = AC, \quad C'F' = CF;$$
$$a'C' = ac, \quad C'f' = cf;$$

so dass also von C' aus jedes Mal zwei Seiten eines und desselben Dreiecks auf dieselbe Gerade aufgetragen sind. Construirt man nun das Rechteck $JKML$ so, dass seine Seiten bezüglich mit $A'F'$ und $a'f'$ parallel werden, so muss wegen der in der Gleichung 2) ausgesprochenen Gleichheit der Rechtecke $A'f'$ und $a'F'$ die Diagonale JM nach §. 2. durch C' gehen. Macht man nun noch

$$F'B' = AB,$$
$$f'b' = ab,$$

so dass also in F' und f' Grundlinie und Höhe zuerst des einen und sodann des andern der gegebenen Parallelogramme zusammenstossen; so wird die Diagonale MN des Parallelogramms $b'MB'N$ ebenfalls durch C' gehen. Es fallen daher die beiden Diagonalen MJ und MN zusammen. Nun aber sind die Rechtecke $a'N$ und $A'N$ gleich, als Ergänzungen im Parallelogramm; folglich ist auch

$$\text{Rechteck } NC' + \text{Rechteck } a'N = \text{Rechteck } NC' + \text{Rechteck } A'N,$$

was zu beweisen war.

§. 5. Es seien die Winkel des Dreiecks ABC denen des Dreiecks $A'B'C'$ bezüglich gleich, so ist Rechteck $AC \times B'C' =$ Rechteck $A'C' \times BC$.

Beweis. Es seien die beiden gegebenen Dreiecke so neben einander gelegt, wie es Taf. I. Fig. 7. zeigt, so dass der Punkt A' in B liegt und $A'B'$ in die Verlängerung von AB fällt. Construirt man nun das Parallelogramm $ADB'E$ so, dass seine Seiten

beziehlich mit BC und $B'C'$ parallel werden, so wird das Parallelogramm ED gleich dem Parallelogramm DE, folglich auch nach dem vorigen Satze

$$\text{Rechteck } AC' \times B'C = \text{Rechteck } AC \times BC.$$

VIII.

Eine Aufgabe aus der Mechanik.

Von
Herrn Dr. Küsters
in Aachen.

Es stelle YV in Taf. I. Fig. 6. eine unbegrenzte, zum Horizont geneigte Gerade dar, und ihre Neigung zum Horizont sei der Winkel $YAX = \varphi$; ferner sei O ein beliebig in der Ebene YAX gewählter Punkt.

Jetzt soll die Relation zwischen den Zeiten aufgestellt werden, in denen ein Körper unter alleinigem Einfluss der Schwere auf geradlinigem Wege von YV nach O und umgekehrt von O nach YV gelangt.

Man ziehe durch O eine Gerade OB parallel zur Horizontalen AX, und es sei der Winkel

$$YBZ = \varphi;$$

dann stelle man die Zeit, in der der Körper von einem beliebigen Punkt der Geraden YV, etwa D, auf dem geradlinigen Wege DO nach O gelangt, als eine Function des Winkels $DOB = \alpha$ dar. Ist nun t die auf dem Wege OD verbrachte Zeit und bedeutet g das Maass der Acceleration beim freien Fall, so erhält man für die Länge des Weges OD:

$$OD = \tfrac{1}{2}gt^2 \sin\alpha$$

Nimmt man ferner die constante Länge $OB = o$ an, so findet man für OD den zweiten Ausdruck:

$$OD = \frac{o \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Demnach ergibt sich zwischen den Variabeln t und α die Gleichung:

$$t^2 g \sin \alpha = \frac{o \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Bevor wir diese Gleichung weiter betrachten, wollen wir den in der kürzesten Zeit zurückgelegten geradlinigen Weg von YV nach O finden; zu diesem Zwecke hat man den Werth von α zu bestimmen, für den t ein Minimum sein wird.

Differenzirt man zu diesem Zwecke obige Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha} = \frac{o \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) - t^2 g \cos \alpha \sin^2(\varphi - \alpha)}{2tg \sin \alpha \sin^2(\varphi - \alpha)}.$$

Setzt man dieses erste Differenzialverhältniss $= 0$, so erhält man:

$$o \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) - t^2 g \cos \alpha \sin^2(\varphi - \alpha) = 0.$$

Da aber $t^2 g = \frac{o \sin \varphi}{\sin \alpha \sin(\varphi - \alpha)}$ ist, so findet sich:

$$\sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) = \frac{\sin \varphi \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha}$$

oder

$$\sin(2\alpha - \varphi) = 0.$$

Also ist:

$$\alpha = \frac{\varphi}{2}.$$

Demnach würde der kürzeste geradlinige Weg von YV nach O derjenige sein, der zum Horizont eine halb so grosse Neigung hat, als die Linie YV selbst.

Macht man also $BD = BO$, so ist DO der in der kürzesten Zeit zurückgelegte Weg von YV nach O.

In ähnlicher Weise findet man den Weg OC, auf dem der Körper in der kürzesten Zeit von O zurück nach YV gelangt; es muss für ihn $OB = BC$ sein.

Betrachten wir jetzt weiter die obige Gleichung:

$$t^2 g \sin\alpha = \frac{o \sin\varphi}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

und drücken wir die Function t von dem Winkel α geometrisch aus, indem t und α als Spiralcoordinaten betrachtet werden, so haben wir in obiger Gleichung die Gleichung einer krummen Linie.

Die Länge o werde ausgedrückt durch die oben näher betrachtete kürzeste Fallzeit a von YV nach O auf der Geraden OD. Es ist:

$$o = \frac{OD.\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi},$$

und da:

$$OD = a^2 g \sin\frac{\varphi}{2},$$

so ist:

$$o = \frac{a^2 g \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}.$$

Darnach ergibt sich also die Gleichung der Linie:

$$t^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man:

1) dass für $\alpha = 0$ sowohl als für $\alpha = \varphi$ $t = \frac{1}{0}$ ist, d. h. für die unter dem Winkel φ zum Horizont geneigte, so wie für die horizontale Verbindung zwischen O und YV werden die Leitstrahlen OX und OV (Taf. I. Fig. 9.) Asymptoten der Linie.

Drückt man jetzt die Polarcoordinaten durch Parallelcoordinaten aus, so ist für das rechtwinklige System XOY:

$$y = t \sin\alpha,$$

$$x = t \cos\alpha;$$

und wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man:

2) $$y^2 - xy \operatorname{tang}\varphi + \frac{a^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = 0.$$

Bezieht man ferner die Linie auf ein rechtwinkeliges System X_1OY_1, dessen Abscissenachse mit OX den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ bildet und dessen Anfangspunkt ebenfalls O ist, so erhält man, wenn man für x und y die Werthe

$$y = y_1 \cos\frac{\varphi}{2} + x_1 \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$x = x_1 \cos\frac{\varphi}{2} - y_1 \sin\frac{\varphi}{2}$$

in der Gleichung 2) substituirt und zugleich die Indices fortlä...

$$y^2\cos\frac{\varphi}{2} + 2xy\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + x^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - xy\cos^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\varphi$$

$$-x^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\varphi + y^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\varphi + xy\sin^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tang}\varphi$$

$$+\frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich zunächst in:

$$y^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}\right) + x^2\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}\right) + \frac{a^2\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = 0,$$

und gibt bei gehöriger Reduction:

$$\frac{y^2}{a^2\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{x^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Die Linie ist also eine Hyperbel, deren Halbachsen a und $a\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ sind, oder in der Figur AO und AB.

Zur Aufstellung der Asymptotengleichung würde man in der Gleichung mit Spiralcoordinaten

$$y\sin\varphi = t\sin\alpha$$

und

$$x\sin\varphi = t\sin(\varphi - \alpha)$$

substituiren. Dann verwandelt sich die Gleichung in

$$xy = \frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}$$

oder, wenn man [illegible] setzt:

$$[illegible]$$

Dieses ist die Asymptotengleichung der Hyperbel, deren Achsen [illegible] sind.

Könnten wir nur für die Zahlen [illegible] an die unter dem Winkel [illegible] geneigten [illegible] die Hyperbel [illegible] haben, [illegible] wenn man die Zahlen [illegible] von [illegible] nach VV [illegible] Winkel [illegible] mit [illegible].

$$[illegible] = [illegible] \cos\frac{\pi}{4}$$

wo t die kürzeste Fallzeit von O nach VV ist.

Bezeichnen wir noch diese Linie, sowie die erste, [illegible], so erhalten wir:

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} = \left(\frac{[illegible]}{[illegible]\cos\frac{\pi}{4}}\right)^2,$$

wo dann t_1 und $t_2 \cos\frac{\pi}{4}$ die Fallzeiten sind. In der Figur $OA = t_1$ und $AB = t_2 \cos\frac{\pi}{4}$.

Vergleichungshalber will ich jetzt noch geometrische Construction folgender Aufgabe lösen: Den geradlinigen Weg zu finden, auf dem ein Körper in der kürzesten Zeit von einer zum Horizont geneigten Geraden nach einem beliebigen Punkte im Raume und dann von diesem zurück zur Geraden gelangt.

Ist Taf. I. Fig. 2. VV die Gerade und O der gegebene Punkt, so ziehe man durch O und VV eine gerade Linie OB parallel zum Horizont, mache $BD = OB$ und $BC = OB$, ziehe OD und OC, so sind dieses die beiden gesuchten Wege.

Beim Beweise der allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe wird man füglich die zwei Fälle unterscheiden:

1) wenn der Punkt O in der Ebene des Neigungswinkels der Geraden VV zum Horizont liegt;

2) wenn dieses nicht der Fall ist.

Nehmen wir zuerst an, dass die Gerade YV zum Horizont die Neigung $XAY=\varphi$ habe und dass der Punkt O in der Ebene des Winkels XAY liege. Man ziehe dann durch O die Gerade L senkrecht auf die Horizontale AX und beschreibe zwei Kreise M und N, deren Mittelpunkte in L liegen und welche durch O gehen und YV berühren. Die so beschriebenen Kreise werden YV in C und D berühren, und die Berührungssehnen

$$OD \text{ und } OC$$

sind die zwei geradlinigen Wege, die in der kürzesten Zeit von YV nach O und von O nach YV führen, und zwar sind diese kürzesten Zeiten bekanntlich gleich den Zeiten, in den die vertikalen Durchmesser der beiden Kreise M und N beim freien Falle durchlaufen werden.

Nimmt man dagegen an, dass der Punkt O nicht in der Ebene des Winkels XAY liegt, so ziehe man durch O die Vertikale L zum Horizont und beschreibe die zwei Kugeln M und N, deren Mittelpunkte in L liegen und welche durch O gehen und die Gerade YV berühren. Diese Kugeln werden nun aber YV in D und C berühren, und die Sehnen

$$OD \text{ und } OC$$

geben auch hier die zwei geradlinigen Wege, die in der kürzesten Zeit von YV nach O und von O nach YV führen, und zwar sind diese kürzesten Zeiten gleich den Zeiten, in welchen die vertikalen Durchmesser der Kugeln M und N beim freien Falle zurückgelegt werden.

IX.

Ueber die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer beliebigen Fläche und über die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Die Aufgabe von der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten auf einer beliebigen Fläche gehört bekanntlich in das Gebiet der Variationsrechnung und hat die Geometer vielfach beschäftigt. Die Auflösung dieser Aufgabe durch die Variationsrechnung unterliegt keiner Schwierigkeit und kann in meiner Sphäroidischen Trigonometrie. Berlin. 1833. 4. S. 11. nachgesehen werden. Es hat mir aber immer lehrreich und interessant geschienen, solche eigentlich in die Variationsrechnung gehörende Aufgaben auch ohne die Variationsrechnung, bloss durch die gewöhnliche Lehre vom Grössten und Kleinsten, wie dieselbe in der Differentialrechnung vorgetragen wird, zu lösen *), weil man dadurch öfters auf neue nicht uninteressante Aufgaben über die Maxima und Minima geführt wird, und weil solche Auflösungen für Anfänger mir die beste Vorbereitung auf das Studium der eigentlichen Variationsrechnung zu sein scheinen. Hierzu kommt im vorliegenden Falle noch, dass die kürzeste Linie eine sehr grosse praktische Wichtigkeit für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist, weil sie einerlei ist mit der Curve, welche auf einer krummen Fläche durch geodätische Operationen gezogen wird und deshalb auch den Namen der geodätischen Curve führt. Bei Vorlesungen über höhere

*) M. s. auch meine Auflösung der Aufgabe von der Brachystochrone ohne die Variationsrechnung im Archiv, Thl. VII., S. 308. Eine ähnliche Auflösung der Aufgabe von dem Körper des kleinsten Widerstandes werde ich in einem der folgenden Hefte mittheilen.

Geodäsie wird man nun zwar immer die beiden ersten Theile der sogenannten höheren Analysis, nämlich die Differential- und Integralrechnung, vorauszusetzen berechtigt und genöthigt sein; ob man aber bei allen Zuhörern in solchen Vorlesungen auch eine hinreichende Bekanntschaft mit dem dritten Theile, nämlich mit der Variationsrechnung, wird voraussetzen können, lasse ich dahin gestellt sein, bemerke aber, dass ich durch die Erfahrung öfters von dem Gegentheil überzeugt worden bin, und glaube daher, Lehrern der höheren Geodäsie auf Universitäten und polytechnischen Lehranstalten, militairischen Akademieen u. s. w. einen Dienst zu erweisen, wenn ich im Folgenden eine Auflösung der Aufgabe von der kürzesten Linie ohne die Variationsrechnung mittheile und zugleich die Uebereinstimmung dieser Curve mit der geodätischen Linie nachweise, indem ich zugleich diese von mir gefundene und zunächst im Interesse meiner eignen Vorlesungen über höhere Geodäsie entwickelte Auflösung auch in allgemein mathematischer Beziehung für so lehrreich und interessant halte, dass sie auch deshalb die Mittheilung an diesem Orte wohl verdienen mag.

§. 2.

Bei allen solchen eigentlich in das Gebiet der Variationsrechnung gehörenden Aufgaben, die man ohne diese Wissenschaft bloss mittelst der gewöhnlichen Lehre von dem Grössten und Kleinsten aufzulösen beabsichtigt, muss man von einem in diese Lehre gehörenden Problem ausgehen, welches dann eine möglichst leichte und unmittelbare Anwendung des von uns nachher genau anzugebenden allgemeinen Princips gestattet, auf das eigentlich die Auflösung aller solcher Aufgaben der Variationsrechnung zu gründen ist. Wir werden hier von der folgenden Aufgabe unseren Auslauf nehmen:

Aufgabe.

Wenn zwei Punkte im Raume und eine beliebige Fläche gegeben sind: auf dieser Fläche einen Punkt zu finden, welcher von den beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist und ausserdem eine solche Lage hat, dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden gegebenen Punkten kleiner ist als die Summe der Entfernungen jedes anderen Punktes auf der Fläche von den beiden gegebenen Punkten, welcher von diesen beiden Punkten gleich weit entfernt ist.

Auflösung.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem seien a, b, c und a_1, b_1, c_1 die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte im Raume, und

$$1)\quad u=f(x, y, z)=0$$

sei die Gleichung der gegebenen Fläche. Die Coordinaten des gesuchten Punktes wollen wir der Einfachheit wegen durch x, y, z selbst bezeichnen. Dann sind bekanntlich

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} \text{ und } \sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}$$

die Entfernungen des gesuchten Punktes (xyz) von den beiden gegebenen Punkten (abc) und $(a_1b_1c_1)$; und da nun der gesuchte Punkt auf der gegebenen Fläche liegen und von den beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt sein soll, so erhalten wir zwischen den Coordinaten x, y, z die zwei folgenden Bedingungsgleichungen:

$$u=f(x, y, z)=0,$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2};$$

oder

$$u=f(x, y, z)=0,$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2;$$

oder

$$u=f(x, y, z)=0,$$

$$a^2+b^2+c^2-(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)-2(a-a_1)x-2(b-b_1)y-2(c-c_1)z=0.$$

Wegen dieser beiden Bedingungsgleichungen ist nur die eine der drei veränderlichen Grössen x, y, z, etwa die Grösse x, unabhängig variabel, und die beiden anderen, y und z, sind als Functionen dieser Grösse, nämlich der Grösse x, aufzufassen.

Ferner geben uns die Bedingungen der Aufgabe die folgende Gleichung:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}=\text{Min.},$$

d. h. wegen der zweiten der beiden vorhergehenden Bedingungsgleichungen:

$$2\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\text{Min.},$$

oder, was offenbar Dasselbe ist:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\text{Min.},$$

welches nach den Regeln der Differentialrechnung auf der Stelle zu der Bedingungsgleichung:

$$\frac{x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=0,$$

also zu der Bedingungsgleichung

$$x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

führt.

Die beiden ersten Bedingungsgleichungen führen nun, indem

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

natürlich partielle Differentialquotienten bezeichnen *), unmittelbar zu den beiden folgenden Gleichungen:

---

*) Man hat in neuester Zeit hin und wieder angefangen und in Vorschlag gebracht, gewöhnliche Differentiale durch d, partielle Differentiale durch ∂ zu bezeichnen. Vor einem solchen Usus ist aber nach unserer Ueberzeugung zu warnen, weil wir diese Bezeichnung weder für bequem, noch für nöthig halten können, und zwar aus folgenden Gründen. Zuvörderst bei Differentialquotienten ist die vorgeschlagene Unterscheidung ganz unnütz und völlig überflüssig, weil hier die Grösse, nach welcher differentiirt werden soll, schon unter dem Strich steht, und bei Functionen mehrerer Variabeln es sich ein für alle Mal schon ganz von selbst versteht, dass der Differentialquotient nur ein partieller sein kann. Ist u eine Function nur von x, so ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ der gewöhnliche Differentialquotient von u nach x; ist u von mehreren Variabeln abhängig, so kann $\frac{\partial u}{\partial x}$ nur der partielle Differentialquotient von u nach x sein; wozu soll es also helfen, im ersten Falle $\frac{du}{dx}$, im zweiten Falle $\frac{\partial u}{\partial x}$ zu schreiben?? Bei Differentialen ferner, wo eine unterscheidende Bezeichnung gerade besonders wünschenswerth sein dürfte, sagt weder ∂u noch du aus, nach welcher Variabeln die Function mehrerer veränderlichen Grössen u differentiirt werden soll, so dass man also in diesem Falle doch, wie z. B. Cauchy thut, wenn u etwa nach x differentiirt werden soll, $\partial_x u$ oder meinetwegen auch $d_x u$ schreiben muss. Die Gleichung

$$a-a_1+(b-b_1)\frac{\partial y}{\partial x}+(c-c_1)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\partial u=\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u+\ldots.$$

drückt z. B. ganz bestimmt den Satz aus, dass das vollständige Differential ∂u von u der Summe aller partiellen Differentiale von u gleich ist; was soll denn aber

$$\partial u=\partial u+\partial u+\partial u+\ldots.,$$

oder, ich weiss nicht, vielleicht

$$du=\partial u+\partial u+\partial u+\ldots.$$

heissen?? Bedient man sich im vorliegenden Falle der Differentialquotienten, so ist wieder

$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u}{\partial z}\partial z+\ldots.$$

ganz bestimmt und unzweideutig und alles Uebrige ist unnütz, wenn man nicht etwa, um, wie, um consequent zu verfahren, Cauchy thut,

$$\partial u=\frac{\partial_x u}{\partial x}\partial x+\frac{\partial_y u}{\partial y}\partial y+\frac{\partial_z u}{\partial z}\partial z+\ldots.$$

schreiben will. Es scheint daher nach wie vor das Beste zu sein, das sogenannte geschwungene ∂ durchgreifend als allgemeines Differentialzeichen zu benutzen, wobei man noch den Vortheil gewinnt, dass man sich d zu anderem Gebrauch, als Bezeichnung einer Grösse, reservirt; vor der in Rede stehenden Neuerung ist daher nochmals zu warnen, so sehr auch eine möglichst einfache unterscheidende Bezeichnung gewöhnlicher und partieller Differentiale als wünschenswerth erscheinen muss. Bis jetzt ist immer $\partial_x u$ für das partielle Differential nach x und $\frac{\partial_x u}{\partial x}$ für den partiellen Differentialquotienten nach x das Beste, wenn man sich nicht mit dem, was wir oben angegeben haben, begnügen will, was aber, nach unserer Ueberzeugung, in der That auch vollkommen ausreicht. Auch dürfte es gar nicht so leicht sein, sich, wenn man schnell rechnet, immer zu erinnern, wenn man d und wenn man ∂ schreiben soll, und bei'm mündlichen Vortrage ist diese Bezeichnungsart vollends unbequem. Wir haben vorstehende Bemerkungen bei dieser Gelegenheit nicht unterdrücken wollen, weil uns die Sache nicht ohne Wichtigkeit zu sein scheint, lassen übrigens Jedem gerne seine Weise, wenn es freilich auch der Wissenschaft wenig frommen kann, wenn Jeder berufen zu sein glaubt, neue Bezeichnungen einzuführen, die doch, wie die Erfahrung genugsam lehrt, meistens keine allgemeinere Annahme finden.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0;$$

so dass man jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$a-a_1+(b-b_1)\frac{\partial y}{\partial x}+(c-c_1)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

hat, aus denen sich die Differentialquotienten

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial x}$$

vollständig eliminiren lassen. Man erhält nämlich aus den beiden ersten Gleichungen sogleich:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)}{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)}{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)};$$

und führt man dies in die dritte der drei obigen Gleichungen ein, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)\}\frac{\partial u}{\partial x}\\ +\{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)\}\frac{\partial u}{\partial y}\\ +\{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)\}\frac{\partial u}{\partial z}\end{array}\right\}=0.$$

Also hat man jetzt zur Bestimmung von x, y, z die drei folgenden Gleichungen:

2)

$$u=f(x,y,z)=0,$$

$$a^2+b^2+c^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2(a-a_1)x-2(b-b_1)y-2(c-c_1)z=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)\}\frac{\partial u}{\partial x}\\ +\{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)\}\frac{\partial u}{\partial y}\\ +\{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)\}\frac{\partial u}{\partial z}\end{array}\right\}=0.$$

Die zweite dieser drei Gleichungen kann man auch auf eine der beiden folgenden Arten:

$$(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2$$
$$+2(a-a_1)(x-a)+2(b-b_1)(y-b)+2(c-c_1)(z-c)=0$$

oder

$$(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2$$
$$-2(a-a_1)(x-a_1)-2(b-b_1)(y-b_1)-2(c-c_1)(z-c_1)=0$$

schreiben.

Dass man sich die beiden gegebenen Punkte (abc) und $(a_1b_1c_1)$ auch auf der gegebenen Fläche selbst angenommen denken kann, versteht sich von selbst, und wird hier nur deshalb noch besonders hervorgehoben, weil gerade dieser Fall für unsern Hauptzweck in dieser Abhandlung, nämlich die Entwickelung der Gleichungen der kürzesten Linie, von Wichtigkeit ist.

In den drei Gleichungen 2) ist die Auflösung unserer Aufgabe enthalten, und wir werden nachher ein Paar specielle Fälle ausführlicher betrachten, indem wir zuvor noch auf das Resultat der im folgenden Paragraphen angestellten Betrachtungen besonders aufmerksam machen, weil dasselbe für den eigentlichen Zweck, welchen wir in dieser Abhandlung zu erreichen beabsichtigen, von der grössten Wichtigkeit ist.

§. 3.

Durch die drei Punkte (abc), $(a_1b_1c_1)$ und (xyz) wollen wir uns eine Ebene gelegt denken, deren Gleichung, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}+D=0$$

sein mag. Da diese Ebene durch die drei Punkte (abc), $(a_1b_1c_1)$, (xyz) gehen soll, so haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$Aa+Bb+Cc+D=0,$$

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0,$$

$$Ax+By+Cz+D=0;$$

aus denen sich leicht

$$\frac{A}{C}=\frac{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)}{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)},$$

$$\frac{B}{C}=\frac{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)}{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)}$$

ergiebt, so dass wir, wenn f_1 einen gewissen Factor bezeichnet, berechtigt sind,

$$A=f_1\{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)\},$$
$$B=f_1\{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)\},$$
$$C=f_1\{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)\}$$

zu setzen. Nun ist bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0$$

die Gleichung der Berührungsebene der durch die Gleichung $u=0$ gegebenen Fläche in dem Punkte (xyz), und nach der dritten der Gleichungen 2) ist:

$$\left.\begin{array}{l}\{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)\}\frac{\partial u}{\partial x}\\ +\{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)\}\frac{\partial u}{\partial y}\\ +\{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)\}\frac{\partial u}{\partial z}\end{array}\right\}=0,$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{A}{f_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{B}{f_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{C}{f_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

folglich

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

woraus sich nach den Lehren der analytischen Geometrie ergiebt, dass die beiden durch die Gleichungen

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}+D=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirten Ebenen auf einander senkrecht stehen. Dies führt unmittelbar zu dem folgenden

Satz.

Die durch die beiden in der Aufgabe des vorhergehenden Paragraphen gegebenen Punkte (abc) und

$(a_1b_1c_1)$ und den in dieser Aufgabe gesuchten Pu
(xyz) gehende Ebene steht auf der die gegebene, du
die Gleichung $u=f(x, y, z)$ charakterisirte Fläche
dem Punkte (xyz) berührenden Ebene jederzeit se
recht.

Von diesem Satze wird nachher eine sehr wichtige An
dung gemacht werden.

§. 4.

Um nun die Aufgabe in §. 2. auf ein Paar specielle l
anzuwenden, sei zuvörderst die gegebene Fläche ein durch
Gleichung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1$$

charakterisirtes Ellipsoid; so ist

$$u=f(x, y, z)=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2-1,$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{\alpha^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{\beta^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{\gamma^2}.$$

Folglich ist in diesem Falle die dritte der Gleichungen 2):

$$\left.\begin{array}{l}\{(b-b_1)(z-c)-(c-c_1)(y-b)\}\frac{x}{\alpha^2}\\ +\{(c-c_1)(x-a)-(a-a_1)(z-c)\}\frac{y}{\beta^2}\\ +\{(a-a_1)(y-b)-(b-b_1)(x-a)\}\frac{z}{\gamma^2}\end{array}\right\}=0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$\begin{array}{rl}0= & (bc_1-cb_1)\frac{x}{\alpha^2}\\ & +(ca_1-ac_1)\frac{y}{\beta^2}\\ & +(ab_1-ba_1)\frac{z}{\gamma^2}\end{array}$$

$$+(a-a_1)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)yz$$
$$+(b-b_1)\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)zx$$
$$+(c-c_1)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)xy.$$

Also müssen x, y, z aus den drei folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1,$$

$$a^2+b^2+c^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2(a-a_1)x-2(b-b_1)y-2(c-c_1)z=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(bc_1-cb_1)\frac{x}{\alpha^2}+(ca_1-ac_1)\frac{y}{\beta^2}+(ab_1-ba_1)\frac{z}{\gamma^2}\\ \quad+(a-a_1)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)yz\\ \quad+(b-b_1)\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)zx\\ \quad+(c-c_1)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)xy\end{array}\right\}=0.$$

Die allgemeine Auflösung dieser Gleichungen ist etwas weitläufig, weshalb wir jetzt bloss den Fall einer Kugel betrachten wollen, in welchem $\alpha=\beta=\gamma=r$ ist, und die drei aufzulösenden Gleichungen also

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$a^2+b^2+c^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2(a-a_1)x-2(b-b_1)y-2(c-c_1)z=0,$$
$$(bc_1-cb_1)x+(ca_1-ac_1)y+(ab_1-ba_1)z=0$$

sind. Weil es uns aber bloss auf ein Rechnungsexempel ankommt, so wollen wir der Einfachheit wegen noch annehmen, dass die beiden gegebenen Punkte (abc) und $(a_1b_1c_1)$ auf der Oberfläche der gegebenen Kugel liegen. Dann ist offenbar

$$a^2+b^2+c^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2=r^2.$$

und die drei aufzulösenden Gleichungen sind daher:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)z=0,$$
$$(bc_1-cb_1)x+(ca_1-ac_1)y+(ab_1-ba_1)z=0.$$

Mit der Auflösung dieser drei Gleichungen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$y=\frac{(a-a_1)(ab_1-ba_1)-(c-c_1)(bc_1-cb_1)}{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)}x,$$

$$z=\frac{(b-b_1)(bc_1-cb_1)-(a-a_1)(ca_1-ac_1)}{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)}x.$$

Führen wir nun diese Ausdrücke in die erste Gleichung ein und bemerken, dass, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen

$$e=\sqrt{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2}$$

gesetzt wird, wo e die Entfernung der beiden gegebenen Punkte von einander bezeichnet,

$$\begin{aligned}
&\{(a-a_1)(ab_1-ba_1)-(c-c_1)(bc_1-cb_1)\}^2\\
&+\{(b-b_1)(bc_1-cb_1)-(a-a_1)(ca_1-ac_1)\}^2\\
&+\{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)\}^2\\
&=e^2\{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2\}\\
&-\{(a-a_1)(bc_1-cb_1)+(b-b_1)(ca_1-ac_1)+(c-c_1)(ab_1-ba_1)\}^2,
\end{aligned}$$

also, weil sich leicht

$$(a-a_1)(bc_1-cb_1)+(b-b_1)(ca_1-ac_1)+(c-c_1)(ab_1-ba_1)=0$$

ergiebt,

$$\begin{aligned}
&\{(a-a_1)(ab_1-ba_1)-(c-c_1)(bc_1-cb_1)\}^2\\
&+\{(b-b_1)(bc_1-cb_1)-(a-a_1)(ca_1-ac_1)\}^2\\
&+\{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)\}^2\\
&=e^2\{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2\}
\end{aligned}$$

ist; so erhalten wir für x, y, z ohne Schwierigkeit die folgenden Ausdrücke, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$x=\pm\frac{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)}{\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2}}\cdot\frac{r}{e},$$

$$y=\pm\frac{(a-a_1)(ab_1-ba_1)-(c-c_1)(bc_1-cb_1)}{\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2}}\cdot\frac{r}{e},$$

$$z=\pm\frac{(b-b_1)(bc_1-cb_1)-(a-a_1)(ca_1-ac_1)}{\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2}}\cdot\frac{r}{e}.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

$$(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)z=0$$

erhält man durch Differentiation:

$$x+y\frac{\partial y}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$a-a_1+(b-b_1)\frac{\partial y}{\partial x}+(c-c_1)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

und

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$(b-b_1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(c-c_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{(c-c_1)x-(a-a_1)z}{(b-b_1)z-(c-c_1)y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(a-a_1)y-(b-b_1)x}{(b-b_1)z-(c-c_1)y};$$

und aus den zwei letzten Gleichungen erhält man:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{(c-c_1)\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}}{(b-b_1)z-(c-c_1)y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(b-b_1)\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}.$$

Die Grösse, welche ein Minimum werden soll, ist bekannt-, wenn wir dieselbe durch Ω bezeichnen:

$$\Omega=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

woraus sich durch Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=\frac{x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

hieraus ferner, wenn man der Kürze wegen

$$U=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-c)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\}$$
$$-\left\{x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}\right\}\frac{\partial\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}{\partial x}$$

setzt:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}=\frac{U}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Wegen der Gleichung

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=0,$$

d. i. wegen der Gleichung

$$x-a+(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}+(z-c)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

hängt nun das Zeichen von U, und folglich auch von $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$, bloss von dem Zeichen der Grösse

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-c)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

ab, und dieses ist daher nur zu ermitteln. Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-c)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$=\frac{(c-c_1)(y-b)-(b-b_1)(z-c)}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$=\left\{-1+\frac{bc_1-cb_1}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}\right\}\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\},$$

also

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(z-c)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$=\frac{bc_1-cb_1}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\},$$

so dass es folglich nur auf das Zeichen von

$$\frac{bc_1-cb_1}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}$$

ankommt. Nach dem Obigen ist aber, wie man mit Rücksicht auf die schon vorher angewandte Relation

$$(a-a_1)(bc_1-cb_1)+(b-b_1)(ca_1-ac_1)+(c-c_1)(ab_1-ba_1)=0$$

leicht findet:

$$(b-b_1)z-(c-c_1)y$$

$$=\pm\frac{\{(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2\}(bc_1-cb_1)}{\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2}}\cdot\frac{r}{e},$$

also

$$\frac{bc_1-cb_1}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2}}{er}.$$

Daher ist

$$\frac{bc_1-cb_1}{(b-b_1)z-(c-c_1)y}, \text{ und folglich auch } \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2},$$

positiv oder negativ, jenachdem man in den obigen Ausdrücken von x, y, z die oberen oder unteren Zeichen nimmt; und es findet also für die oberen Zeichen ein Minimum, für die unteren dagegen ein Maximum Statt.

Bezeichnet man das Dreieck, dessen Spitzen die Punkte (*c* $(a_1b_1c_1)$ und der Mittelpunkt der Kugel sind, durch $\varDelta$; so ist kanntlich

$$2\varDelta=\sqrt{(ab_1-ba_1)^2+(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2},$$

also

$$x=\pm\frac{(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)}{2\varDelta}\cdot\frac{r}{e},$$

$$y=\pm\frac{(a-a_1)(ab_1-ba_1)-(c-c_1)(bc_1-cb_1)}{2\varDelta}\cdot\frac{r}{e},$$

$$z=\pm\frac{(b-b_1)(bc_1-cb_1)-(a-a_1)(ca_1-ac_1)}{2\varDelta}\cdot\frac{r}{e}.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$(c-c_1)(ca_1-ac_1)-(b-b_1)(ab_1-ba_1)$$
$$=a(b_1{}^2+c_1{}^2)+a_1(b^2+c^2)-a(bb_1+cc_1)-a_1(bb_1+cc_1)$$
$$=a(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)+a_1(a^2+b^2+c^2)-a(aa_1+bb_1+cc_1)-a_1(aa_1+bb_1+$$
$$=(a+a_1)(r^2-aa_1-bb_1-cc_1),$$

und folglich

$$x=\pm(a+a_1)\frac{r(r^2-aa_1-bb_1-cc_1)}{2e\varDelta},$$

$$y=\pm(b+b_1)\frac{r(r^2-aa_1-bb_1-cc_1)}{2e\varDelta},$$

$$z=\pm(c+c_1)\frac{r(r^2-aa_1-bb_1-cc_1)}{2e\varDelta}.$$

Nimmt man die durch den Mittelpunkt der Kugel und die den gegebenen Punkte (abc) und $(a_1b_1c_1)$ bestimmte Ebene Ebene der xy an, ferner den auf der die beiden gegebenen Pu mit einander verbindenden Sehne der Kugel senkrecht stehe Durchmesser derselben als Axe der x; so ist offenbar

$$a=a_1,\quad b+b_1=0,\quad c=c_1=0;$$

also nach dem Obigen:

$$x=\pm a\frac{r(r^2-a^2+b^2)}{e\varDelta},\quad y=0,\quad z=0;$$

und folglich, weil offenbar

$$r^2=a^2+b^2$$

ist:

$$x = \pm \frac{2rab^2}{c\Delta}, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Aber, wenn man, was offenbar verstattet ist, a positiv annimmt, $\Delta = \frac{1}{2}ea$; also

$$x = \pm \frac{4rb^2}{e^2}, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

folglich, weil offenbar $e^2 = 4b^2$ ist:

$$x = \pm r, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Dieses leicht vorauszusehende einfache Resultat wird man ohne Schwierigkeit geometrisch zu deuten verstehen; hier hatten wir nur die Absicht, ein möglichst einfaches Beispiel für die Anwendung unserer allgemeinen Formeln zu geben.

§. 5.

Bevor wir zu der Entwickelung der Gleichungen der kürzesten Linie übergehen, wollen wir zuvor noch die Gleichung der sogenannten Osculations-Ebene einer Curve von doppelter Krümmung entwickeln, weil diese Ebene weniger bekannt ist und auch die Entwickelung ihrer Gleichung, wie mir scheint, nicht immer mit der nöthigen Strenge und Evidenz gegeben wird.

Es seien also

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

die Gleichungen einer Curve von doppelter Krümmung oder überhaupt einer beliebigen Curve im Raume. Lässt man, wenn von jetzt an x, y, z die Coordinaten irgend eines bestimmten Punktes dieser Curve bezeichnen, x sich um Δx ändern, so mögen wie gewöhnlich Δy und Δz die dadurch herbeigeführten Aenderungen von y und z sein; lässt man aber x sich um $-\Delta x$ ändern, so mögen die dadurch herbeigeführten Aenderungen von y und z durch $\Delta_1 y$ und $\Delta_1 z$ bezeichnet werden. Die Gleichung der durch die drei Punkte

$$(x, \ y, \ z),$$

$$(x + \Delta x, \ y + \Delta y, \ z + \Delta z),$$

$$(x - \Delta x, \ y + \Delta_1 y, \ z + \Delta_1 z)$$

gelegten Ebene sei

$$Au + Bv + Cw + D = 0,$$

wenn jetzt die laufenden Coordinaten durch u, v, w bezeichnet werden; so haben wir zur Bestimmung von A, B, C, D die Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A(x + \Delta x) + B(y + \Delta y) + C(z + \Delta z) + D = 0,$$

$$A(x - \Delta x) + B(y + \Delta_1 y) + C(z + \Delta_1 z) + D = 0.$$

Hieraus erhält man durch Subtraction:

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0,$$
$$-A\Delta x + B\Delta_1 y + C\Delta_1 z = 0;$$

also durch Addition:

$$B(\Delta y + \Delta_1 y) + C(\Delta z + \Delta_1 z) = 0.$$

Setzen wir nun

$$B = \mu(\Delta z + \Delta_1 z),$$

so ist

$$C = -\mu(\Delta y + \Delta_1 y);$$

und führt man diese Werthe von B und C in die Gleichung

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$$

ein, so erhält man:

$$A = -\mu\frac{\Delta y\Delta_1 z - \Delta z\Delta_1 y}{\Delta x}.$$

Als Gleichung der gesuchten Ebene ergiebt sich aber aus den Gleichungen

$$Au + Bv + Cw + D = 0,$$
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

durch Subtraction die Gleichung

$$A(u - x) + B(v - y) + C(w - z) = 0,$$

und diese Gleichung ist daher nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\Delta y\Delta_1 z - \Delta z\Delta_1 y}{\Delta x}(u - x) \\ +(\Delta z + \Delta_1 z)(v - y) \\ -(\Delta y + \Delta_1 y)(w - z) \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{r}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)(u-x)\\ -\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}\right)(v-y)\\ +\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)(w-z)\end{array}\right\}=0.$$

Da man nun unter der Osculations-Ebene der gegebenen Curve in dem Punkte (xyz) die Ebene versteht, deren Lage durch zwei in dem Punkte (xyz) zusammenstossende Elemente der Curve oder durch den Punkt (xyz) und zwei andere unendlich nahe bei demselben liegende Punkte der Curve bestimmt wird, so erhält man die Gleichung der Osculations-Ebene, wenn man in vorstehender Gleichung Δx sich der Null nähern lässt und zu der Gränzgleichung übergeht. Zu diesem Ende ist nach dem Taylorschen Lehrsatze, wenn ϱ, θ und ϱ_1, θ_1 positive, die Einheit nicht übersteigende Grössen bezeichnen:

$$\Delta y=f'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x^2,$$

$$\Delta z=\varphi'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}\varphi''(x+\theta\Delta x).\Delta x^2$$

und

$$\Delta_1 y=-f'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}f''(x-\varrho_1\Delta x).\Delta x^2,$$

$$\Delta_1 z=-\varphi'(x).\Delta x+\tfrac{1}{2}\varphi''(x-\theta_1\Delta x).\Delta x^2;$$

also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\tfrac{1}{2}f''(x+\varrho\Delta x).\Delta x,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\varphi'(x)+\tfrac{1}{2}\varphi''(x+\theta\Delta x).\Delta x$$

und

$$\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}=-f'(x)+\tfrac{1}{2}f''(x-\varrho_1\Delta x).\Delta x,$$

$$\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}=-\varphi'(x)+\tfrac{1}{2}\varphi''(x-\theta_1\Delta x).\Delta x.$$

Daher ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}=\tfrac{1}{2}\{f''(x+\varrho\Delta x)+f''(x-\varrho_1\Delta x)\}\,\Delta x,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}=\tfrac{1}{2}\{\varphi''(x+\theta\Delta x)+\varphi''(x-\theta_1\Delta x)\}\Delta x$$

und, wie man leicht findet:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} f'(x)(\varphi''(x+\theta\Delta x)+\varphi''(x-\theta_1\Delta x)) \\ -\varphi'(x)(f''(x+\varrho\Delta x)+f''(x-\varrho_1\Delta x)) \end{array}\right\}\Delta x$$

$$+\tfrac{1}{4}\{f''(x+\varrho\Delta x).\varphi''(x-\theta_1\Delta x)-f''(x-\varrho_1\Delta x).\varphi''(x+\theta\Delta x)\}\Delta$$

also

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)=\tfrac{1}{2}\{f''(x+\varrho\Delta x)+f''(x-\varrho_1\Delta x)\},$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}\right)=\tfrac{1}{2}\{\varphi''(x+\theta\Delta x)+\varphi''(x-\theta_1\Delta x)\},$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} f'(x)(\varphi''(x+\theta\Delta x)+\varphi''(x-\theta_1\Delta x)) \\ -\varphi'(x)(f''(x+\varrho\Delta x)+f''(x-\varrho_1\Delta x)) \end{array}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{4}\{f''(x+\varrho\Delta x).\varphi''(x-\theta_1\Delta x)-f''(x-\varrho_1\Delta x).\varphi''(x+\theta\Delta x)\}.$$

Geht man nun, indem Δx sich der Null nähert, zu den Grä über, so erhält man:

$$\text{Lim}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)=f''(x)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\text{Lim}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}\right)=\varphi''(x)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

$$\text{Lim}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)$$

$$=f'(x).\varphi''(x)-\varphi'(x).f''(x)=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

und weil man nun die obige Gleichung unserer Ebene auch folgende Art schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)(u-x) \\ -\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 z}{\Delta x}\right)(v-y) \\ +\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta_1 y}{\Delta x}\right)(w-z) \end{array}\right\}=0.$$

so ist die Gränzgleichung, d. i. die Gleichung der Osculations-Ebene nach dem Vorhergehenden:

$$\left.\begin{aligned}\{f'(x).\varphi''(x)-\varphi'(x).f''(x)\}(u-x)\\ -\varphi''(x).(v-y)\\ +f''(x).(w-z)\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(u-x)-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(v-y)+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(w-z)=0.$$

Denkt man sich x, y, z sämmtlich von einer gewissen veränderlichen Grösse ω abhängig, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial\omega}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\omega},\text{ also }\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial\omega}:\frac{\partial x}{\partial\omega};$$

ferner

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}+\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial x}{\partial\omega}$$

$$=\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}-\frac{\partial y}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^3};$$

und ganz eben so:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\omega}:\frac{\partial x}{\partial\omega},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}-\frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^3}.$$

Folglich ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial y}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}-\frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^3};$$

und daher die Gleichung der Osculations-Ebene:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}-\frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}\right)(u-x)\\ +\left(\frac{\partial z}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}-\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}\right)(v-y)\\ +\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}-\frac{\partial y}{\partial\omega}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}\right)(w-z)\end{array}\right\}=0,$$

oder auch der Kürze wegen, wenn man sich nur immer x, y, z sämmtlich als von einer gewissen veränderlichen Grösse abhängig denkt:

$$3)\qquad \left.\begin{array}{l}(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)(u-x)\\ +(\partial z\partial^2 x-\partial x\partial^2 z)(v-y)\\ +(\partial x\partial^2 y-\partial y\partial^2 x)(w-z)\end{array}\right\}=0.$$

§. 6.

Wir wollen jetzt zu der Entwickelung der Gleichungen der kürzesten Linie, als dem Hauptgegenstande dieser Abhandlung, übergehen. Diese Entwickelung ist, wie in ähnlicher Weise bei allen ähnlichen eigentlich in das Gebiet der Variationsrechnung gehörenden Aufgaben, auf das folgende Princip zu gründen:

Wenn zwischen zwei auf einer beliebigen Fläche liegenden Punkten auf dieser Fläche die kürzeste Linie gezogen ist, so ist auch jeder Theil dieser Linie die kürzeste Linie zwischen seinen beiden Endpunkten auf der Fläche.

Denn wäre dieser Theil nicht die kürzeste Linie zwischen seinen Endpunkten, so würde sich zwischen diesen Endpunkten auf der Fläche eine kürzere Linie als dieser Theil ziehen lassen, welcher zusammen mit den übrigen Theilen der kürzesten Linie zwischen den beiden gegebenen Punkten auf der Fläche eine Linie darstellen würde, welche ebenfalls zwischen den beiden gegebenen Punkten läge und offenbar kürzer wäre als die kürzeste Linie zwischen diesen beiden Punkten, was ungereimt ist.

Denken wir uns nun zwei in dem beliebigen Punkte (xyz) der zwischen zwei Punkten auf der durch die Gleichung

$$4)\quad \Omega=F(x,y,z)=0$$

charakterisirten Fläche gezogenen Kürzesten zusammenstossende,

einander gleiche unendlich kleine, und daher als geradlinig zu betrachtende Elemente dieser Kürzesten, so muss nach dem obigen Princip die Summe dieser beiden Elemente zwischen ihren beiden äussersten Endpunkten die Kürzeste auf der Fläche sein, woraus sich nach dem in §. 3. bewiesenen Satze ganz unmittelbar und auf der Stelle ergiebt, dass die durch die beiden in Rede stehenden, in dem Punkte (xyz) zusammenstossenden Elemente unserer Kürzesten bestimmte Ebene auf der Berührungs-Ebene der durch die obige Gleichung charakterisirten Fläche in dem Punkte (xyz) senkrecht stehen muss. Erinnern wir uns jetzt aber ferner aus §. 5., dass man die durch die beiden in dem Punkte (xyz) zusammenstossenden Elemente bestimmte Ebene die Osculations-Ebene unserer Kürzesten in dem Punkte (xyz) nennt; so ist klar, dass man zur Aufstellung des folgenden Satzes berechtigt ist:

Die kürzeste Linie auf einer Fläche zwischen zwei Punkten wird durch die Eigenschaft charakterisirt, dass in jedem ihrer Punkte ihre Osculations-Ebene auf der Berührungs-Ebene der Fläche in diesem Punkte senkrecht steht.

Mittelst dieses Satzes ist es leicht, die Gleichungen der Kürzesten zu finden. Denn zuvörderst ist die Gleichung der Berührungs-Ebene der durch die obige Gleichung charakterisirten Fläche in dem Punkte (xyz) nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}(u-x)+\frac{\partial\Omega}{\partial y}(v-y)+\frac{\partial\Omega}{\partial z}(w-z)=0.$$

Ferner ist nach §. 5. 3) die Gleichung der Osculations-Ebene der Kürzesten in dem Punkte (xyz):

$$\left.\begin{array}{l}(\partial y\partial^2z-\partial z\partial^2y)(u-x)\\ +(\partial z\partial^2x-\partial x\partial^2z)(v-y)\\ +(\partial x\partial^2y-\partial y\partial^2x)(w-z)\end{array}\right\}=0.$$

Da nun nach dem Obigen diese beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen müssen, so erhalten wir nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}(\partial y\,\partial^2z-\partial z\,\partial^2y)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial y}(\partial z\,\partial^2x-\partial x\,\partial^2z)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial z}(\partial x\,\partial^2y-\partial y\,\partial^2x)\end{array}\right\}=0.$$

Also sind die Gleichungen der Kürzesten:

5)

$$\Omega = F(x, y, z) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}.(\partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial y}(\partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial z}(\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x)\end{array}\right\} = 0;$$

oder auch:

6)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}\partial x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\partial z = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}(\partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial y}(\partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z)\\ +\frac{\partial\Omega}{\partial z}(\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x)\end{array}\right\} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$, so erl man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\{(\partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y)\,\partial z - (\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x)\,\partial x\}\\ -\frac{\partial\Omega}{\partial y}\{(\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x)\,\partial y - (\partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z)\,\partial z\}\end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\{\partial y\,(\partial x\,\partial^2 x + \partial z\,\partial^2 z) - (\partial x^2 + \partial z^2)\,\partial^2 y\}\\ -\frac{\partial\Omega}{\partial y}\{\partial x\,(\partial y\,\partial^2 y + \partial z\,\partial^2 z) - (\partial y^2 + \partial z^2)\,\partial^2 x\}\end{array}\right\} = 0,$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\Omega}{\partial x}\{\partial y\,(\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y + \partial z\,\partial^2 z) - (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\,\partial^2 y\}\\ -\frac{\partial\Omega}{\partial y}\{\partial x\,(\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y + \partial z\,\partial^2 z) - (\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)\,\partial^2 x\}\end{array}\right\} = ($$

Aber

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2,$$

$$\partial s\,\partial^2 s = \partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y + \partial z\,\partial^2 z;$$

also, wie man sogleich findet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}(\partial y\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 y) - \frac{\partial \Omega}{\partial y}(\partial x\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 x) = 0.$$

Auf diese Weise erhalten wir überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

7)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}(\partial y\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 y) - \frac{\partial \Omega}{\partial y}(\partial x\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 x) = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y}(\partial z\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 z) - \frac{\partial \Omega}{\partial z}(\partial y\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 y) = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z}(\partial x\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 x) - \frac{\partial \Omega}{\partial x}(\partial z\,\partial^2 s - \partial s\,\partial^2 z) = 0.$$

Betrachten wir aber ∂s als constant, was verstattet ist, setzen so $\partial^2 s = 0$, so werden diese Gleichungen:

8)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial \Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 0.$$

Aus der obigen geometrischen Eigenschaft der kürzesten Linie, welche der Entwickelung der vorstehenden Gleichungen derselben zur Grundlage gedient hat, dass nämlich in jedem Punkte derselben die Berührungs-Ebene der Fläche, auf welcher sie gezogen ist, und die Osculations-Ebene der Curve auf einander senkrecht stehen, geht unmittelbar Folgendes hervor:

Wenn man sich die Kürzeste in Elemente getheilt denkt und jedes dieser Elemente über seinen Endpunkt hinaus verlängert, wobei man die Elemente in einer gewissen Ordnung zu nehmen oder nach einer gewissen Richtung hin zu zählen hat, so ist die Projection

der Verlängerung eines jeden Elements auf der Fläche, auf welcher die Kürzeste gezogen ist, immer das nächst folgende Element der Curve.

Hierin ist aber unmittelbar das Princip ausgesprochen, nach welchem in der Geodäsie auf einer Fläche sogenannte geodätisch-gerade Linien gezogen werden, worüber wir das Weitere der genannten Wissenschaft überlassen müssen *). Man pflegt daher die kürzeste Linie auch die geodätische Linie zu nennen **).

§. 7.

Das Rotations-Ellipsoid, welches für die mathematische Geographie und Geodäsie von vorzüglicher Wichtigkeit ist, wollen wir jetzt einer besonderen Betrachtung unterwerfen.

Die Gleichung desselben sei

$$9)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

oder

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0,$$

so ist im vorhergehenden Paragraphen

$$\Omega=\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1$$

zu setzen, und folglich

---

*) M. s. z. B. meine schon angeführte Sphäroidische Trigonometrie. §. 1. und §. 2.

**) A. a. O. habe ich aus der obigen Grundeigenschaft der geodätischen Linie ihre Gleichungen abgeleitet und dann mittelst der Variationsrechnung gezeigt, dass diese Linie mit der Kürzesten einerlei ist, also eigentlich den umgekehrten Weg von dem im Obigen eingeschlagenen Wege verfolgt. Hier kam es mir darauf an, die Betrachtung von der Variationsrechnung ganz unabhängig zu machen und in das Gebiet der gewöhnlichen Differentialrechnung hinüberzuführen. Bemerken will ich hier noch gelegentlich, dass im Vorhergehenden immer bloss von der Kürzesten gesprochen worden ist, indem wohl auf der Stelle in die Augen springt, dass von einer längsten Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche oder von einem Maximum überhaupt gar keine Rede sein kann.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial y}=\frac{2y}{a^2};$$

also

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=\frac{2}{a^2}\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right).$$

Daher haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0$$

oder

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}-(y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial s})=0,$$

d. i.

$$\frac{\partial . x\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s}-\frac{\partial . y\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s}=0,$$

also, wenn C eine Constante bezeichnet:

$$10)\quad x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C.$$

Bezeichnen wir, indem der positive Theil der Axe der x nach dem Anfangspunkte der Längen hin gerichtet angenommen wird, die Länge und reducirte Breite durch ω und $\overline{\omega}$; so ist bekanntlich

$$11)\quad \begin{cases} x=a\cos\omega\cos\overline{\omega}, \\ y=a\sin\omega\cos\overline{\omega}, \\ z=b\sin\overline{\omega}; \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} \partial x &= -a(\sin\omega\cos\overline{\omega}\,\partial\omega+\cos\omega\sin\overline{\omega}\,\partial\overline{\omega}), \\ \partial y &= a(\cos\omega\cos\overline{\omega}\,\partial\omega-\sin\omega\sin\overline{\omega}\,\partial\overline{\omega}), \\ \partial z &= b\cos\overline{\omega}\partial\overline{\omega}; \end{aligned}$$

folglich

$$x\partial y-y\partial x=a^2\left\{\begin{array}{l}\cos\omega^2\cos\overline{\omega}^2\partial\omega-\sin\omega\cos\omega\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\partial\overline{\omega} \\ +\sin\omega^2\cos\overline{\omega}^2\partial\omega+\sin\omega\cos\omega\sin\overline{\omega}\cos\overline{\omega}\partial\overline{\omega}\end{array}\right\},$$

also

$$12)\quad x\partial y-y\partial x=a^2\cos\overline{\omega}^2\partial\omega.$$

Ferner ist

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

$$= a^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin\omega^2\cos\varpi^2\partial\omega^2 + \cos\omega^2\sin\varpi^2\partial\varpi^2 \\ + \cos\omega^2\cos\varpi^2\partial\omega^2 + \sin\omega^2\sin\varpi^2\partial\varpi^2 \end{array} \right\}$$

$$+ b^2\cos\varpi^2\partial\varpi^2$$

$$= a^2(\cos\varpi^2\partial\omega^2 + \sin\varpi^2\partial\varpi^2) + b^2\cos\varpi^2\partial\varpi^2,$$

also

$$13)\quad \partial s^2 = a^2\cos\varpi^2\partial\omega^2 + (a^2\sin\varpi^2 + b^2\cos\varpi^2)\partial\varpi^2$$

Nach 10) ist

$$x\partial y - y\partial x = C\partial s,$$

also nach 12):

$$14)\quad a^2\cos\varpi^2\partial\omega = C\partial s.$$

Folglich ist nach 13):

$$a^4\cos\varpi^4\partial\omega^2 = C^2\{a^2\cos\varpi^2\partial\omega^2 + (a^2\sin\varpi^2 + b^2\cos\varpi^2)\partial\varpi^2\},$$

woraus sich leicht

$$\partial\omega^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2}\tang\varpi^2 + 1}{\frac{a^2}{C^2}\cos\varpi^2 - 1}\,\partial\varpi^2,$$

also

$$15)\quad \partial\omega = \pm\frac{b}{a}\partial\varpi\sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}\tang\varpi^2 + 1}{\frac{a^2}{C^2}\cos\varpi^2 - 1}}$$

ergiebt, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jena dem $\partial\omega$ und $\partial\varpi$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. jenachdem ω und ϖ gleichzeitig zu- und abnehmen, oder we das eine zu- oder abnimmt, das andere respective ab- oder zunim

Nehmen wir jetzt die geodätische Linie nach derselben Ri tung hin, nach welcher die Längen gezählt werden, und bezei nen das Azimuth durch θ, wo bekanntlich θ nicht grösser als und nach der Seite, nach welcher die Längen gezählt werd und nach der Seite des positiven Erdpols hin genommen wird; ist, wobei Taf. II. Fig. 1. zu vergleichen, offenbar, jenachd $\theta < \frac{1}{2}\pi$ oder $\theta > \frac{1}{2}\pi$ ist:

$$\partial s . \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \sqrt{x^2 + y^2} . \partial\omega$$

oder

$$\partial s . \cos(\theta - \tfrac{1}{2}\pi) = \sqrt{x^2 + y^2} . \partial\omega .$$

also, weil

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) = \cos(\theta - \tfrac{1}{2}\pi)$$

ist, allgemein

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) . \partial s = \sqrt{x^2 + y^2} . \partial\omega ,$$

folglich allgemein:

$$16) \quad \sin\theta\partial s = \sqrt{x^2 + y^2} . \partial\omega .$$

Nun ist aber nach 11):

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos\omega^2 + \sin\omega^2)\cos\overline{\omega}^2 = a^2\cos\overline{\omega}^2 ,$$

also, weil $\overline{\omega}$, absolut genommen, nie $\tfrac{1}{2}\pi$ übersteigt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a\cos\overline{\omega} ,$$

und folglich nach 16) allgemein:

$$17) \quad \sin\theta\partial s = a\cos\overline{\omega}\partial\omega .$$

Nach 14) und 17) hat man jetzt also die beiden folgenden Gleichungen:

$$C\partial s = a^2\cos\overline{\omega}^2\partial\omega ,$$

$$\sin\theta\partial s = a\cos\overline{\omega}\partial\omega ;$$

aus denen mittelst Division sich

$$\frac{C}{\sin\theta} = a\cos\overline{\omega} ,$$

also

$$18) \quad a\cos\overline{\omega}\sin\theta = C$$

oder

$$19) \quad \cos\overline{\omega}\sin\theta = \frac{C}{a}$$

ergiebt, in welcher Gleichung der für die sphäroidische Trigonometrie und Geodäsie höchst wichtige Satz ausgesprochen ist, dass jede geodätische Linie auf einem Rotations-Ellipsoid die merkwürdige Eigenschaft hat, dass das Product $\cos\overline{\omega}\sin\theta$ eine constante Grösse ist.

Weil $\bar{\omega}$, absolut genommen, nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$, und das stets positive θ nicht grösser als π ist, so ergiebt sich aus der Gleichung 18), dass die Constante C stets positiv ist, was man im Folgenden immer zu beachten hat.

Durch Differentiation ergiebt sich aus der Gleichung 19):

$$-\sin\bar{\omega}\sin\theta\partial\bar{\omega}+\cos\bar{\omega}\cos\theta\partial\theta=0,$$

also

$$20)\quad \cot\theta\partial\theta=\operatorname{tang}\bar{\omega}\partial\bar{\omega}.$$

Wir wollen nun $\partial\omega$, $\partial\bar{\omega}$, ∂s sämmtlich bloss durch θ auszudrücken suchen.

Aus der Gleichung 20) ergiebt sich zuvörderst:

$$\partial\bar{\omega}=\frac{\cot\theta}{\operatorname{tang}\bar{\omega}}\partial\theta.$$

Nach 19) ist

$$\cos\bar{\omega}^2=\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2,\quad \sin\bar{\omega}^2=1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2;$$

folglich

$$\operatorname{tang}\bar{\omega}^2=\frac{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}=\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-1;$$

also

$$\operatorname{tang}\bar{\omega}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-1},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $\bar{\omega}$ positiv oder negativ ist. Also ist nach dem Obigen:

$$21)\quad \partial\bar{\omega}=\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-1}}\partial\theta,$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $\bar{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Ferner ist

$$\frac{a^2}{C^2}\cos\bar{\omega}^2-1=\operatorname{cosec}\theta^2-1=\cot\theta^2$$

und

$$\frac{a^2}{b^2}\tang\overline{\omega}^2+1=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$=\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-e^2\right),$$

wenn wir wie gewöhnlich

$$22)\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

setzen. Also ist nach 15) und 21), wie man leicht findet:

$$\partial\omega^2=\frac{\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-e^2}{\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-1}\partial\theta^2=\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}\partial\theta^2,$$

folglich

$$23)\quad \partial\omega=\pm\partial\theta\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}},$$

wo eine Bestimmung wegen des Zeichens nachher gegeben werden wird.

Endlich ist nach 17) und 18)

$$\partial s=\frac{a\cos\overline{\omega}}{\sin\theta}\partial\omega=\frac{C}{\sin\theta^2}\partial\omega,$$

folglich nach 23):

$$24)\quad \partial s=\pm\frac{C}{\sin\theta^2}\partial\theta\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}},$$

wo in den Formeln 23) und 24) die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. In den Formeln 23) und 24) ist nun noch eine Bestimmung wegen der Vorzeichen nöthig.

Wegen der Gleich. 17) haben $\partial\omega$, ∂s gleiche Vorzeichen, was sich auch unter den oben gemachten Voraussetzungen von selbst versteht.

Nach 20) ist

$$\partial\theta=\tang\theta\tang\overline{\omega}\partial\overline{\omega}.$$

Ist nun zuerst $\theta<\frac{1}{2}\pi$, so haben nach dieser Gleichung $\partial\theta$ und $\partial\overline{\omega}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist. Aus Taf. II. Fig. 1. erhellet aber auf der Stelle, dass in diesem Falle, wenn nämlich $\theta<\frac{1}{2}\pi$ ist, $\partial\omega$ und ∂s mit $\partial\overline{\omega}$

gleiches Vorzeichen haben. Also haben $\partial\omega$ und ∂s mit $\partial\theta$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Ist ferner $\theta > \frac{1}{2}\pi$, so haben wegen der obigen Gleichung $\partial\theta$ und $\partial\overline{\omega}$ ungleiche oder gleiche Vorzeichen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist. Aus Taf. II. Fig. 1. erhellet aber auf der Stelle, dass in diesem Falle, wenn nämlich $\theta > \frac{1}{2}\pi$ ist, $\partial\omega$ und ∂s mit $\partial\overline{\omega}$ ungleiches Vorzeichen haben. Also haben $\partial\omega$ und ∂s mit $\partial\theta$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Folglich haben allgemein $\partial\omega$ und ∂s mit $\partial\theta$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist, und man muss also offenbar in den Formeln 23) und 24) die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist.

Nach 23), 21), 24) ist also, wenn man in allen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist:

$$25)\quad \left\{\begin{aligned} \partial\omega &= \pm\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}}\,\partial\theta,\\ \partial\overline{\omega} &= \pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{a^2}{C^2}\sin\theta^2-1}}\,\partial\theta,\\ \partial s &= \pm\frac{C}{\sin\theta^2}\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}}\,\partial\theta; \end{aligned}\right.$$

oder auch, wie leicht erhellet:

$$25^*)\quad \left\{\begin{aligned} \partial\omega &= \pm\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}}\,\partial\theta,\\ \partial\overline{\omega} &= \pm\frac{C\cos\theta}{a\sin\theta^2\sqrt{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}}\,\partial\theta,\\ \partial s &= \pm\frac{C}{\sin\theta^2}\sqrt{\frac{1-e^2\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}{1-\frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\theta^2}}\,\partial\theta. \end{aligned}\right.$$

§. 8.

Bezeichnen wir jetzt zwei zusammengehörende bestimmte Werthe von θ, $\bar{\omega}$ durch θ_0, $\bar{\omega}_0$; so haben wir nach 18) die Gleichungen

$$C = a \sin\theta_0 \cos\bar{\omega}_0, \quad C = a \sin\theta \cos\bar{\omega};$$

aus denen sich die Gleichung

$$26) \quad \sin\theta_0 \cos\bar{\omega}_0 = \sin\theta \cos\bar{\omega}$$

oder

$$\sin\theta_0 \sin(90^0 - \bar{\omega}_0) = \sin(180^0 - \theta) \sin(90^0 - \bar{\omega}),$$

oder die Proportion

$$\sin\theta_0 : \sin(180^0 - \theta) = \sin(90^0 - \bar{\omega}) : \sin(90^0 - \bar{\omega}_0)$$

ergiebt. Diese Proportion führt unmittelbar dazu, ein sphärisches Hülfsdreieck mit den Seiten $90^0 - \bar{\omega}_0$, $90^0 - \bar{\omega}$ und den Gegenwinkeln $180^0 - \theta$, θ_0 anzunehmen, in welchem der dritte Winkel durch P und seine Gegenseite durch Q bezeichnet werden mag, wie durch Taf. II. Fig. 2. erläutert wird, wo nun P und Q gewisse Hülfsgrössen sind, welche wir zur Vereinfachung der Formeln benutzen.

In dem Hülfsdreieck ist nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

---

*) Es ist mir auffallend gewesen, dass der der Wissenschaft zu früh entrissene Gudermann in einer Abhandlung, die sich unter dem Titel: Fundamenta Trigonometriae sphaeroidicae exacta; imprimis de lineis brevissimis, vulgo dictis geodaeticis, in superficie sphaeroidica in Crelle's Journal. Thl. XLIII. S. 294. findet, den so wichtigen Gebrauch des Hülfsdreiecks in der sphäroidischen Trigonometrie gar nicht gekannt zu haben scheint; so wie denn überhaupt diese Abhandlung schon durch den Titel: Fundamenta Trigonometriae sphaeroidicae **exacta** grössere Erwartungen zu erregen als zu befriedigen scheint, weil sie nur wenig geeignet sein dürfte, einen deutlichen Begriff von dem eigentlichen Wesen der sphäroidischen Trigonometrie zu geben, namentlich wenn es sich um die so wichtige Anwendung derselben in der Geodäsie handelt. Die Achtung, welche ich vor dem Verstorbenen stets gehabt habe und noch habe, konnte mich nicht hindern, dies hier zu bemerken, im Interesse derjenigen, welche vielleicht nach jener Abhandlung greifen sollten.

$$\sin\theta_0 \sin(90^0 - \bar\omega_0) = \sin(180^0 - \theta)\sin(90^0 - \bar\omega);$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos(90^0 - \bar\omega) - \cos(90^0 - \bar\omega_0)\cos Q}{\sin(90^0 - \bar\omega_0)\sin Q},$$

$$\cos(90^0 - \bar\omega_0) = \frac{\cos(180^0 - \theta) + \cos\theta_0 \cos P}{\sin\theta_0 \sin P};$$

$$\cos(180^0 - \theta) = \frac{\cos(90^0 - \bar\omega_0) - \cos(90^0 - \bar\omega)\cos Q}{\sin(90^0 - \bar\omega)\sin Q},$$

$$\cos(90^0 - \bar\omega) = \frac{\cos\theta_0 + \cos(180^0 - \theta)\cos P}{\sin(180^0 - \theta)\sin P};$$

also:

$$\sin\theta_0 \cos\bar\omega_0 = \sin\theta \cos\bar\omega;$$

$$\cos\theta_0 = \frac{\sin\bar\omega - \sin\bar\omega_0 \cos Q}{\cos\bar\omega_0 \sin Q},$$

$$\sin\bar\omega_0 = -\frac{\cos\theta - \cos\theta_0 \cos P}{\sin\theta_0 \sin P};$$

$$\cos\theta = -\frac{\sin\bar\omega_0 - \sin\bar\omega \cos Q}{\cos\bar\omega \sin Q},$$

$$\sin\bar\omega = \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta\cos P}{\sin\theta \sin P};$$

und folglich hieraus:

$$\sin\theta_0 \cos\bar\omega_0 = \sin\theta \cos\bar\omega;$$

$$\sin\bar\omega = \sin\bar\omega_0 \cos Q + \cos\theta_0 \cos\bar\omega_0 \sin Q,$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 \cos P - \sin\theta_0 \sin\bar\omega_0 \sin P;$$

$$\sin\bar\omega_0 = \sin\bar\omega \cos Q - \cos\theta \cos\bar\omega \sin Q,$$

$$\cos\theta_0 = \cos\theta \cos P + \sin\theta \sin\bar\omega \sin P.$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen folgt durch Di tiation, wenn man θ_0, $\bar\omega_0$ als constant betrachtet:

$$0 = \cos\theta \cos\bar\omega\partial\theta - \sin\theta \sin\bar\omega\partial\bar\omega,$$

$$\cos\bar\omega\partial\bar\omega = (\cos\theta_0 \cos\bar\omega_0 \cos Q - \sin\bar\omega_0 \sin Q)\partial Q,$$

$$\sin\theta\partial\theta = (\sin\theta_0 \sin\bar\omega_0 \cos P + \cos\theta_0 \sin P)\partial P.$$

Aber

$$\sin\bar\omega \cos Q = \sin\bar\omega_0 \cos Q^2 + \cos\theta_0 \cos\bar\omega_0 \sin Q \cos Q$$
$$= \sin\bar\omega_0 + (\cos\theta_0 \cos\bar\omega_0 \cos Q - \sin\bar\omega_0 \sin Q$$

$$(\cos\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cos Q-\sin\overline{\omega}_0\sin Q)\sin Q=\sin\overline{\omega}\cos Q-\sin\overline{\omega}_0$$
$$=\cos\theta\cos\overline{\omega}\sin Q,$$

$$\cos\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cos Q-\sin\overline{\omega}_0\sin Q=\cos\theta\cos\overline{\omega};$$

und

$$\cos\theta\cos P=\cos\theta_0\cos P^2-\sin\theta_0\sin\overline{\omega}_0\sin P\cos P$$
$$=\cos\theta_0-(\sin\theta_0\sin\overline{\omega}_0\cos P+\cos\theta_0\sin P)\sin P,$$

$$(\sin\theta_0\sin\overline{\omega}_0\cos P+\cos\theta_0\sin P)\sin P=\cos\theta_0-\cos\theta\cos P$$
$$=\sin\theta\sin\overline{\omega}\sin P,$$

$$\sin\theta_0\sin\overline{\omega}_0\cos P+\cos\theta_0\sin P=\sin\theta\sin\overline{\omega};$$

also:

$$\sin\theta\sin\overline{\omega}\partial\overline{\omega}=\cos\theta\cos\overline{\omega}\partial\theta,$$
$$\cos\overline{\omega}\partial\overline{\omega}=\cos\theta\cos\overline{\omega}\partial Q,$$
$$\sin\theta\partial\theta=\sin\theta\sin\overline{\omega}\partial P;$$

folglich:

$$27)\quad\left\{\begin{aligned}\tang\overline{\omega}\partial\overline{\omega}&=\cot\theta\partial\theta,\\ \partial\overline{\omega}&=\cos\theta\partial Q,\\ \partial\theta&=\sin\overline{\omega}\partial P;\end{aligned}\right.$$

und hieraus:

$$\partial\theta=\tang\theta\tang\overline{\omega}\partial\overline{\omega}$$
$$=\sin\theta\tang\overline{\omega}\partial Q,$$

$$\partial\overline{\omega}=\cot\theta\cot\overline{\omega}\partial\theta$$
$$=\cos\overline{\omega}\cot\theta\partial P;$$

also

$$28)\quad\left\{\begin{aligned}\partial\theta&=\sin\overline{\omega}\partial P=\sin\theta\tang\overline{\omega}\partial Q,\\ \partial\overline{\omega}&=\cos\theta\partial Q=\cos\overline{\omega}\cot\theta\partial P.\end{aligned}\right.$$

Führen wir in die Formeln 25 *) für C seinen Werth $\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0$ ein, so werden dieselben, indem wir immer die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist:

$$29)\quad\left\{\begin{aligned}\partial\omega&=\pm\sqrt{\frac{\sin\theta^2-e^2\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}{\sin\theta^2-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}}\,\partial\theta,\\ \partial\overline{\omega}&=\pm\frac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cot\theta}{\sqrt{\sin\theta^2-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}}\,\partial\theta,\\ \partial s&=\pm a\frac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}{\sin\theta^2}\sqrt{\frac{\sin\theta^2-e^2\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}{\sin\theta^2-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}}\,\partial\theta.\end{aligned}\right.$$

Es ist aber wegen 26):

$$\sin\theta^2-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2$$

$$=\frac{\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}{\cos\overline{\omega}^2}-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2$$

$$=\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2\,\frac{1-\cos\overline{\omega}^2}{\cos\overline{\omega}^2}=\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2\operatorname{tang}\overline{\omega}^2,$$

$$\sin\theta^2-e^2\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2$$

$$=\frac{\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}{\cos\overline{\omega}^2}-e^2\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2$$

$$=\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2\,\frac{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}{\cos\overline{\omega}^2},$$

also

$$\frac{\sin\theta^2-e^2\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}{\sin\theta^2-\sin\theta_0{}^2\cos\overline{\omega}_0{}^2}=\frac{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}{\sin\overline{\omega}^2}.$$

Also ist nach 29), indem man immer die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem $\overline{\omega}$ positiv oder negativ ist:

$$\partial\omega=\pm\frac{\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}}{\pm\sin\overline{\omega}}\,\partial\theta=\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial P$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\overline{\omega}}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q=\frac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}{\cos\overline{\omega}^2}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q,$$

$$\partial s=\pm a\frac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}{\sin\theta^2}\cdot\frac{\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}}{\pm\sin\overline{\omega}}\,.\sin\theta\operatorname{tang}\overline{\omega}\,\partial Q$$

$$=a\frac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}{\sin\theta\cos\overline{\omega}}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q$$

$$=a\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q=a\frac{\cos\overline{\omega}}{\sin\theta}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial P$$

$$=a\frac{\cos\overline{\omega}^2}{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial P.$$

Wir haben daher die folgenden Formeln:

$$30)\quad\begin{cases}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0=\sin\theta\cos\overline{\omega},\\ \partial s=a\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q,\\ \partial\omega=\dfrac{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}{\cos\overline{\omega}^2}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial Q;\end{cases}$$

oder

$$31)\quad \begin{cases} \sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0=\sin\theta\cos\overline{\omega}, \\ \partial s=a\dfrac{\cos\overline{\omega}^2}{\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0}\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial P, \\ \partial\omega=\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}\,.\,\partial P. \end{cases}$$

Sowohl 30) als 31) ist ein System von drei Gleichungen zwischen den sechs Grössen

$$\theta_0,\ \overline{\omega}_0,\ \theta,\ \overline{\omega},\ s,\ \omega,$$

weil P und Q von θ_0, $\overline{\omega}_0$, θ, $\overline{\omega}$ abhängig sind.

Nach dem Obigen ist

$$\sin\overline{\omega}=\sin\overline{\omega}_0\cos Q+\cos\theta_0\cos\overline{\omega}_0\sin Q.$$

Man setze, wenn u_0, v_0 zwei Hülfswinkel bezeichnen:

$$\begin{aligned}\sin\overline{\omega}&=\cos u_0\sin(v_0+Q)\\ &=\cos u_0\sin v_0\cos Q+\cos u_0\cos v_0\sin Q,\end{aligned}$$

so, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht:

$$\cos u_0\sin v_0=\sin\overline{\omega}_0,\quad \cos u_0\cos v_0=\cos\theta_0\cos\overline{\omega}_0;$$

folglich

$$\tang v_0=\frac{\tang\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0}$$

und

$$\cos u_0^2=\sin\overline{\omega}_0^2+\cos\overline{\omega}_0^2\cos\theta_0^2,$$

wo die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens offenbar kleiner als die Einheit ist, weil

$$\sin\overline{\omega}_0^2+\cos\overline{\omega}_0^2=1$$

ist. Die leichtesten Formeln zur Berechnung von u_0 und v_0 sind:

$$32)\quad \tang v_0=\frac{\tang\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0},\quad \cos u_0=\frac{\sin\overline{\omega}_0}{\sin v_0}.$$

Ferner ist

$$\cos\overline{\omega}^2=1-\cos u_0^2\sin(v_0+Q)^2$$

$$1-e^2\cos\overline{\omega}^2$$

$$=1-e^2+e^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2$$

$$=(1-e^2)\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2\}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}\{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2\}.$$

oder, wenn wir

$$33)\quad \varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

setzen:

$$\sqrt{1-e^2\cos\overline{\omega}^2}=\frac{b}{a}\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}.$$

Daher haben wir nach 30) die folgenden Formeln:

$$34)\quad\begin{cases}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0=\sin\theta\cos\overline{\omega},\\ \partial s=b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}\,.\,\partial Q,\\ \partial\omega=\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\,\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}}{1-\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}\,\partial Q;\end{cases}$$

wo die Differentiale auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen bloss von der veränderlichen Grösse Q abhängen.

Bezeichnet von jetzt an s die kürzeste oder geodätische Linie und ω die Längendifferenz zwischen den beiden Punkten $(\theta_0\overline{\omega}_0)$ und $(\theta\overline{\omega})$, den ersten als Anfangspunkt gedacht, so ist offenbar:

$$35)\quad\begin{cases}\tang v_0=\frac{\tang\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0},\quad \cos\alpha_0=\frac{\sin\overline{\omega}_0}{\sin v_0};\\ \sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0=\sin\theta\cos\overline{\omega},\\ s=b\int_0^{\varphi}\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}\,.\,\partial Q,\\ \omega=\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\int_0^{\varphi}\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}}{1-\cos\alpha_0{}^2\sin(v_0+Q)^2}\,\partial Q.\end{cases}$$

Dies sind die Fundamental-Formeln der **Sphäroidischen Trigonometrie**, weil man mit diesem Namen die Wissenschaft bezeichnet, welche aus drei gegebenen der sechs Grössen θ_0, $\overline{\omega}_0$, θ, $\overline{\omega}$, s, ω die drei übrigen zu finden lehrt.

§. 9.

Es kann natürlich in dieser Abhandlung nicht meine Absicht sein, aus diesen Grundformeln die sphäroidische Trigonometrie zu entwickeln, worüber man mein mehr erwähntes Werk nachsehen kann. Indess will ich doch die folgenden Bemerkungen nicht unterdrücken, um einigermassen die Anwendung der in Rede stehenden Formeln, auch in Bezug auf den nächsten Zweck dieser Abhandlung, zu zeigen.

Bei den Anwendungen in der Geodäsie und mathematischen Geographie werden immer ε und auch Q sehr kleine Grössen sein, und es wird also verstattet sein, s und ω in nach den Potenzen von Q fortschreitende Reihen zu entwickeln *).

Setzt man nun

$$36)\quad \operatorname{tang} U = \varepsilon \cos u_0 \sin(v_0 + Q),$$

so ist nach 34):

$$\frac{\partial s}{\partial Q} = b\sqrt{1+\operatorname{tang} U^2} = b\sec U,$$

wenn man nur immer, was offenbar verstattet ist, U seinem absoluten Werthe nach nicht grösser als $\frac{1}{2}\pi$ nimmt.

Weil nun

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial Q} : \frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial U} = \cos U^2 \frac{\partial \operatorname{tang} U}{\partial Q}$$

$$= \varepsilon \cos u_0 \cos U^2 \cos(v_0 + Q)$$

$$= \sin U \cos U \cot(v_0 + Q)$$

ist, so ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial Q^2} = b \sin U \cos U^{-2} \frac{\partial U}{\partial Q}$$

$$= b \sin U^2 \cos U^{-1} \cot(v_0 + Q)$$

$$= \varepsilon b \cos u_0 \sin U \cos(v_0 + Q),$$

woraus ferner

---

*) Bisher hat man die betreffenden Reihen meistens immer nach Potenzen von ε fortschreiten lassen.

$$\frac{\partial^3 s}{\partial Q^3}=\varepsilon b\cos u_0\{\cos U\cos(v_0+Q)\frac{\partial U}{\partial Q}-\sin U\sin(v_0+Q)\}$$

$$=\varepsilon b\cos u_0\sin U\frac{\cos U^2\cos(v_0+Q)^2-\sin(v_0+Q)^2}{\sin(v_0+Q)}$$

$$=-\varepsilon b\cos u_0\sin(v_0+Q)\sin U\{1-\cot(v_0+Q)^2\cos U^2\}$$

folgt.

Setzen wir nun

$$37)\quad \tang G=\varepsilon\cos u_0\sin v_0$$

und bezeichnen die Werthe, welche die Differentialquotienten von s erhalten, wenn man $Q=0$ setzt, durch Einschliessung derselben in Parenthesen, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial Q}\right)=\quad b\sec G,$$

$$\left(\frac{\partial^2 s}{\partial Q^2}\right)=\quad \varepsilon b\cos u_0\cos v_0\sin G,$$

$$\left(\frac{\partial^3 s}{\partial Q^3}\right)=-\varepsilon b\cos u_0\sin v_0\sin G(1-\cot v_0{}^2\cos G^2);$$

also, weil s für $Q=0$ verschwindet, nach dem Maclaurin'schen Theorem:

$$
\begin{aligned}
38)\quad \frac{s}{b}= &\quad Q\sec G\\
&+\tfrac{1}{2}\varepsilon Q^2\cos u_0\cos v_0\sin G\\
&-\tfrac{1}{6}\varepsilon Q^3\cos u_0\sin v_0\sin G(1-\cot v_0{}^2\cos G^2)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ferner ist nach 34):

$$\frac{\partial\omega}{\partial Q}=\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\bar{\omega}_0\frac{\sec U}{1-\frac{\tang U^2}{\varepsilon^2}}$$

$$=-\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\bar{\omega}_0\frac{\varepsilon^2\cos U}{\sin U^2-\varepsilon^2\cos U^2}$$

$$=-\varepsilon^2\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\bar{\omega}_0\frac{\cos U}{1-(1+\varepsilon^2)\cos U^2},$$

woraus durch fernere Differentiation sich leicht

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial Q^2}=\varepsilon^2\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\bar{\omega}_0\sin U\frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos U^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos U^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial Q},$$

also nach dem Obigen

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial Q^2}=\varepsilon^2\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cot(v_0+Q)\sin U^2\cos U\frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos U^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos U^2}$$

ergiebt, so dass also, wenn wir wieder $Q=0$ setzen, in ähnlicher **Bezeichnung** wie vorher

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial Q}\right)=-\varepsilon^2\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial Q^2}\right)=\varepsilon^2\frac{b}{a}\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cot v_0\sin G^2\cos G\frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos G^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2};$$

also, weil ω für $Q=0$ verschwindet, nach dem Maclaurinschen Satze:

$$39)\quad \omega=-\varepsilon^2\frac{b}{a}Q\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\frac{b}{a}Q^2\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cot v_0\sin G^2\cos G\frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos G^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist.

Die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie können also unter den gemachten Voraussetzungen auf folgenden Ausdruck gebracht werden:

40)

$$\tan v_0=\frac{\tan\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0},\quad \cos u_0=\frac{\sin\overline{\omega}_0}{\sin v_0},\quad \tan G=\varepsilon\cos u_0\sin v_0=\varepsilon\sin\overline{\omega}_0;$$

$$\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0=\sin\theta\cos\overline{\omega},$$

$$\frac{s}{b}=Q\sec G$$
$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon Q^2\cos u_0\cos v_0\sin G$$
$$-\tfrac{1}{6}\varepsilon Q^3\cos u_0\sin v_0\sin G(1-\cot v_0^2\cos G^2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\omega=-\varepsilon^2\frac{b}{a}Q\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\frac{b}{a}Q^2\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\cot v_0\sin G^2\cos G\frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos G^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ueberlegt man, dass wegen der Gleichung 37) in Bezug auf die kleine Grösse ε offenbar $\sin G$ von der ersten Ordnung ist, so ist klar, dass man erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf die kleinen Grössen ε und Q bei s von der vierten, bei ω von der sechsten Ordnung sind, die vorstehenden Gleichungen näherungsweise auf den folgenden Ausdruck bringen kann:

41)

$$\operatorname{tang} v_0 = \frac{\operatorname{tang}\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0}, \quad \cos u_0 = \frac{\sin\overline{\omega}_0}{\sin v_0};$$

$$\operatorname{tang} G = \varepsilon\cos u_0 \sin v_0 = \varepsilon\sin\overline{\omega}_0;$$

$$\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0 = \sin\theta\cos\overline{\omega},$$

$$s = bQ\sec G,$$

$$\omega = -\varepsilon^2\frac{b}{a}Q\sin\theta_0\cos\overline{\omega}_0\frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}.$$

Von der grössten Wichtigkeit für die Geodäsie ist die folgende Aufgabe:

Aus dem Azimuth θ_0, der reducirten Breite $\overline{\omega}_0$ und der kürzesten oder geodätischen Linie s das Azimuth θ, die reducirte Breite $\overline{\omega}$ und die Längendifferenz ω zu finden.

Weil man θ_0 und $\overline{\omega}_0$ kennt, so kann man u_0, v_0, G mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang} v_0 = \frac{\operatorname{tang}\overline{\omega}_0}{\cos\theta_0}, \quad \cos u_0 = \frac{\sin\overline{\omega}_0}{\sin v_0}, \quad \operatorname{tang} G = \varepsilon\sin\overline{\omega}_0$$

finden; und weil man nun auch s kennt, so ergiebt sich nach 41) ein erster Näherungswerth von Q mittelst der Formel

$$Q = \frac{s}{b}\cos G,$$

worauf es nun leicht sein wird, diesen Näherungswerth von Q weiter zu verbessern, bis derselbe der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{s}{b} = \; & Q\sec G \\ & + \tfrac{1}{2}\varepsilon Q^2\cos u_0\cos v_0\sin G \\ & - \tfrac{1}{6}\varepsilon Q^3\cos u_0\sin v_0\sin G(1-\cot v_0{}^2\cos G^2) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

genau genügt. Dann ergiebt sich ω mittelst der Formel

$$\omega = -\varepsilon^2 \frac{b}{a} Q \sin\theta_0 \cos\overline{\omega}_0 \frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{b}{a} Q^2 \sin\theta_0 \cos\overline{\omega}_0 \cot v_0 \sin G^2 \cos G \frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos G^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und durch Auflösung des Hülfsdreiecks, in welchem man θ_0, $\overline{\omega}_0$, Q kennt, findet man θ und $\overline{\omega}$, wobei man auch die Gleichung

$$\sin\theta_0 \cos\overline{\omega}_0 = \sin\theta \cos\overline{\omega}$$

benutzen kann.

Am Nächsten liegt uns in dieser Abhandlung die folgende Aufgabe:

Aus der Längendifferenz ω und den reducirten Breiten $\overline{\omega}_0$ und $\overline{\omega}$ die kürzeste oder geodätische Linie s und die Azimuthe θ_0 und θ zu finden.

Diese Aufgabe lässt sich, wie die meisten Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie nur indirect, etwa auf folgende Art, auflösen. Aus der dritten der Gleichungen 31) ergiebt sich leicht:

$$\omega = P - \tfrac{1}{2}e^2 \int_0^P \cos\overline{\omega}^2 \partial P - \tfrac{1}{8}e^4 \int_0^P \cos\overline{\omega}^4 \partial P - \ldots,$$

woraus man sieht, dass ω als ein erster Näherungswerth von P angenommen werden kann. Indem man also näherungsweise ω für P setzt, berechne man im Hülfsdreieck aus $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}$, P die übrigen Stücke θ_0, θ, Q, und dann auch G mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} G = \varepsilon \sin\overline{\omega}_0.$$

Sucht man nun ω mittelst der Formel

$$\omega = -\varepsilon^2 \frac{b}{a} Q \sin\theta_0 \cos\overline{\omega}_0 \frac{\cos G}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{b}{a} Q^2 \sin\theta_0 \cos\overline{\omega}_0 \cot v_0 \sin G^2 \cos G \frac{1+(1+\varepsilon^2)\cos G^2}{1-(1+\varepsilon^2)\cos G^2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so wird sich zeigen, ob der hiernach berechnete Werth von ω mit dem gegebenen Werthe dieser Grösse übereinstimmt. Findet keine Uebereinstimmung Statt, so muss man den Werth von P, von welchem man ausging, so lange verbessern, bis die in Rede

stehende Uebereinstimmung erreicht wird, was nach den bekannten Näherungs-Methoden keine Schwierigkeit hat. Hat man P und demzufolge auch θ_0, θ, Q richtig gefunden, so sucht man u_0, v_0 mittelst der Formeln

$$\tang v_0=\frac{\tang \bar{\omega}_0}{\cos\theta_0},\quad \cos u_0=\frac{\sin\bar{\omega}_0}{\sin v_0}$$

und erhält dann die Kürzeste s mittelst der Formel:

$$\begin{aligned}\frac{s}{b}= & \quad Q\sec G\\ & +\tfrac{1}{2}\varepsilon Q^2\cos u_0\cos v_0\sin G\\ & -\tfrac{1}{6}\varepsilon Q^3\cos u_0\sin v_0\sin G(1-\cot v_0{}^2\cos G^2)\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

worauf die gesuchten Stücke sämmtlich gefunden sind.

Dies mag hier zur Erläuterung der Anwendung der obigen Grundformeln zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie hinreichen.

Mehrere neuere Mathematiker, Joachimsthal, Chasles u. A. haben noch verschiedene bemerkenswerthe Eigenschaften der geodätischen Curve gefunden, welche indess dem nächsten Zweck der vorliegenden Abhandlung zu fern lagen, bis jetzt auch nur zu sehr bloss ein rein theoretisches Interesse haben, als dass ich auf die Entwickelung derselben hier hätte eingehen können, weil dadurch der Umfang der Abhandlung zu sehr vergrössert worden wäre. Ich hoffe aber, diese in theoretischer Beziehung allerdings merkwürdigen Eigenschaften zum Gegenstande einer besonderen Abhandlung zu machen, für welche dann die vorliegende als Grundlage dienen wird.

X.

Ueber die Kimm oder Kimmtiefe oder über die Depression des Meerhorizonts.

Von
dem Herausgeber.

Wenn auch die für die Nautik wichtige Lehre von der Kimm ein ganz elementarer Gegenstand ist, so scheint mir dieselbe doch nicht immer mit der erforderlichen Deutlichkeit und Genauigkeit behandelt zu werden. Insbesondere wird nicht immer auf die terrestrische Refraction gehörig Rücksicht genommen, und noch seltener findet man eine besondere Berücksichtigung des Falls, wenn die Küste so nahe ist, dass der eigentliche Meerhorizont nicht gesehen werden kann. Hierdurch bin ich, im Interesse des nautischen Unterrichts, veranlasst worden, diesen an sich ganz elementaren Gegenstand im Folgenden einer neuen sorgfältigen Behandlung zu unterwerfen.

§. 1.

Allgemeiner Begriff der Kimm oder Kimmtiefe.

Wenn auf einem Schiffe die Höhe eines Gestirns über dem Horizonte mit dem Sextanten oder einem ähnlichen Instrumente gemessen werden soll, so ist dies nicht anders möglich, als dass man die Bilder des Meerhorizonts und des Gestirns mit einander zur Berührung bringt und also eigentlich den am Auge des Beobachters als Spitze liegenden Winkel misst, welchen die beiden von dem Auge nach dem Meerhorizonte und dem Gestirne gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen. Dieser Winkel ist aber der gesuchten Höhe des Gestirns nicht genau gleich und

erfordert, um letztere zu erhalten, eine Correction, welche die Kimm oder die Kimmtiefe oder die Depression des Meerhorizonts *) genannt wird.

Um dies deutlicher zu machen, sei C (Taf. II. Fig. 3.) der Mittelpunkt der Erde und A der Standpunkt des Beobachters, in der Höhe AA' über der Meeresfläche. Zieht man durch A' die Berührende $A'H'$ an die Meeresfläche und durch A mit derselben die Parallele AH, so ist AH der Horizont von A, und wenn nun S ein Gestirn ist, so ist der Winkel SAH die Höhe dieses Gestirns über dem Horizonte von A. Dieser Winkel kann aber auf dem Schiffe nicht unmittelbar gemessen werden. Vielmehr muss man sich von A aus die Berührende AB an die Meeresfläche gezogen denken, wo dann der Punkt B im Meerhorizonte liegt, und mit dem Sextanten oder einem ähnlichen Instrumente kann bloss der Winkel SAB gemessen werden, indem man das Gestirn S und den Punkt B im Meerhorizonte mit einander zur Berührung bringt. Dieser gemessene Winkel SAB ist aber um den Winkel HAB grösser als die zu findende Höhe SAH des Gestirns, so dass also der Winkel HAB von dem gemessenen Winkel SAB abgezogen werden muss, um die zu bestimmende Höhe SAH zu erhalten; daher ist der Winkel HAB die an dem gemessenen Winkel SAB, um die wirkliche Höhe SAH zu erhalten, anzubringende Correction, welche wir vorher unter dem Namen der Kimm oder Kimmtiefe oder der Depression des Meerhorizonts kennen gelernt haben, weshalb man auch den Winkel HAB selbst mit einem dieser Namen zu belegen pflegt.

Zu bemerken ist aber hierbei noch, dass wegen der Refraction die Linie AB eigentlich keine gerade, sondern eine gegen die Erde concave krumme Linie ist, ein Umstand, auf welchen bei der Bestimmung der Kimmtiefe gleichfalls Rücksicht genommen werden muss, wie wir auch im Folgenden thun werden. Nachdem man die Kimmtiefe mit Rücksicht auf die Refraction bestimmt hat, zieht man sie von dem gemessenen Winkel ab, wonach die noch von der Refraction afficirte Höhe des Gestirns übrig bleibt; corrigirt man nun diesen übrig bleibenden Winkel noch auf gewöhnliche Weise wegen der Refraction, so erhält man die von der Kimmtiefe und Refraction befreite Höhe des Gestirns, die dann noch in allen den Fällen, wo es nöthig ist, wegen der Parallaxe corrigirt werden muss. Das Vorhergehende setzt voraus, dass der Meerhorizont sichtbar ist. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass der Meerhorizont nicht sichtbar ist. Diesen Fall werden wir nachher besonders betrachten.

---

*) Auch die Dücking.

§. 2.

Bestimmung der Kimmtiefe, wenn der Meerhorizont sichtbar ist.

Indem übrigens Alles wie vorher bleibt, sei jetzt nur in Taf. II. Fig. 4. die zwischen den Punkten A und B liegende, gegen die Erde concave krumme Linie der von dem Meerhorizonte B in das Auge des Beobachters A gelangende Lichtstrahl. Zieht man dann an diese krumme Linie in A und B die Berührenden AE und BF, so hat man eigentlich den Winkel SAE gemessen, und von diesem Winkel muss der Winkel HAE abgezogen werden, um die, übrigens noch von der Refraction afficirte Höhe SAH des Gestirns S zu finden. Der Winkel HAE kann aber auf folgende Art bestimmt werden.

Der Erdhalbmesser BC oder $A'C$ werde durch r, die Höhe AA' des Auges A des Beobachters über dem Meere durch h bezeichnet; beide Grössen müssen als gegeben betrachtet, und namentlich letztere in jedem einzelnen Falle durch besondere Messung mit möglichster Sorgfalt bestimmt werden. Bezeichnen wir nun den Winkel HAB oder, was Dasselbe ist, den diesem Winkel offenbar gleichen Winkel ACB, durch k, so ist in dem bei B rechtwinkligen Dreiecke ABC offenbar

$$\cos k = \frac{BC}{AC} = \frac{r}{r+h}.$$

Wegen der Kleinheit des Winkels k ist aber diese Formel zu dessen Bestimmung nicht sehr geeignet, da sich, wie ein Blick in die trigonometrischen Tafeln lehrt, die Cosinus sehr kleiner Winkel sehr langsam ändern. Deshalb ist es besser, den Winkel k durch seine Tangente zu bestimmen. Es ist aber

$$\operatorname{tang} k = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{AC^2 - BC^2}}{BC},$$

also

$$\operatorname{tang} k = \frac{\sqrt{(r+h)^2 - r^2}}{r},$$

oder, wie man sogleich findet:

$$\operatorname{tang} k = \frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r}.$$

Wegen der sehr geringen Krümmung des krummlinigen Lichtstrahls AB wird man [illegible] ohne merklichen Fehler als einen Kreisbogen ansehen, und die Winkel BAE und ABF daher ohne merklichen Fehler einander gleich setzen. Also

$$BOE = 2.BAE$$

setzen können. Der Winkel BOE ist aber eigentlich der Winkel, [illegible] in der Abhandlung Thl. XXI. Nr. XVI., auf die [illegible] bezogen wollen, die Refraction genannt haben, und zugleich ist in dieser Abhandlung gezeigt worden, dass die Differenz der Winkel ACB und BOE zu dem Winkel BOE in einem constanten Verhältnisse steht. Setzen wir also demzufolge, indem n eine constante Grösse bezeichnet:

$$ACB - BOE = n.\hat{BOE},$$

so ist nach dem Obigen

$$k - 2.BAE = 2n.\hat{BAE},$$

also

$$k = (2n+1).BAE,$$

und folglich

$$BAE = \frac{k}{2n+1}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$i = \frac{1}{2n+1}$$

setzen, wo natürlich auch i *) eine constante Grösse ist:

$$\hat{BAE} = ik.$$

Bezeichnen wir nun den Winkel HAE, die eigentliche Kimmtiefe, welche wir hier suchen, durch K, so ist, weil

$$\hat{HAE} = \hat{HAB} - \hat{BAE} = \hat{ACB} - \hat{BAE}$$

ist:

$$K = k - ik = (1-i)k;$$

und man hat daher zur Berechnung von K jetzt die Formeln:

---

*) Den numerischen Werth von i s. m. Thl. XXI. S. 219.

$$\operatorname{tang} k = \frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r}, \quad K = (1-i)k.$$

Weil aber k immer ein sehr kleiner Winkel ist, so kann man näherungsweise, wenn k in Secunden ausgedrückt sein soll:

$$k = 206264{,}8 \,.\, \frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r},$$

oder, wenn k in Minuten ausgedrückt sein soll:

$$k = 3437{,}7 \,.\, \frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r}$$

setzen. Also ist, wenn K in Secunden ausgedrückt sein soll:

$$K = \frac{206264{,}8 \,.\, (1-i)}{r} \sqrt{h(2r+h)}$$

oder auch

$$K = \frac{(1-i) \cot 1''}{r} \sqrt{h(2r+h)} \;{}^{*});$$

und wenn K in Minuten ausgedrückt sein soll:

$$K = \frac{3437{,}7 \,.\, (1-i)}{r} \sqrt{h(2r+h)}.$$

Es ist aber

$$\frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r} = \sqrt{\frac{h}{r}\left(2+\frac{h}{r}\right)} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{h}{r}\left(1+\frac{h}{2r}\right)}$$

oder

$$\frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{h}{r} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2},$$

und weil nun $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2$ jedenfalls immer eine sehr kleine Grösse ist, so kann man mit hinreichender Annäherung

$$\frac{\sqrt{h(2r+h)}}{r} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{h}{r}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r}} \,.\, \sqrt{h}$$

setzen. Soll also K in Secunden ausgedrückt sein, so ist

*) Natürlich nur annähernd, was man auch im Folgenden immer zu bemerken hat.

$$K = \frac{206264,8 . \sqrt{2} . (1-i)}{\sqrt{r}} \sqrt{h}$$

oder

$$K = \frac{(1-i) . \sqrt{2} . \cot 1''}{\sqrt{r}} \sqrt{h}.$$

Soll dagegen K in Minuten ausgedrückt sein, so ist

$$K = \frac{3437,7 . \sqrt{2} . (1-i)}{\sqrt{r}} \sqrt{h}.$$

Dass die auf diese Weise berechnete Kimmtiefe K von dem gemessenen oder beobachteten Winkel SAE abgezogen werden muss, um die, übrigens noch von der Refraction afficirte, Höhe SAH zu erhalten, wissen wir schon aus dem Obigen.

Hätte man, statt vorher den Winkel SAE, den Winkel SAE_1 in Taf. II. Fig. 5. gemessen, so bleibt, wie auf der Stelle aus der Figur erhellet, die Berechnung der Kimmtiefe $H_1 \hat{A} E_1$ und mittelst derselben des Winkels SAH_1 aus dem gemessenen Winkel SAE_1 ganz dieselbe wie vorher die Berechnung der Kimmtiefe $H\hat{A}E$ und mittelst derselben des Winkels SAH aus dem gemessenen Winkel SAE. Den Winkel SAH_1 muss man aber noch von 180^0 abziehen und den dadurch erhaltenen Winkel auf gewöhnliche Weise wegen der Refraction corrigiren, um die Höhe SAH des Gestirns S zu erhalten.

§. 3.

Bestimmung der Kimmtiefe, wenn der Meerhorizont nicht sichtbar ist.

Es können Fälle vorkommen, wo die Küste dem Schiffe so nahe ist, dass der Blick nicht bis zu dem Meerhorizonte hinaus reicht. In solchen Fällen muss man (Taf. II. Fig. 6.) den Winkel SAB zwischen dem Gestirne S und der Küste B, wo nun ABC nicht wie vorher ein rechter Winkel ist, oder wegen der Refraction eigentlich den Winkel SAE messen, wo nun wieder $H\hat{A}E$ die Kimmtiefe ist, welche wir auch jetzt durch K bezeichnen wollen. Eben so werde der Winkel HAB wieder durch k bezeichnet. Um nun K berechnen zu können, muss man die Entfernung $A'B$ der Küste B von dem Schiffe wenigstens näherungsweise kennen, und dieselbe daher, wenn man sie nicht anderweitig

kennt, durch Schätzung bestimmen. Bezeichnen wir diese Entfernung durch e, den Winkel ACB durch C, so ist, in Secunden ausgedrückt:

$$C = 206264,8 \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r} \cot 1''$$

oder

$$C = \frac{206264,8}{r} e = \frac{\cot 1''}{r} e;$$

und, in Minuten ausgedrückt:

$$C = 3437,7 \cdot \frac{e}{r} = \frac{3437,7}{r} e;$$

und der Winkel C kann also hiernach im Folgenden als bekannt angenommen werden. Im Dreiecke ABC ist nun aber

$$\sin A\hat{B}C : \sin B\hat{A}C = AC : BC,$$

also

$$\sin\{180^0 - C - (90^0 - k)\} : \sin(90^0 - k) = r + h : r$$

oder

$$\cos(k - C) : \cos k = r + h : r.$$

Daher ist

$$\frac{\cos(k - C)}{\cos k} = \frac{r + h}{r},$$

folglich

$$\frac{\cos k \cos C + \sin k \sin C}{\cos k} = \frac{r + h}{r}$$

oder

$$\cos C + \tan k \sin C = \frac{r + h}{r},$$

woraus sich

$$\tan k = \frac{h + r(1 - \cos C)}{r \sin C} = \frac{h + 2r \sin \tfrac{1}{2}C^2}{2r \sin \tfrac{1}{2}C \cos \tfrac{1}{2}C},$$

also, wie man sogleich übersieht,

$$\tan k = \tan \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{r \sin C}$$

ergiebt.

Auch folgt aus der Gleichung

$$\frac{\cos(k-C)}{\cos k}=\frac{r+k}{r}$$

leicht

$$\frac{\cos(k-C)-\cos k}{\cos(k-C)+\cos k}=\frac{\frac{r+k}{r}-1}{\frac{r+k}{r}+1}=\frac{k}{2r+k},$$

und folglich nach einer bekannten Zerlegung:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}C\sin(k-\frac{1}{2}C)}{2\cos\frac{1}{2}C\cos(k-\frac{1}{2}C)}=\frac{k}{2r+k}$$

oder

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C\operatorname{tang}(k-\tfrac{1}{2}C)=\frac{k}{2r+k},$$

also

$$\operatorname{tang}(k-\tfrac{1}{2}C)=\frac{k}{2r+k}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

Mittelst der Formeln

$$\operatorname{tang}k=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C+\frac{k}{r\sin C}$$

oder

$$\operatorname{tang}(k-\tfrac{1}{2}C)=\frac{k}{2r+k}\cot\tfrac{1}{2}C$$

kann man k berechnen, nachdem man nach dem Obigen C gefunden hat. K aber findet man nun ferner auf folgende Art.

Auf ähnliche Art wie vorher wird man wegen der sehr geringen Krümmung des krummlinigen Lichtstrahls AB denselben ohne merklichen Fehler als einen Kreisbogen ansehen, und die Winkel BAE und ABF daher ohne merklichen Fehler einander gleich, also

$$B\hat{O}E=2.B\hat{A}E$$

setzen können. Der Winkel BOE ist aber eigentlich der Winkel, welchen wir in der oben angeführten Abhandlung die Refraction genannt haben, und zugleich ist früher gezeigt worden, dass die Differenz der Winkel ACB und BOE zu dem Winkel BOE in einem constanten Verhältnisse steht. Setzen wir also demzufolge, indem n wieder dieselbe constante Grösse wie früher bezeichnet:

$$\widehat{ACB}-\widehat{BOE}=n.\widehat{BOE},$$

so ist nach dem Obigen

$$C-2.\widehat{BAE}=2n.\widehat{BAE},$$

also

$$C=2(n+1).\widehat{BAE},$$

folglich

$$\widehat{BAE}=\frac{C}{2(n+1)},$$

oder, wenn wir wieder der Kürze wegen

$$i=\frac{1}{2(n+1)}$$

setzen, wo natürlich auch i eine constante Grösse ist:

$$\widehat{BAE}=iC.$$

Weil nun

$$\widehat{HAE}=\widehat{HAB}-\widehat{BAE}$$

ist, so ist in den eingeführten Bezeichnungen:

$$K=k-iC,$$

mittelst welcher Formel die Kimmtiefe K gefunden werden kann.

Aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} k=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C+\frac{h}{r\sin C}$$

ergiebt sich, wenn C und k in Secunden ausgedrückt sind, die Näherungsformel

$$\frac{k}{206264{,}8}=\frac{\frac{1}{2}C}{206264{,}8}+\frac{h}{r}\cdot\frac{206264{,}8}{C},$$

also

$$k=\tfrac{1}{2}C+\frac{h}{r}\cdot\frac{(206264{,}8)^2}{C}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$C=206264{,}8\,.\frac{e}{r},$$

also

$$k = \tfrac{1}{2}C + 206264{,}8 \,.\, \frac{h}{e}\,,$$

und folglich, weil $K = k - iC$ ist:

$$K = \frac{1-2i}{2}\,C + 206264{,}8 \,.\, \frac{h}{e}.$$

Daher ist

$$K = 206264{,}8 \cdot \left(\frac{h}{e} + \frac{1-2i}{2} \cdot \frac{e}{r}\right)$$

oder

$$K = 206264{,}8 \cdot \left(\frac{h}{e} + \frac{1-2i}{2r}\,e\right).$$

Soll K in Minuten ausgedrückt sein, so ist

$$K = 3437{,}7 \,.\, \left(\frac{h}{e} + \frac{1-2i}{2} \cdot \frac{e}{r}\right)$$

oder

$$K = 3437{,}7 \,.\, \left(\frac{h}{e} + \frac{1-2i}{2r}\,e\right).$$

Die Gleichung

$$\operatorname{tang}(k - \tfrac{1}{2}C) = \frac{h}{2r+h} \cot \tfrac{1}{2}C = \frac{h}{(2r+h)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C}$$

giebt näherungsweise, wenn alle Winkel in Secunden ausge(angenommen werden:

$$\frac{k - \tfrac{1}{2}C}{206264{,}8} = \frac{h}{2r+h} \cdot \frac{206264{,}8}{\tfrac{1}{2}C}\,,$$

also

$$k - \tfrac{1}{2}C = \frac{h}{2r+h} \cdot \frac{(206264{,}8)^2}{\tfrac{1}{2}C}\,,$$

folglich

$$k = \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{2r+h} \cdot \frac{(206264{,}8)^2}{\tfrac{1}{2}C}.$$

Nun ist aber

$$C = 206264{,}8 \cdot \frac{e}{r}\,,$$

also

$$k = 206264{,}8 \,.\left\{\frac{e}{2r} + \frac{2rh}{e(2r+h)}\right\}.$$

Aber

$$K = k - iC = k - 206264{,}8 \,.\, i \,.\, \frac{e}{r};$$

also

$$K = 206264{,}8 \,.\left\{\frac{2rh}{e(2r+h)} + \frac{1-2i}{2} \,.\, \frac{e}{r}\right\},$$

oder

$$K = 206264{,}8 \,.\left\{\frac{h}{e\left(1+\frac{h}{2r}\right)} + \frac{1-2i}{2r}\, e\right\};$$

und wenn K in Minuten ausgedrückt sein soll:

$$K = 3437{,}7 \,.\left\{\frac{h}{e\left(1+\frac{h}{2r}\right)} + \frac{1-2i}{2r}\, e\right\}.$$

Diese Näherungsformeln gehen in die vorhergehenden Näherungsformeln über, wenn man

$$e\left(1+\frac{h}{2r}\right) = e$$

setzt, also die Grösse $\frac{eh}{2r}$ vernachlässigt oder als verschwindend betrachtet.

§. 4.

Weitere Ausführung des Vorhergehenden.

Weil die vorhergehende Methode voraussetzt, dass die Entfernung der Küste von dem Schiffe bekannt sei, man aber zu dieser Voraussetzung schwerlich in vielen Fällen mit hinreichender Genauigkeit berechtigt sein wird, so hat man vorgeschlagen, dass zwei Beobachter auf dem Schiffe in demselben Zeitmomente in zwei möglichst von einander verschiedenen Höhen über dem Meere, also etwa (Taf. II. Fig. 7.) in den in derselben Vertikale liegenden Punkten A und A_1, die Winkel SAE und SA_1E_1 messen sollen, aus denen sich dann, in Verbindung mit den bekannten Höhen der Punkte A und A_1 über dem Meere, die Kimmtiefe auf folgende Art bestimmen lässt.

Die Höhen AA' und A_1A' der Punkte A und A_1 über dem Meere seien respective h und h_1; ferner sei wie gewöhnlich:

$$H\hat{A}E = K,\quad H_1\hat{A}_1E_1 = K_1;\quad H\hat{A}B = k,\quad H_1\hat{A}_1B = k_1$$

und

$$A\hat{C}B = A_1\hat{C}B = C;$$

endlich sei

$$A'B = e.$$

Dann haben wir zuvörderst, wenn C in Secunden ausgedrückt sein soll, nach dem vorhergehenden Paragraphen, indem r wie gewöhnlich den Erdhalbmesser bezeichnet, die Gleichung:

$$C = 206264{,}8 \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r} \cot 1''.$$

Ferner ist

$$K = k - iC,\quad K_1 = k_1 - iC;$$

also

$$K - K_1 = k - k_1 \text{ oder } K_1 - K = k_1 - k.$$

Weil nun die von A und A_1 nach dem Gestirne S gezogenen Linien AS und A_1S offenbar ohne allen merklichen Fehler einander parallel sind, so ist

$$S\hat{A}H = S\hat{A}_1H_1,$$

also

$$S\hat{A}_1E_1 - H_1\hat{A}_1E_1 = S\hat{A}E - H\hat{A}E,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$S\hat{A}_1E_1 - K_1 = S\hat{A}E - K,$$

also

$$S\hat{A}_1E_1 - S\hat{A}E = K_1 - K = k_1 - k.$$

Hieraus sieht man, dass $k_1 - k$ oder $K_1 - K$ eine bekannte Grösse, nämlich der Differenz der beiden gemessenen Winkel SA_1E_1 und SAE gleich ist. Bezeichnen wir also diese Differenz durch d, so ist

$$k_1 - k = K_1 - K = d.$$

Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$\tang k = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{r \sin C},$$

$$\tang k_1 = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h_1}{r \sin C};$$

und man hat daher jetzt die folgenden sechs Gleichungen:

$$C = 206264{,}8 \cdot \frac{e}{r} = \frac{e}{r} \cot 1'';$$

$$k_1 - k = d;$$

$$\tang k = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{r \sin C}, \quad \tang k_1 = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h_1}{r \sin C};$$

$$K = k - iC, \quad K_1 = k_1 - iC$$

mit den sechs unbekannten Grössen

$$e, \ C, \ k, \ k_1, \ K, \ K_1,$$

welche sich also mit Hülfe dieser sechs Gleichungen bestimmen lassen müssen. Man muss sich aber mit einer näherungsweisen Auflösung dieser Gleichungen begnügen.

Nehmen wir alle Winkel in Secunden ausgedrückt an, so lassen sich wegen der Kleinheit der Winkel C und k, k_1 statt der Gleichungen

$$\tang k = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{r \sin C}, \quad \tang k_1 = \tang \tfrac{1}{2}C + \frac{h_1}{r \sin C}$$

näherungsweise die beiden folgenden Gleichungen setzen:

$$k \sin 1'' = \tfrac{1}{2}C \sin 1'' + \frac{h}{rC \sin 1''},$$

$$k_1 \sin 1'' = \tfrac{1}{2}C \sin 1'' + \frac{h_1}{rC \sin 1''};$$

also

$$k = \tfrac{1}{2}C + \frac{h}{rC(\sin 1'')^2},$$

$$k_1 = \tfrac{1}{2}C + \frac{h_1}{rC(\sin 1'')^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Subtraction:

$$k_1 - k = \frac{h_1 - h}{rC(\sin 1'')^2};$$

also

$$C = \frac{1}{r(\sin 1'')^2} \cdot \frac{h_1 - h}{k_1 - k},$$

oder nach dem Obigen

$$C = \frac{1}{r(\sin 1'')^2} \cdot \frac{h_1 - h}{d}.$$

Führt man diesen Werth von C in die Gleichungen

$$k=\tfrac{1}{2}C+\frac{h}{rC(\sin 1'')^2},$$

$$k_1=\tfrac{1}{2}C+\frac{h_1}{rC(\sin 1'')^2}$$

ein, so erhält man:

$$k=\frac{1}{2r(\sin 1'')^2}\cdot\frac{h_1-h}{d}+\frac{dh}{h_1-h},$$

$$k_1=\frac{1}{2r(\sin 1'')^2}\cdot\frac{h_1-h}{d}+\frac{dh_1}{h_1-h}.$$

Hat man mittelst dieser Formeln k und k_1 gefunden, so ergeben sich K und K_1 mittelst der Formeln

$$K=k-iC,\quad K_1=k_1-iC;$$

also, nach gehöriger Substitution aus dem Obigen, mittelst der Formeln:

$$K=\frac{1-2i}{2}\cdot\frac{1}{r(\sin 1'')^2}\cdot\frac{h_1-h}{d}+\frac{dh}{h_1-h},$$

$$K_1=\frac{1-2i}{2}\cdot\frac{1}{r(\sin 1'')^2}\cdot\frac{h_1-h}{d}+\frac{dh_1}{h_1-h}.$$

Wollte man noch e haben, so hätte man nach dem Obigen

$$e=rC\operatorname{tang}1''=rC\sin 1'',$$

also

$$e=\frac{h_1-h}{d\sin 1''}.$$

Die Ausführung der obigen Methode unterliegt verschiedenen Schwierigkeiten; denn abgesehen von der Unsicherheit der Beobachtung auf einem so schwankenden Standpunkte wie der Mastkorb eines Schiffes ist, wird es auch den beiden Beobachtern wohl nur selten gelingen, mit demselben Punkte der Küste das beobachtete Gestirn zur Berührung oder Coincidenz zu bringen. Deshalb wird diese Methode auch nur selten auf der See angewandt.

Die Rechnung nach den in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln pflegt man sich durch Tafeln zu erleichtern, die sich in allen Sammlungen nautischer Tafeln finden. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tafeln ergiebt sich aus deren Ansicht leicht von selbst und braucht hier nicht noch besonders erläutert zu werden.

XI.

Ueber uneigentliche Punkte und Tangenten der Kegelschnitte.

Von
Herrn *Christoph Paulus*,
Lehrer der Mathematik an der Erziehungsanstalt auf dem Salon bei Ludwigsburg.

In einem früheren Aufsatze des Archivs Theil XXI. Seite 175. habe ich gezeigt, dass der Begriff der Ordnungselemente einförmiger involutorischer Grundgebilde einer Erweiterung fähig sei, und dass diese Begriffserweiterung einen bedeutenden Einfluss auf die ganze Lehre von den Kegelschnitten habe. So gewiss es nun auch ist, dass es für die Wissenschaft grossen Werth hat, Begriffe von einer solchen Allgemeinheit zu besitzen, wie sie dem Wesen des Objektes, an dem sie erscheinen, zukommen, so gewiss ist es auch, dass die Sucht zu verallgemeinern schon oft mehr Nachtheil als Vortheil gebracht hat. Ich habe daher in jener Abhandlung nicht blos die Möglichkeit einer Begriffserweiterung, sondern auch ihre Zweckmässigkeit und Nothwendigkeit, sowohl von der intensiven als auch von der extensiven Seite des Begriffes aus nachzuweisen gesucht. Ich habe gezeigt, wie auf jeden Fall auch in der einstimmigen Involution neben den Normalelementen noch zwei andere Elementenpaare, die sich wechselseitig decken, unterschieden werden müssen, weil sie hinsichtlich ihrer Lage ebenso ausgezeichnet sind, wie die Ordnungselemente der entgegengesetzten Involution, und es wurde auch für sie der Name „Ordnungselemente" in Anspruch genommen, weil sie mit dem, was man bisher unter diesem Begriff befasste, zwei coordinirte Arten eines höheren Begriffes darstellten. Ich habe sodann weiter nachgewiesen, wie diese Begriffserweiterung, in ihrer Anwen-

dung auf andere Gestalten des Raumes, namentlich auf die Kegelschnitte, eine sehr wichtige Stelle einnehme, indem sie nicht nur die Unterscheidung der imaginären Elemente entbehrlich mache und dadurch zu einer klareren Anschauung führe, sondern auch noch ein neues Feld für die Erforschung jener Gestalten eröffne, und namentlich auch geeignet sei, in den besonderen Formen der Kegelschnitte das Uebereinstimmende erkennen zu lassen. Um diess zu zeigen, genügte es, gewisse Eigenschaften der Kegelschnitte, welche besonders tauglich schienen, hervorzuheben, damit an ihnen der Nutzen jener Begriffserweiterung ersehen werden könnte. Statt der imaginären wurden uneigentliche Elemente des Kegelschnitts unterschieden, die vor jenen den Vorzug haben, wirklich zu existiren und construirt werden zu können. Nachdem ich nun in jener Abhandlung die Berechtigung der erweiterten Ordnungselemente, als auch, was damit zusammenhängt, die Einführung der uneigentlichen Elemente der Kegelschnitte nachgewiesen zu haben glaube, so habe ich mir auch die Pflicht auferlegt, die Lehre von den uneigentlichen Elementen der Kegelschnitte weiterhin in die Hand zu nehmen. Mein nächstes Geschäft war, das, was sich früher nur gelegentlich und für besondere Fälle ergeben hatte, auf seine allgemeinen Gesetze zurückzuführen und das, was unmittelbar mit denselben zusammenhängt, näher zu untersuchen. Die Resultate dieser Arbeit bin ich jetzt im Begriffe, der Oeffentlichkeit zu übergeben, weil ich hoffe, durch diese Mittheilung neue Kräfte für die Sache zu gewinnen und einen kleinen Beitrag für die Wissenschaft zu liefern. Ich gedenke zuerst die uneigentlichen Kegelschnitte auf einer gegebenen Richtung, sodann auf den Strahlen gewisser Vielstrahlen, nachher die uneigentlichen Tangenten eines gegebenen inneren Punktes und endlich diejenigen gewisser Punktreihen zu besprechen.

A. Die uneigentlichen Kegelschnittpunkte einer gegebenen Richtung.

Wo liegen die uneigentlichen Kegelschnittpunkte auf einer gegebenen, äusseren Geraden in der Ebene des Kegelschnitts? Diess ist die Frage, von der alles Andere abhängt. Die Antwort scheint nicht schwierig zu sein. Denn nimmt man auf einer solchen Geraden p zwei beliebige Punkte A und B und construirt ihre Polaren a und b im Kegelschnitt, so werden dieselben auf p zwei Punkte A' und B' bestimmen, die beziehungsweise den Punkten A und B conjugirt sind. Die Ordnungspunkte der einstimmigen Involution $AA'BB'$ sind die gesuchten uneigentlichen

Kegelschnittpunkte selbst, und da die Construktion derselben in der früheren Abhandlung Seite 177. gelehrt ist, so kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

Obgleich nun aber diese Construktion für alle gegebenen Geraden leicht ausführbar ist, so genügt sie doch nicht, wenn man beabsichtigt, die Gesetze zu entdecken, welchen jene uneigentlichen Kegelschnittpunkte unterworfen sind. Es wird nämlich bei dieser Construktion ein Hilfskreis benutzt, der die unmittelbare Beziehung zwischen jenen Punkten und der Curve des Kegelschnitts unterbricht und daher die wahre Einsicht unmöglich macht. Die Auflösung jener Aufgabe muss daher auf einem anderen direkten, alle fremden Mittelglieder ausschliessenden Wege versucht werden, — und diess soll nun in diesem ersten Abschnitte geschehen. Das Mittelglied des Kreises ist in der That auch entbehrlich, weil alle Kegelschnitte einem gemeinschaftlichen Gesetz der Polarität unterworfen sind, welches hiezu benutzt werden kann. Namentlich dient hiezu ein bekannter Satz, der Seite 247. meiner Grundlinien angeführt ist: „Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks in einem Kegelschnitt sich bewegen, während zwei Seiten desselben sich um zwei feste, einander conjugirte Punkte drehen, so dreht sich auch die dritte Seite um einen Punkt, den Pol der durch jene festen Punkte bestimmten Richtung.“ In der That darf dieser Satz nur umgekehrt werden, um sogleich in demselben das Mittel der gesuchten Construktion zu erkennen. In dieser Form lautet jener Satz folgendermaassen:

I. Theilt man einen Kegelschnitt durch eine Sehne, welche durch den Pol einer gegebenen Geraden geht, in zwei Abschnitte, und zeichnet in einem derselben einen Peripheriewinkel nach Belieben, so bestimmen die Schenkel desselben auf der gegebenen Geraden stets zwei Punkte, welche in Beziehung auf den Kegelschnitt conjugirt sind.

Ist also etwa P (Taf. III. Fig. 1.) der Pol der Geraden p im Kegelschnitt O, so wird man zu einem Punkt C der Geraden p den conjugirten Punkt C' dadurch finden, dass man die Sehne $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ nach Belieben durch P zieht, die Punkte C und $\mathfrak{C}$ durch eine Gerade verbindet, welche den Kegelschnitt in c trifft und die Richtung $c\mathfrak{C}'$ zieht, welche den gesuchten Punkt C' bestimmt. Diese Regel führt unmittelbar auch zur Construktion desjenigen Punktes der Involution der Geraden p, welcher ihrem Punkt des unendlichen Raumes conjugirt ist, nämlich zur Bestimmung des Centralpunktes. Es ist offenbar hiezu nichts nöthig, als den Pe-

ripheriewinkel so zu zeichnen, dass ein Schenkel desselben $\mathfrak{C}q \parallel p$ ist, so wird der andere Schenkel $q\mathfrak{C}'$ zu dem Normalpunkt Q führen, oder allgemein:

II. Ist ein Kegelschnitt und eine Gerade in einer Ebene gegeben, und zeichnet man in einem der Abschnitte, welche durch eine durch den Pol jener Geraden gehende Sehne gebildet werden, einen Peripheriewinkel so ein, dass ein Schenkel desselben mit der gegebenen Geraden parallel ist, so geht der andere Schenkel durch den Normalpunkt der Involution, welche durch die conjugirten Punkte jener Geraden gebildet wird.

Dieser Normalpunkt hat noch eine weitere Bedeutung für den Kegelschnitt; denn die Richtung PQ, welche durch denselben und den Pol bestimmt wird, ist die Polare des unendlich entfernten Punktes Q', der dem Normalpunkt Q conjugirt ist. Die zwei conjugirten Punkte Q und Q' der Richtung p bilden nämlich mit dem Pol P dieser Richtung ein Polardreieck $QQ'P$, in welchem auch QP die Polare von Q' ist. Die Gerade QP als Polare eines unendlich entfernten Punktes ist aber ein Durchmesser des Kegelschnitts. Man schliesst also:

III. Der Durchmesser eines Kegelschnittes geht durch den Pol und den Normalpunkt jeder Geraden, der er conjugirt ist.

Für den besonderen Fall einer Geraden, welche den Kegelschnitt schneidet und eine Sehne bildet, die von dem Normalpunkt halbirt wird, ist der letzte Satz wohl bekannt, in dieser beschränkten Form war er jedoch für den vorliegenden Zweck unbrauchbar, wo nur solche Gerade betrachtet werden sollen, welche den Kegelschnitt nicht schneiden. Zieht man nun durch den Pol P der Geraden p die Sehne $\mathfrak{MN} \parallel p$ (Taf. III. Fig. 2.), so ist auch sie dem Durchmesser conjugirt, da alle dem Durchmesser conjugirten Richtungen einander parallel sind, sie wird also auch von $\mathfrak{AB}$ in dem Punkte P halbirt werden. Verbindet man sodann die Endpunkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dieser Sehne mit den Endpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Durchmessers, so werden die Verbindungslinien $\mathfrak{AM}$ und $\mathfrak{BN}$, $\mathfrak{AN}$ und $\mathfrak{BM}$ paarweise in zwei Punkten M und N der Richtung p convergiren (weil p die Polare von P ist), und damit zwei weitere conjugirte Punkte der Involution der Richtung p liefern. Weil aber $\mathfrak{MN} \parallel p$ ist, so werden diese Geraden durch den Dreistrahl $\mathfrak{A}$ proportional getheilt, und wie P in der Mitte von $\mathfrak{MN}$ liegt, so muss auch Q in der Mitte von MN lie-

gen. Diess zeigt, dass M und N die Ordnungspunkte und somit auch die uneigentlichen Kegelschnittpunkte der Richtung p sind. Oder allgemein:

IV. Ist ein Kegelschnitt und eine Gerade in einer Ebene gegeben, so bestimmen der Durchmesser, welcher der Geraden conjugirt ist, und die Polare des Normalpunkts jener Geraden in ihren Endpunkten vier Richtungen, die paarweise in den uneigentlichen Kegelschnittpunkten jener Geraden convergiren.

Vermöge dieser vier Sätze können die uneigentlichen Kegelschnittpunkte auf direktem Wege in allen Fällen construirt werden, und es bleibt nur noch übrig, die Lage jener Punkte mit einander zu vergleichen, welche auf den Strahlen gewisser Vielstrahlen liegen, und diess wird in den zwei folgenden Abschnitten geschehen.

B. Die uneigentlichen Hyperbeldurchmesser.

Obgleich die uneigentlichen Hyperbelpunkte auf den Richtungen der imaginären Durchmesser in der früheren Abhandlung Seite 185. bereits betrachtet wurden, so muss dieser Gegenstand doch noch einmal aufgenommen werden, weil jetzt eine allgemeine Construktion vorliegt, die auf den besonderen Fall angewendet werden kann. Ist also CD (Taf. III. Fig. 3.) ein reeller Durchmesser einer Hyperbel, welche die Richtungen SS und $T\mathfrak{T}$ zu Asymptoten und den Punkt O zum Mittelpunkt hat, so findet man die Richtung des conjugirten imaginären Durchmessers dadurch, dass man den Strahl OC' sucht, welcher mit OC die Asymptotenrichtungen OS und $O\mathfrak{T}$ harmonisch trennt. Sollen sodann auf der Richtung $C'D'$ des imaginären Durchmessers die uneigentlichen Hyperbelpunkte gefunden werden, so müssen zuerst der Normalpunkt auf $C'D'$ und dessen Polare gesucht werden. Nach III. ist aber der Punkt O, in welchem die Richtung $C'D'$ vom conjugirten Durchmesser CD geschnitten wird, dieser Normalpunkt selbst, und die Polare dieses Punktes O ist die Berührungssehne seiner Tangenten. Die Tangenten des Mittelpunkts O sind aber die Asymptoten SS und $T\mathfrak{T}$ der Hyperbel und die Berührungssehne derselben ist eine Gerade des unendlichen Raumes. Obgleich jedoch diese Gerade des unendlichen Raumes nicht gezeichnet werden kann, so kann man doch durch die Punkte, in welchen sie die Hyperbel schneidet, gerade Richtungen ziehen, denn jede Richtung, die mit einer Asymptote parallel ist, ist als

eine Linie zu betrachten, die mit ihr in ihrem unendlich entfernten Berührungspunkt convergirt, durch welchen auch die Berührungssehne geht. Man hat also nur nach der Regel IV. durch die Endpunkte C und D des gegebenen reellen Durchmessers parallele Richtungen mit den Asymptoten zu ziehen, um auf der Richtung des imaginären Durchmessers die gesuchten uneigentlichen Hyperbelpunkte C' und D' zu bestimmen; allgemein:

V. **Wenn man von dem Scheitel eines reellen Durchmessers einer Hyperbel aus zwei Richtungen mit den Asymptoten parallel zieht, so bezeichnen dieselben auf der Richtung des conjugirten imaginären Durchmessers die zwei uneigentlichen Hyperbelpunkte.**

Die uneigentlichen Hyperbelpunkte auf allen stetig aufeinander folgenden Richtungen der imaginären Durchmesser werden offenbar auch eine stetige Punktreihe, eine Linie erzeugen, welche meines Wissens vom Standpunkt der neueren Geometrie noch nicht entwickelt wurde, obgleich sie manches Interessante darbietet. Construirt man daher die uneigentlichen Hyperbelpunkte A' und B', C' und D' dadurch, dass man von den Scheiteln A und C die Richtungen AB' und CD' parallel SS und von den Scheiteln B und D die Richtungen BA' und DC' parallel SS zieht, so ist zu untersuchen, wie sich das System der uneigentlichen Hyperbelpunkte A', C', B', D' zu dem System der eigentlichen Hyperbelpunkte A, C, B, D verhalte. Weil nun die Asymptoten OS und OT durch die conjugirten Durchmesser OA und OA', OC und OC' etc. harmonisch getrennt werden, so folgt, dass

$$\text{Vielstrahl } O,TACS \barwedge O,TA'C'S.$$

Weil ferner die Vierecke $AA'BB'$, $CC'DD'$ etc. Parallelogramme sind, so wird man schliessen, dass der Vielstrahl der Parallelen SS, CD', AB' etc. dem Vielstrahl der Parallelen TS, $C'D$, $A'B$ gleich ist, oder wenn man den Punkt des unendlichen Raumes, in welchem alle diese Parallelen convergiren, mit S bezeichnet, so folgt

$$\text{Vielstrahl } S,ACO \barwedge S,A'C'O.$$

Es sind also die zwei Vielstrahlen $O,TACS$ und $S,TACO$, welche in den Punkten T, A, C, O der gegebenen Hyperbel convergiren, den zwei Vielstrahlen $O,TA'C'S$ und $S,TA'C'O$ des zu bestimmenden Systems conform. Die homologen Strahlen zweier conformen Vielstrahlenpaare bestimmen aber zwei collineäre Systeme (Grundl. §. 43). Es ist also das System der uneigentlichen Hyperbelpunkte $TA'C'OS$ den Punkten $TACOS$ der gegebenen

Hyperbel collineär; die uneigentlichen Hyperbelpunkte liegen somit ebenfalls auf der Curve eines Kegelschnitts. Noch mehr! weil der Punkt O, so wie die unendlich entfernten Punkte S und $\mathfrak{S}$, T und $\mathfrak{T}$ sich selbst entsprechende Punkte der zwei Systeme sind, so hat die Curve der uneigentlichen Hyperbelpunkte wie die gegebene Hyperbel zwei Punkte im unendlichen Raume und gehört also ebenfalls unter die Klasse der Hyperbeln; und zwar hat sie mit der gegebenen Hyperbel die Asymptoten gemeinschaftlich. Bemerkt man noch, dass $A'B'$ und $C'D'$ etc. Durchmesser der abgeleiteten Hyperbel sind, so zieht man folgenden Schluss:

VI. Die Endpunkte der uneigentlichen Durchmesser einer Hyperbel liegen wieder auf der Curve einer Hyperbel, welche mit der gegebenen Hyperbel die Asymptoten und überhaupt alle Durchmesser gemeinschaftlich hat, doch hinsichtlich der letzteren mit dem Unterschiede, dass die eigentlichen Durchmesser der einen Hyperbel zugleich auch die uneigentlichen der anderen sind.

Weil jede Hyperbel durch einen eigentlichen und den conjugirten uneigentlichen Durchmesser vollkommen bestimmt ist (Grundlinien, Aufg. 81. c.), so kann man diesen Satz auch umkehren und sagen:

VII. Wenn zwei Hyperbeln zwei einander conjugirte Durchmesser auf die Weise mit einander gemein haben, dass der eigentliche Durchmesser der einen Hyperbel zugleich der uneigentliche der anderen ist, so haben sie auch die Asymptoten und alle anderen Durchmesser auf eben dieselbe Weise mit einander gemein.

Schon längst sah man sich veranlasst, diese zweite abgeleitete Hyperbel zu unterscheiden, und hat sie mit dem Namen der zugeordneten Hyperbel bezeichnet und gefunden, dass sie eine solche Begrenzung der imaginären Hyperbeldurchmesser begründe, welche es möglich mache, für eine Reihe von Eigenschaften, die an der Ellipse wahrgenommen werden, eine Analogie bei der Hyperbel nachzuweisen. Den tieferen Grund für diese Analogie glaube ich durch die im Vorausgehenden gegebene Anschauungsweise aufgeschlossen zu haben, gedenke jedoch, nicht länger hiebei zu verweilen.

C. Die uneigentlichen Kegelschnittpunkte auf einem Parallelvielstrahl.

Durch dasselbe Mittel und mit derselben Leichtigkeit, wie bei dem uneigentlichen Hyperbeldurchmesser bestimmt man auch die Curve, welche durch die einem Durchmesser conjugirten uneigentlichen Sehnen eines Kegelschnitts erzeugt wird, und es hat die Kenntniss derselben um so mehr Interesse, als man hier nicht blos auf eine einzige Klasse von Kegelschnitten beschränkt ist. Gesetzt also, es sei ein Kegelschnitt O (Taf. III. Fig. 4.) mit zwei einander conjugirten Durchmessern AB und $\mathfrak{AB}$ gegeben; so sind alle Richtungen g', h', a, welche mit einem jener Durchmesser, etwa mit $\mathfrak{AB}$, parallel sind, dem anderen AB conjugirt, und die Richtung a, welche durch den Scheitel A dieses Durchmessers geht, berührt den Kegelschnitt. Wenn die Richtungen g', h' den Kegelschnitt nicht schneiden, so bezeichnet der Durchmesser AB auf denselben doch auch die Normalpunkte G' und H' (III.); construirt man also zu diesen Punkten die Polaren g und h im Kegelschnitt, so werden dieselben mit dem Durchmesser AB in ihren Curvenpunkten die inbeschriebenen Vierecke $ACBD$ und $AEBF$ bestimmen, deren Gegenseiten in den uneigentlichen Kegelschnittpunkten C' und D', E' und F' der Richtungen g' und h' convergiren. Weil nun aber in dem Vierseit $ACBD$ die Diagonale AB durch die Diagonalen CD und $C'D'$ harmonisch getheilt wird, so sind die Punkte B, A, G', G und also auch die Punkte B, γ, C', C harmonisch, so fern die letzteren durch die Parallelen a, g', g auf BC bestimmt werden. Hieraus folgt, dass auch der Vierstrahl $A,B\gamma C'C$ und aus gleichem Grund auch der Vierstrahl $A,B\gamma E'E$ und überhaupt jeder andere ähnlich construirte Vielstrahl harmonisch sei. Hieraus schliesst man wieder weiter, dass

$$\text{Vielstrahl } A,BaCE \barwedge A,BaC'E',$$

und da ohnehin

$$\text{Vielstrahl } B,ACE \barwedge B,ACE,$$

so hat man zwei Paare conformer Vielstrahlen, welche in den Convergenzpunkten ihrer homologen Strahlenpaare zwei collineare ebene Systeme bestimmen; es ist also das System der Punkte B, A, C', E' dem System der Punkte B, A, C, E collinear, und weil die letzteren der Curve eines Kegelschnitts angehören, so liegen auch die ersteren auf der Curve eines Kegelschnitts. Diese zwei Kegelschnitte haben überdiess eine perspektivische

Lage gegen einander, weil ihre Systeme den Vielstrahl B, ACE gemeinschaftlich haben. Der Scheitel B dieses Vielstrahls ist das Centrum und die Richtung a der Scheiteltangente ist, als eine beiden Systemen gemeinschaftliche, auch durch das Centrum gehende Gerade die Axe der Collineation. Weil ferner die Verbindungslinien CD' und $C'D$ der sich nicht entsprechenden Punkte der homologen Paare C und C', D und D' in einem Punkt A der Axe convergiren, so sind die Systeme überdiess auch noch involutorisch. (Grundl. §. 48.)

Es ist auch leicht zu ersehen, welcher Art der abgeleitete Kegelschnitt ist. Weil nämlich die Richtung des conjugirten Durchmessers $\mathfrak{AB}$ nicht nur mit der Axe a parallel ist, sondern auch den Strahl BA hälftet, so ist sie die Gegenaxe der zwei involutorischen Systeme. (Grundl. §. 48.) Ist nun der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, so bezeichnet die Richtung der Gegenaxe $\mathfrak{AB}$, als die eines Durchmessers, wirklich zwei eigentliche Punkte ihrer Curve. Diesen Curvenpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Systems der Ellipse entsprechen, als Punkten der Gegenaxe, im System des abgeleiteten Kegelschnittes $C'AD'$ zwei eigentliche Punkte des unendlichen Raumes; der Kegelschnitt $C'AD'$ ist also eine Hyperbel (Grundl. §. 101.), und zwar sind die Richtungen ST' und $S\mathfrak{T}$, welche mit $A\mathfrak{A}$ und $A\mathfrak{B}$ parallel gezogen werden, die Asymptoten der Hyperbel.

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel, so trifft die Richtung der Gegenaxe, $\mathfrak{AB}$, als die eines imaginären Durchmessers, welcher dem reellen Durchmesser AB conjugirt ist, keine eigentlichen Punkte der Hyperbelcurve, es geht also auch die homologe Gerade des abgeleiteten Kegelschnitts, welche im unendlichen Raume liegt, durch keine eigentlichen Punkte dieser Curve, und dieselbe ist daher eine Ellipse. (Grundl. §. 100.)

Ist endlich der gegebene Kegelschnitt eine Parabel, so liegt der Scheitel A und also auch die Collineationsaxe a im endlichen Raum, der andere Scheitel B des Durchmessers aber, d. i. das Centrum der Collineation, liegt im unendlichen Raum, die zwei Systeme sind also affin und der abgeleitete Kegelschnitt ist daher eine Parabel, ja noch mehr, die Systeme dieser zwei Parabeln sind, weil sie involutorisch, nicht blos affin, sondern auch uniform (Grundl. §. 45. a.), die zwei Parabeln sind also congruent. Oder wenn man alle diese Resultate zusammenfasst:

VIII. Die uneigentlichen Sehnen, welche einem Durchmesser eines Kegelschnittes conjugirt sind, gehören ebenfalls wieder einem Kegelschnitt an, wel-

eher mit dem gegebenen Kegelschnitt den gegebenen und den conjugirten Durchmesser gemein hat. Dabei ist noch besonders zu bemerken:

a) dass einer dieser zwei Kegelschnitte eine Hyperbel ist, wenn der andere eine Ellipse ist und umgekehrt, und dass die Asymptoten der Hyperbel den Seiten des Vierecks parallel gehen, welches durch die gemeinschaftlichen conjugirten Durchmesser bestimmt wird;

b) dass der eine derselben eine Parabel ist, so oft der andere diese Gestalt hat, und dass diese zwei Parabeln einander congruent sind;

c) dass die zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung haben;

d) dass sie sich in involutorischer, perspektivischer Lage befinden, so nämlich, dass ein Scheitel des gemeinschaftlichen eigentlichen Durchmessers das Centrum, und die Tangente des anderen Scheitels die Axe und der gemeinschaftliche conjugirte Durchmesser die Gegenaxe der involutorischen Collineation ist.

Weil ein Kegelschnitt durch zwei conjugirte Durchmesser bestimmt ist, von welchen bekannt ist, ob sie zur Gattung der eigentlichen oder uneigentlichen gehören, so kann man den vorausgehenden Satz auch umkehren und sagen:

IX. Wenn zwei Kegelschnitte ein Paar conjugirte Durchmesser gemein haben, von welchen der eine in beiden Kegelschnitten ein eigentlicher, der andere aber in dem einen ein eigentlicher und in dem anderen ein uneigentlicher ist, so sind die dem gemeinschaftlichen eigentlichen Durchmesser conjugirten eigentlichen Sehnen des einen Kegelschnitts zugleich auch die uneigentlichen Sehnen des anderen Kegelschnitts.

Dieser Umkehrungssatz führt noch weiter. In der Hyperbel können nämlich zwar nur diejenigen Sehnen uneigentliche sein, welche einem eigentlichen Durchmesser conjugirt sind; in ihr giebt es daher für jedes Paar conjugirter Durchmesser nur eine einzige Schaar uneigentlicher Sehnen, welche einer Ellipse angehören. In der Ellipse dagegen, die nur eigentliche Durchmesser hat, denen immer auch uneigentliche Sehnen conjugirt sind, giebt

es für jedes Paar conjugirter Durchmesser auch zwei Schaaren von uneigentlichen Sehnen, die mit zwei conjugirten Durchmessern parallel sind und zwei Hyperbeln angehören. Jede dieser Hyperbeln hat dieselben zwei Durchmesser mit der Ellipse gemein, nur mit dem Unterschiede, dass derselbe Durchmesser in der einen Hyperbel als ein eigentlicher und in der anderen als ein uneigentlicher figurirt. Hieraus folgt aber, dass diese zwei Hyperbeln zugleich auch noch in dem Verhältniss stehen, dass die eine Hyperbel die uneigentlichen Durchmesser der anderen enthält. (VII.)

X. Die zwei Hyperbeln, welche in einer Ellipse durch die uneigentlichen Sehnen erzeugt werden, die zweien conjugirten Durchmessern parallel gehen, stehen auch untereinander in dem Verhältniss, dass die eigentlichen Durchmesser der einen zugleich auch die uneigentlichen Durchmesser der anderen sind.

XI. Wenn man zwei einander zugeordnete Hyperbeln hat (d. h. in welchen die eigentlichen Durchmesser der einen die uneigentlichen der anderen sind) und wenn man zu einem gemeinschaftlichen Durchmesser derselben die Ellipse der conjugirten uneigentlichen Sehnen construirt, so ist diese Ellipse zugleich auch die Curve, welche die dem anderen conjugirten Durchmesser der anderen Hyperbel parallelen, uneigentlichen Sehnen einschliesst.

D. Die uneigentlichen Tangenten eines Punktes.

Die in einem Punkte eines Kegelschnitts convergirenden Ordnungsstrahlen der in jenem Punkte convergirenden, conjugirten, involutorischen Strahlen heissen die uneigentlichen Tangenten jenes Punktes. Diese uneigentlichen Tangenten der inneren Punkte um die uneigentlichen Kegelschnittpunkte der äusseren Richtungen stehen nun zwar in einem Verhältniss der Reciprocität, und es könnte desswegen scheinen, dass es gerathener gewesen wäre, die reciproken Sätze gleichzeitig zu entwickeln und neben einander zu stellen. Allein ein tieferes Eingehen zeigt, dass dieses Verhältniss der Reciprocität keine durchgreifende Dualität begründet, indem bald bedeutende Unterschiede sich einstellen, welche dem Fall der uneigentlichen Tangenten eine gewisse Eigenthümlichkeit verleihen. Ein Grund dieser Verschiedenheit wurde schon beim einstimmigen involutorischen Vielstrahl in der früheren Abhandlung Seite 182. erwähnt. Obgleich nämlich in einem solchen

Vielstrahl jede Transversale in einer involutorischen Punktreihe geschnitten wird, so stimmen doch die Normal- und Ordnungsstrahlen der Reihe nicht mit den Normal- und Ordnungsstrahlen des einstimmigen involutorischen Vielstrahls überein, wie diess allerdings bei den Ordnungspunkten der entgegengesetzten Involution der Fall ist, sondern es findet diess vielmehr nur in dem besonderen Falle Statt, wenn die Transversale auf dem Normalstrahle des Vielstrahls senkrecht steht. Diese Unterschiede, welche schon an den einförmigen involutorischen Grundgebilden zu bemerken sind, offenbaren sich noch gewaltiger in dem Polarsystem eines Kegelschnitts und heben vollständig die Dualität auf, welche hinsichtlich der involutorischen Punktreihen und der involutorischen Vielstrahlen erwartet werden könnte, sobald man nämlich dieselben in Betreff ihrer Normal- und Ordnungselemente zu vergleichen sucht. Diese abweichenden Verhältnisse veranlassten mich, den Fall der uneigentlichen Tangenten von demjenigen der uneigentlichen Punkte zu trennen und einer besonderen Betrachtung zu unterziehen.

Was nun zunächst die Construktion der uneigentlichen Tangenten selbst betrifft, so ist vorerst zu bemerken, dass sie, wie die entsprechende über die uneigentlichen Punkte einer äusseren Richtung, dadurch jederzeit gelöst werden kann, dass man die Ordnungsstrahlen des durch die conjugirten Richtungen gebildeten involutorischen Vielstrahls nach der Seite 181. XXI. Bds. dieses Archivs angegebenen Regel mittelst eines Hilfskreises aufsucht. Allein auch hier ist diese Construktion ungenügend und man ist darauf hingewiesen, eine direkte Auflösung ohne Hilfscurve aufzusuchen. Diess hat, so lange man sich noch auf's Allgemeine beschränken will, keine Schwierigkeit, denn so lange nicht nach den Normal- und Ordnungszahlen selbst gefragt wird, gelten noch die Dualitätsgesetze der Reciprocität. In der That, wenn es sich blos darum handelt, zu jedem Strahl eines gegebenen Punktes den conjugirten zu finden, so leisten die bei I. angeführten Sätze, wenn man ihre reciproke Form aufsucht, die nöthigen Dienste. Wenn zwei Ecken eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Dreiecks sich auf zwei einander conjugirten Richtungen bewegen, so bewegt sich auch das dritte Eck des Dreiecks auf einer Geraden, nämlich auf der Polaren des Convergenzpunktes jener zwei conjugirten Richtungen. Dieser Satz führt sodann zu folgender Construktion der conjugirten Richtungen:

XII. Wenn zwei Tangenten eines Kegelschnitts von einer dritten Tangente geschnitten werden, so sind jede zwei Richtungen einander conjugirt, welche

durch die Schnittpunkte der letzteren Tangente gehen und in einem Punkte der Berührungssehne der zwei ersteren Tangenten convergiren.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist auch leicht durch die bekannten Eigenschaften des umbeschriebenen Vierseits nachzuweisen. Werden nämlich die Tangenten AF und DF (Taf. III. Fig. 5.) durch eine dritte Tangente in den Punkten B und C geschnitten und zieht man durch die Schnittpunkte B und C zwei Richtungen, die auf der Berührungssehne MR der zwei ersteren Tangenten in dem Punkte O convergiren, und zieht man nun noch eine Sehne NS, welche durch den Berührungspunkt N der dritten Tangente und durch den Punkt O geht, und construirt man endlich auch noch die Tangente des Punktes S, welche die zwei ...ten Tangenten in den Punkten A und D schneidet, so ist ...BCD ein umbeschriebenes Vierseit, dessen Diagonalen AC, ...D und EF durch die Convergenzpunkte O, O', O'' der Gegen...ten des inbeschriebenen Vierecks $MNRS$ gehen, welches mit ...nen Ecken in den Berührungspunkten des umbeschriebenen ...erseits liegt. Es ist aber bekannt, dass $OO'O''$ ein Polardrei...k ist, in welchem jede zwei Seitenrichtungen, also auch OO' ...d OO'' oder OC und OB, einander conjugirt sind.

Obgleich nun aber der Satz XII. ein bequemes Mittel dar...tet, um in jedem Punkt O zu einer gegebenen Richtung OB ... conjugirte OC zu construiren, so leistet er doch für die Con...uktion der Normal- und Ordnungsstrahlen des Punktes O nichts. ...ch sucht man umsonst die Construktion der Normal- und Ord...gspunkte der involutorischen Punktreihen in ihre reciproke ...n umzuwandeln und dadurch zum erwünschten Ziele zu gelan...; man überzeugt sich im Gegentheil, dass die Dualität eben ... aufhört, wo man zu diesen Hauptelementen der Involution ...geben will. Bei der geraden involutorischen Punktreihe, welche ...Polarsystem eines Kegelschnitts durch die conjugirten Punkte ...r Richtung gebildet wird, ist ein Normalpunkt als der Punkt ... unendlichen Raumes bekannt, und der andere im endlichen ...n wird durch den conjugirten Durchmesser auf jener Rich... sogleich bestimmt; bei dem involutorischen Vielstrahl, wel... durch die in einem Punkt convergirenden Richtungen eines ...systems gebildet wird, ist weder ein Normalstrahl von selbst ...nt, noch kann der andere durch sein Verhältniss zum Mit...kt des Kegelschnitts bestimmt werden. Der Mittelpunkt ...Kegelschnittes erhält seine Bedeutung durch seine Beziehung ...n involutorischen Punktreihen des Kegelschnitts, er ist näm...der constante Normalpunkt für alle durch ihn gehenden Rich-

tungen, und auf allen anderen Richtungen wird der Normalpunkt durch den ihnen conjugirten Durchmesser bezeichnet. Für die involutorischen Vielstrahlen der Kegelschnittpunkte hat der Mittelpunkt keine andere Bedeutung als jeder andere Punkt; er hat auch seine Normalstrahlen, die Axen, und seine Ordnungsstrahlen. In dieser Hinsicht sind vielmehr die Brennpunkte des Kegelschnittes ausgezeichnet, denn es ist der involutorische Vielstrahl jedes Brennpunktes rechtwinklig, d. h. es sind jede zwei Richtungen, die in ihm convergiren und senkrecht auf einander stehen, conjugirt; es können also jede zwei solche Richtungen als Normalstrahlen betrachtet werden. Auch dienen die Brennpunkte zur Construktion der Normalstrahlen jedes anderen Punktes, wie folgende Regeln angeben:

XIII. Die Normalstrahlen eines Brennpunktes sind unbestimmt, es bilden die conjugirten Richtungen eines Brennpunktes einen rechtwinkligen involutorischen Vielstrahl, in welchem jedes Paar auf einander senkrechter Richtungen als Normalstrahlen betrachtet werden können.

XIV. Die Normalstrahlen irgend eines anderen Punktes in dem Polarsystem des Kegelschnitts sind die Halbirungslinien der Winkel, die durch die in jenem Punkt convergirenden Brennstrahlen gebildet werden.

XV. Für einen Punkt auf der Richtung einer Axe sind diese Axe selbst und die auf derselben senkrechte Richtung zugleich auch die Normalstrahlen.

Diese Sätze wurden von Professor v. Staudt in seiner „Geometrie der Lage Seite 208." einfach dadurch bewiesen, dass er die Punkte untersucht, in welchen die Axen durch zwei senkrecht auf einander stehende conjugirte Richtungen geschnitten werden. Zwei solche Punkte haben nämlich die Eigenschaft, dass jede zwei durch sie gehenden und auf einander senkrechten Richtungen conjugirt sind, und dass sie, wenn sie auf der grossen Axe der Ellipse oder auf der reellen Axe der Hyperbel liegen, die Brennpunkte harmonisch trennen. Ich erlaube mir, bei dieser Gelegenheit auf die Wichtigkeit dieser Sätze aufmerksam zu machen. Sie schliessen das Wesen der Brennpunkte auf; sie zeigen, dass die Brennpunkte für die involutorischen Vielstrahlen eines Kegelschnitts dieselbe Bedeutung haben, wie der Mittelpunkt für die involutorischen Punktreihen; sie zeigen ferner, dass im Kreis die conjugirten Durchmesser nur desshalb senkrecht auf einander stehen, weil im Mittelpunkt des Kreises die Brennpunkte vereinigt sind;

sie zeigen, warum zwei Kegelschnitte, wenn sie einen Brennpunkt gemeinschaftlich haben, auch zugleich in ihm einen Vielstrahl gemeinschaftlich haben, und desshalb für diesen Brennpunkt als Centrum perspektivisch collineär sind.

Es ist nun noch übrig, zu untersuchen, wie man von den Normalstrahlen aus auch zu den Ordnungsstrahlen eines Punktes gelangen kann. Hat man nun für einen nach Belieben gegebenen Punkt P (Taf. III. Fig. 6.) die Brennstrahlen PF und PF' und die Normalstrahlen AB und CD, d. h. also die Halbirungslinien des Winkels FPF' und seines Nebenwinkels construirt, so wird das Viereck $ACBD$, welches durch die Normalstrahlen auf der Curve bestimmt wird, zum Ziele führen. Die Richtungen PG und PE, welche den Punkt P mit den Convergenzpunkten der Gegenseiten dieses Vierecks verbinden, sind nämlich ebenfalls conjugirt, als Seiten des zum inbeschriebenen Viereck gehörigen Polardreiecks PGE. Vermöge einer bekannten Eigenschaft des Vierecks werden aber die Richtungen AB und CD durch die Richtungen PG und PE harmonisch getrennt, und folglich werden die Richtungen AB und CD, weil sie zugleich senkrecht auf einander stehen, die Winkel der Strahlen PG und PE halbiren. Diess zeigt, dass die Strahlen PG und PE die Ordnungsstrahlen des involutorischen Vielstrahls P sind; oder weil diese Ordnungsstrahlen die uneigentlichen Tangenten des Punktes P heissen, so folgt:

XVI. Die zwei uneigentlichen Tangenten eines Punktes im Innern eines Kegelschnitts gehen durch die Convergenzpunkte der Gegenseiten desjenigen inbeschriebenen Vierecks, dessen Ecken durch die Normalstrahlen jenes Punktes bezeichnet werden.

E. Die uneigentlichen Tangenten der Punkte einer Axe.

Construirt man die uneigentlichen Tangenten, welche in einem Punkte einer Axe eines Kegelschnittes convergiren, mit einiger Aufmerksamkeit, so entdeckt man auch die Gestalt der Curve, welche durch alle in den Punkten einer Axe convergirenden uneigentlichen Tangenten eingehüllt wird. Die Normalstrahlen eines solchen Punktes E (Taf. III. Fig. 7.) sind die Axe AB und die in dem Punkte E senkrecht zu ihr stehende Sehne CD. (XV.) Durch diese Normalstrahlen wird das Viereck $ACBD$ bestimmt, und die Convergenzpunkte C' und D' seiner Gegenseiten mit

dem Punkte E verbunden liefern sodann die uneigentlichen Tangenten EC' und ED' des Punktes E. (XVI.) Hiebei ist aber nicht zu übersehen, dass dieser Construktion gemäss die Richtung $C'D'$ die Polare des Punktes E und also senkrecht zur Axenrichtung AB ist, dass ferner der Punkt E', in welchem diese Richtung von der Axe geschnitten wird, der Normalpunkt derselben (III.), und dass die Punkte C' und D' selbst die uneigentlichen Kegelschnittpunkte der Richtung $C'D'$ sind. (IV.) Nun weiss man ferner aus VIII., dass das System der uneigentlichen Kegelschnittpunkte auf den der Axe AB conjugirten Richtungen einen Kegelschnitt zusammensetzen, der dem gegebenen Kegelschnitt für den Scheitel B als Centrum und die Scheiteltangente a als Axe involutorisch collineär ist, und hieraus folgt, dass also die Punkte C und C', D und D', E und E' homologe Punkte, und folglich CE' und $C'E$, DE' und $D'E$ homologe Richtungen dieser Systeme sind. Es ist aber nach einem bekannten Satze über das inbeschriebene Viereck die Richtung CD die Polare des Punktes E', die Richtungen CE' und DE' sind also Tangenten des gegebenen Kegelschnittes CAD; die homologen Richtungen $C'E$ und $D'E$ des collineären Systems werden also ebenfalls den homologen Kegelschnitt $C'AD'$ berühren und mit CE' und DE' in den Punkten γ, δ der Axe convergiren. Es folgt:

XVII. Die zwei uneigentlichen Tangenten eines Punktes auf der Axe eines Kegelschnitts sind zugleich auch die eigentlichen Tangenten desjenigen Kegelschnitts, welcher die uneigentlichen, derselben Axe conjugirten Sehnen des Kegelschnitts einschliesst; die uneigentlichen Tangenten, welche in den Punkten einer Axe convergiren, hüllen also einen Kegelschnitt ein, und zwar ist diess zugleich derjenige, welcher auch die uneigentlichen, derselben Axe conjugirten Sehnen einschliesst.

Diese schöne doppelte Uebereinstimmung der zwei Kegelschnitte findet nur dann Statt, wenn dieselben die Richtung einer Axe mit einander gemeinschaftlich haben. Im Kreis allein, wo alle Durchmesser die Eigenschaft der Axen theilen, ist jene Uebereinstimmung allgemein. Die Hyperbel, welche zugleich die uneigentlichen, einem Durchmesser des Kreises conjugirten Sehnen einschliesst und von den uneigentlichen Tangenten der Punkte jenes Durchmessers eingehüllt wird, hat mit dem Kreise ein Paar conjugirter Durchmesser gemein (VIII.), und ist also gleichseitig, oder:

XVIII. Die Curve, welche zugleich die uneigent-

lichen, **einem Kreisdurchmesser conjugirten Sehnen einschliesst und von den in den Punkten jenes Durchmessers convergirenden uneigentlichen Tangenten eingehüllt wird, ist die gleichseitige Hyperbel, welche jenen Kreisdurchmesser zur reellen Axe hat.**

Dieser Satz verdient desshalb eine gewisse Beachtung, weil er von einer neuen Seite her die Gestaltsverwandtschaft dieser zwei Kegelschnitte bestätigt, ja sogar die gleichseitige Hyperbel unmittelbar in den Bereich des Kreises hereinzieht. Auch die besonderen Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel können von diesem Standpunkt aus leicht erkannt werden, so namentlich die Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel durch zwei gleiche projectivische Vielstrahlen. Betrachtet man z. B. in Taf. III. Fig. 8. die homologen Richtungen AC und AC', AE und AE', welche die Richtungen des Durchmessers AB und der Scheiteltangente harmonisch theilen, so folgt, weil im Kreise die Scheiteltangente stets senkrecht auf dem Durchmesser steht, dass

$$\left.\begin{array}{l}\angle aAC=\angle aAC' \\ \angle aAE=\angle aAE'\end{array}\right\} \text{(Grundl. §. 72. d.)}$$

während im Kreise wie bekannt:

$$\angle aAC=\angle ABC.$$
$$\angle aAE=\angle ABE;$$

folgt

$$\angle aAC'=\angle ABC,$$
$$\angle aAE'=\angle ABE;$$

also es ist Vielstrahl $B,AC'E'=A,aC'E'$.

Der Satz XVII. giebt auch ein leichtes Mittel an die Hand, die Winkel der uneigentlichen Tangenten eines Kegelschnittes, welche in Punkten ihrer Axen convergiren, mit einander zu vergleichen, weil jener Satz den Fall der uneigentlichen Tangenten eines solchen Kegelschnitts sogleich in denjenigen der eigentlichen Tangenten eines anderen Kegelschnittes verwandelt. Will man die auf diese Weise sich ergebenden Gesetze in Worte fassen, so ist daran zu erinnern, dass die Neigung zweier Linien nicht durch den kleinsten Winkel, den sie mit einander machen, also durch einen stumpfen Winkel, sondern stets durch den spitzen Winkel, den Nebenwinkel des ersteren, gemessen werden

soll. Diess vorausgesetzt wird man vermittelst XVII. leicht folgende Sätze finden:

XIX. In der Ellipse finden hinsichtlich der Winkel, welche die uneigentlichen Tangenten der Axenpunkte bilden, folgende Gesetze Statt:

a) der Winkel der uneigentlichen Tangenten des Mittelpunktes ist spitz, und zwar liegt die grosse Axe im spitzen Winkel und die kleine Axe in dessen stumpfem Nebenwinkel;

b) in den Scheiteln der Axen ist dieser Winkel ein absolutes Minimum;

c) in den Punkten der kleinen Axe wächst er stetig vom Scheitel bis zum Mittelpunkt;

d) in den Punkten der grossen Axe wächst er stetig vom Mittelpunkt bis zu den Brennpunkten, wo er sein absolutes Maximum erreicht;

e) von den Brennpunkten aus gegen die benachbarten Scheitel nimmt er stetig ab und erreicht in den Scheiteln selbst sein absolutes Minimum.

XX. In der Hyperbel befolgt der Winkel, welcher durch die zwei in einem inneren Punkt der reellen Axe convergirenden uneigentlichen Tangenten gebildet wird, folgendes Grössegesetz: er erreicht innerhalb jedes Hyperbelastes im Scheitel und im Punkt des unendlichen Raumes sein absolutes Minimum, wächst mit der Annäherung an den Brennpunkt und erreicht in dem Brennpunkte selbst sein absolutes Maximum.

XXI. Die Parabel verhält sich hinsichtlich der Winkel, welche die uneigentlichen in den inneren Punkten ihrer Axe convergirenden Tangenten mit einander machen, ganz wie die Hyperbel.

Zum Schluss mag noch bemerkt werden, dass diese Sätze unter Anderem auch zeigen, dass in dem Polarsystem eines Kegelschnitts keine Punkte gefunden werden, welche mit den Brennpunkten die Eigenschaft theilten, dass der involutorische Vielstrahl ihrer conjugirten Richtungen rechtwinklig wäre. Denn ein solcher Punkt existirt nach den vorausgehenden Sätzen auf den Richtungen der Axen nicht, und dass auch sonst in der Fläche

des Kegelschnitts keiner sich vorfindet, das sieht man daran, dass jeder Durchmesser schief auf den ihm conjugirten Richtungen steht, was nicht sein könnte, wenn in irgend einem Punkte nur rechtwinklige Richtungen einander conjugirt wären. *)

XII.

Ueber die Fusspunkten-Flächen.

Von

Herrn *L. Mossbrugger*,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Wenn eine Fläche F durch eine Gleichung zwischen drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, und ausserhalb derselben ein Punkt P mittelst seiner ebenfalls rechtwinkligen Coordinaten α, β, γ gegeben ist, und man denkt sich die ganze Fläche F durch eine ununterbrochene Folge von tangirenden Ebenen umhüllt, und fällt von P auf jede dieser Ebenen einen Perpendikel, so bilden die Fusspunkte dieser Perpendikel eine neue Fläche f, welche, analog mit den oft behandelten Fusspunkten-Curven, die Fusspunkten-Fläche der Fläche F genannt wird. Der feste Punkt P heisst, in Beziehung auf die Fläche f, ihr Pol. Die Coordinaten des Fusspunktes eines solchen Perpendikels seien t, u, v. Hat man nun x, y, z und ihre Ableitungen als Funktionen von t, u, v vorgestellt, so dass sie unter der Form:

$$x=\varphi(t,u,v);\quad y=\psi(t,u,v);\quad z=\chi(t,u,v)$$

erscheinen, so kann man aus diesen und der Gleichung der Fläche F die Grössen x, y, z eliminiren, wodurch man die Gleichung der gesuchten Fläche erhält.

Wir wollen den vorgezeichneten Gang der Auflösung sogleich ausführen, und nehmen diesem zufolge an, die gegebene Fläche sei:

---

*) Das in dieser Abhandlung öfters gebrauchte Zeichen $\overline{\wedge}$ bedeutet „conform.“ G.

I. Ein dreiachsiges Ellipsoid, dessen auf den Mittelpunkt bezogene Gleichung ist:

$$b_1^2c_1^2x^2+a_1^2c_1^2y^2+a_1^2b_1^2z^2-a_1^2b_1^2c_1^2=0. \quad \ldots \quad (1)$$

Ferner ist die Gleichung der durch den Punkt (t, u, v) gehenden und das Ellipsoid (1) in einem Punkt (x, y, z) berührenden Ebene:

$$\left\{\frac{dz}{dx}\right\}(t-x)+\left\{\frac{dz}{dy}\right\}(u-y)-(v-z)=0. \quad . \ . \quad (2)$$

Endlich sind die Gleichungen des vom Punkt (α, β, γ) auf die Ebene (2) gefällten Perpendikels:

$$\left.\begin{aligned}(\gamma-v)\left\{\frac{dz}{dx}\right\}+(\alpha-t)=0\\ (\gamma-v)\left\{\frac{dz}{dy}\right\}+(\beta-u)=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\left\{\frac{dz}{dx}\right\}=-\frac{c_1^2x}{a_1^2z}=-\frac{t-\alpha}{v-\gamma},$$

$$\left\{\frac{dz}{dy}\right\}=-\frac{c_1^2y}{b_1^2z}=-\frac{u-\beta}{v-\gamma}.$$

Verbindet man diese beiden Gleichungen mit der in (2), so findet man nach einigen Reductionen:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a_1^2(t-\alpha)\{v(v-\gamma)+t(t-\alpha)+u(u-\beta)\}}{a_1^2(t-\alpha)^2+b_1^2(u-\beta)^2+c_1^2(v-\gamma)^2}\\ y&=\frac{b_1^2(u-\beta)\{v(v-\gamma)+t(t-\alpha)+u(u-\beta)\}}{a_1^2(t-\alpha)^2+b_1^2(u-\beta)^2+c_1^2(v-\gamma)^2}\\ z&=\frac{c_1^2(v-\gamma)\{v(v-\gamma)+t(t-\alpha)+u(u-\beta)\}}{a_1^2(t-\alpha)^2+b_1^2(u-\beta)^2+c_1^2(v-\gamma)^2}\end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (4)$$

Diese Werthe von x, y, z in (1) substituirt geben:

(5)

$$\{v(v-\gamma)+u(u-\beta)+t(t-\alpha)\}^2-\{a_1^2(t-\alpha)^2+b_1^2(u-\beta)^2+c_1^2(v-\gamma)^2\}=0,$$

welches die Gleichung der gesuchten Fläche ist.

Setzen wir in dieser Gleichung $t+t'$, $u+u'$, $v+v'$ statt t, u, v, so erhalten wir folgende:

$$\begin{aligned}&2\{v(v-\gamma)+u(u-\beta)+t(t-\alpha)\}\{(v'+u'+t')^2-\gamma v'-\beta u'-\alpha t'\}\\ &+\{(v'+u'+t')^2-\gamma v'-\beta u'-\alpha t'\}^2=c_1^2v'^2+b_1^2u'^2+a_1^2t'^2\\ &\qquad+2\{t'(t-\alpha)a_1^2+u'(u-\beta)b_1^2+v'(v-\gamma)c_1^2\}. \quad . \ . \quad (6)\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $t'=0$, $u'=0$, $v'=0$; es ist also der neue Anfang der Coordinaten ein vielfacher Punkt der Fläche.

Setzt man den Punkt P in den Coordinatenanfang, so wird $\alpha=\beta=\gamma=0$, und die Gleichung (5) wird zu

$$(t^2+u^2+v^2)^2=a_1^2t^2+b_1^2u^2+c_1^2v^2 \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Dieses ist die Gleichung derjenigen Fläche, welche Fresnel in seinen Untersuchungen über doppelte Strahlenbrechung die Oberfläche der Elasticität nennt, und deren Eigenschaften bereits in allen besseren Lehrbüchern der Physik angegeben sind.

Wir bemerken hierbei noch, dass

$$v(v-\gamma)+u(u-\beta)+t(t-\alpha)=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (8)$$

die Gleichung einer Kugel ist, deren Coordinaten des Mittelpunkts $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ sind, und deren Radius $r=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ ist.

Die Gleichung der Durchschnittscurve dieser Kugel mit der Fläche (5) ist daher:

$$a_1^2(t-\alpha)^2+b_1^2(u-\beta)^2+c_1^2(v-\gamma)^2=0.$$

Diese Gleichung gehört aber einem Punkte an, dessen Coordinaten α, β, γ sind, woraus hervorgeht:

1) dass die Kugel (8) nur den Punkt P mit der gesuchten Fläche (5) gemein hat;

2) dass die Oberfläche der vorgenannten Kugel der geometrische Ort aller vielfachen Punkte von einer unendlich grossen Anzahl Fusspunkten-Flächen einerlei Art ist.

II. Sei die gegebene Fläche ein eintheiliges Hyperboloid, dessen Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{y}{b_1}\right)^2-\left(\frac{z}{c_1}\right)^2=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

ist.

Weil hier

$$\left\{\frac{dz}{dx}\right\}=\frac{c_1^2x}{a_1^2z}=-\frac{t-\alpha}{v-\gamma}, \quad \left\{\frac{dz}{dy}\right\}=\frac{c_1^2y}{b_1^2z}=-\frac{u-\beta}{v-\gamma};$$

so findet man wie vorhin mittelst der Gleichungen I. (2), (3):

gen (2) sind alsdann Bedingungsgleichungen. Haben aber jene Coefficienten aus den Gleichungen (1) solche Werthe erhalten, dass sie den Gleichungen (2) nicht genügen, sondern den Ausdrücken linker Hand des Gleichheitszeichens gewisse Werthe p', p'', p''',.... beilegen, daher die Fläche IV. (1) unter diesen Umständen nicht in zwei Flächen zweiten Grades übergehen kann, so nimmt unter diesen Umständen die Gleichung IV. (3) der Fläche des vierten Grades folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l}(v^2+au^2+bt^2+cut+dtv+euv+fv+gu+ht+k)(v^2+a'u^2+b't^2+c'ut+d'tv+e'uv+f'v+g'u+h't+k') \\ \quad +p'tu^2v+p''t^2uv+p'''u^2t^2+p^{IV}ut^3+p^{V}t^2v+p^{VI}tuv+p^{VII}tu^2+p^{VIII}t^2u+p^{IX}t^2+p^{X}ut \\ \qquad +p^{XI}vt+p^{XII}uv+p^{XIII}v+p^{XIV}u+p^{XV}t+p^{XVI}\end{array}\right\}=0. \quad (3)$$

Es ist noch zu bemerken, dass wir aus den ersten acht Gleichungen in (1) folgende zwei zur Bestimmung der Coefficienten a, b, a', b'.... erhalten:

$$a^6-\frac{F}{A}a^5+\frac{\{DJ-AB\}}{A^2}a^4-\frac{\{BD^2+AJ^2-2A^2BF\}}{A^3}a^3+\frac{B\{DJ-AB\}}{A^3}a^2-\frac{B^2F}{A^2}a+\frac{B^3}{A^3}=0. \quad (4)$$

$$b^6-\frac{G}{A}b^5+\frac{\{EK-AC\}}{A^2}b^4-\frac{\{CE^2+AK^2-2A^2GC\}}{A^3}b^3+\frac{C\{EK-AC\}}{A^3}b^2-\frac{C^2G}{A^2}b+\frac{C^3}{A^3}=0. \quad (5)$$

$$\varrho^2.(P^2+M^2)=P^2a_1^2-M^2c_1^2,$$

$$\varrho^2.(P^2+N^2)=P^2b_1^2-N^2c_1^2,$$

$$MN\varrho^2=-MNc_1^2.$$

Diesen Gleichungen kann zugleich nur genügt werden, wenn einer der Coefficienten M, N und P verschwindet, d. h. wenn die schneidende Ebene durch eine der Coordinatenachsen geht.

Legen wir die schneidende Ebene zuerst durch die Achse der t, setzen also $M=0$, so erhalten wir aus den drei letzten Gleichungen:

$$\frac{N}{P}=\pm\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}} \text{ und } \varrho=a_1.$$

Dieser Ausdruck ist aber nur dann reell, wenn $b_1>a_1$ ist; in diesem Falle gibt es also wegen des doppelten Zeichens des Werths von $\frac{N}{P}$ nur zwei durch die Achse der t gehende Ebenen, welche die Fläche (3) in Kreisen schneiden; die Gleichungen dieser beiden schneidenden Ebenen sind alsdann:

$$\left.\begin{array}{r}-u\sqrt{\dfrac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}}+v=0\\ +u\sqrt{\dfrac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}}+v=0\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots(7)$$

Um die Gleichung des Kreises zu finden, in welchem die erstere dieser Ebenen die Fläche (3) schneidet, so bezeichnen wir mit φ_1 den Winkel, welchen die positive Seite der Ebene (t, u) mit der Ebene dieses Kreises bildet, und nehmen t_1, v_1 als die Coordinaten in der Ebene des Kreises selbst, so ist:

$$u=v_1\cos\varphi_1,\ v=v_1\sin\varphi_1,\ t=t_1,\ \operatorname{tg}\varphi_1=\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}};$$

also

$$\sin\varphi_1=\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{b_1^2+c_1^2}},\ \cos\varphi_1=\sqrt{\frac{a_1^2+c_1^2}{b_1^2+c_1^2}};$$

mithin

$$u=v_1\sqrt{\frac{a_1^2+c_1^2}{b_1^2+c_1^2}},\ v=v_1\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{b_1^2+c_1^2}},\ t=t_1.$$

Führen wir diese Werthe von t, u und v in der Gleichung (6) ein und bemerken, dass $\varrho=a_1$ ist, so erhalten wir für die Glei-

chung des Kreises, in welchem die Fusspunkten-Fläche von der ersten Ebene in (7) geschnitten wird, folgende:

$$\left(\frac{t_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{v_1}{a_1}\right)^2=1. \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Die zweite Ebene in (7) schneidet die Fläche (3) in einem gleichen Kreise, nur hat jene in Beziehung auf die Ebene (t, u) entgegengesetzte Lage.

Lassen wir die Ebene (4) durch die Achse der u gehen, nehmen also $N=0$ an, so erhalten wir aus den drei obigen Bestimmungsgleichungen:

$$\varrho=b_1 \text{ und } \frac{M}{P}=\pm\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2+c_1^2}}.$$

Dieser Werth von $\frac{M}{P}$ wird nur reell, wenn $a_1>b_1$ ist; in diesem Fall erhalten wir wieder wegen des doppelten Vorzeichens zwei Ebenen, welche die Fläche (3) in Kreisen schneiden; die Gleichungen derselben sind:

$$\left.\begin{array}{l} -t\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2+c_1^2}}+v=0 \\ +t\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2+c_1^2}}+v=0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Die Gleichung des Kreises, in welchem die erste dieser Ebenen die Fläche (3) schneidet, ist, wenn u_2 und v_2 die Coordinaten desselben in seiner Ebene selbst bezeichnen:

$$\left(\frac{u_2}{b_1}\right)^2+\left(\frac{v_2}{b_1}\right)^2=1. \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Die zweite Ebene schneidet die Fläche (3) in einem gleichen Kreise wie dieser, nur hat jene Ebene in Beziehung auf die Ebene (t, u) entgegengesetzte Lage.

Lassen wir endlich die Ebene (4) durch die Achse der v gehen, setzen also in den obigen Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten $P=0$, so erhalten wir $\varrho=\sqrt{-c_1^2}$, woraus hervorgeht, dass die Fläche (3) von jeder durch die Achse der v gehenden Ebene in einem imaginären Kreise geschnitten wird.

Wir haben also gefunden, dass, wenn $b_1>a_1$ ist, die Fläche (3) von zwei durch die Achse der t gehenden Ebenen geschnitten werden kann, die mit der Ebene der (t, u) Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten ..

$$+\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}} \text{ und } -\sqrt{\frac{b_1^2-a_1^2}{a_1^2+c_1^2}}$$

sind; die Schnitte sind zwei Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist; die Radien dieser Kreise sind jeder gleich a_1. Ist aber $a_1 > b_1$, so werden die Schnittebenen imaginär, hingegen kann man in diesem Falle die Fläche (3) durch zwei andere Ebenen, die durch die Achse der u gehen, in reellen Kreisen schneiden, deren gemeinsamer Mittelpunkt ebenfalls der Coordinatenanfang ist und deren Radien gleich b_1 sind; die Tangenten der Winkel, unter welchen die Ebenen dieser Kreise gegen die Ebene der (t, u) geneigt sind, sind:

$$+\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2+c_1^2}} \text{ und } -\sqrt{\frac{a_1^2-b_1^2}{b_1^2+c_1^2}}.$$

Endlich gibt es gar keine durch die Achse der v gehende Ebene, welche die Fläche (3) in einem Kreise schneidet.

III. Ist die gegebene Fläche ein zweitheiliges Hyperboloid, dessen Gleichung

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2-\left(\frac{y}{b_1}\right)^2-\left(\frac{z}{c_1}\right)^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, so finden wir ganz auf gleiche Art wie in I. und II. für die Gleichung der Fusspunkten-Fläche folgende:

$$\{v(v-\gamma)+u(u-\beta)+t(t-\alpha)\}^2=a_1^2(t-\alpha)^2-b_1^2(u-\beta)^2-c_1^2(v-\gamma)^2. \quad (2)$$

In dieser Gleichung bezeichnen, wie früher, α, β, γ die Coordinaten des gegebenen Punktes P, von welchem die Perpendikel auf die berührenden Ebenen der Fläche (1) gefällt werden. Setzen wir in der Gleichung (2) $\alpha=\beta=\gamma=0$, d. h. nehmen wir den Punkt P in dem Mittelpunkte der Fläche (1) an, so geht jene über in:

$$\{t^2+u^2+v^2\}^2=a_1^2t^2-b_1^2u^2-c_1^2v^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wenden wir bei der durch diese Gleichung dargestellten Fläche dasselbe Verfahren an wie bei der Fläche (3) in II., so finden wir, dass es gar keine durch den Coordinatenanfang gehende Ebene gibt, welche diese Fläche in reellen Kreisen schneidet.

Wir erhalten endlich auf demselben Wege wie in II. für die Gleichungen der Fusspunkten-Flächen eines hyperbolischen und eines elliptischen Paraboloids, die durch die bezüglichen Gleichungen

$$p'y^2-pz^2-pp'x=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$p'y^2+pz^2-pp'x=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dargestellt sind, folgende:

$$4(t-\alpha)\{t(t-\alpha)+u(u-\beta)+v(v-\gamma)\}-p'(v-\gamma)^2+p(u-\beta)^2=0, \quad (6)$$

$$4(t-\alpha)\{t(t-\alpha)+u(u-\beta)+v(v-\gamma)\}+p'(v-\gamma)^2+p(u-\beta)^2=0. \quad (7)$$

Für $\alpha=\beta=\gamma=0$ werden diese zu:

$$4\{t^3+tu^2+tv^2\}-p'v^2+pu^2=0, \quad \ldots \quad (8)$$

$$4(t^3+tu^2+tv^2)+p'v^2+pu^2=0. \quad \ldots \quad (9)$$

Keine der vier letzteren Flächen kann von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden.

Setzen wir in (6) und (7) $v-\gamma=0$, so erhalten wir:

$$4t(t-\alpha)^2+4u(t-\alpha)(u-\beta)+p(u-\beta)^2=0. \quad \ldots \quad (10)$$

Diese Gleichung gehört der Durchschnittscurve der Flächen (6) und (7) an, und diese befindet sich in einer, mit der Ebene der (t, u) parallelen Ebene, welche durch den Punkt P geht. Setzen wir aber in (8) und (9) $v=0$, so erhalten wir für die Gleichung der Durchschnittscurve dieser beiden Flächen:

$$4t^3+(4t+p)u^2=0. \quad \ldots \quad (11)$$

Diese Curve liegt in der Ebene der (t, u) und ist zugleich die Fusspunktencurve der Leitparabel der Paraboloide (4) und (5), so wie $4t^3+(4t-p')v^2=0$ und $4t^3+(4t+p')v^2=0$ die bezüglichen Fusspunktencurven der Erzeugungsparabeln jener Flächen ausdrücken.

Schneiden wir die Fläche (6) durch eine mit der Ebene der (u, v) parallele, durch den gegebenen Punkt P gehende Ebene und setzen desshalb $t=\alpha$, so erhalten wir für die Gleichung des Schnitts:

$$v-\gamma=\pm(u-\beta)\sqrt{\frac{p}{p'}} \quad \ldots \quad (12)$$

Setzen wir aber in (4) $x=0$, so wird:

$$z=\pm y\sqrt{\frac{p'}{p}}. \quad \ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (13) drückt zwei in der Ebene der (y, z) oder der (u, v) befindliche gerade Erzeugungslinien des Paraboloids (4) aus; durch die Gleichung (12) werden die Projectionen zweier Geraden dargestellt, in welchen die Fläche (6) von der Ebene $t=\alpha$ geschnitten wird, und zwar ist je eine dieser letzteren auf

einer der in (13) dargestellten Erzeugungslinien senkrecht. Bei den Flächen (5) und (7) werden die resultirenden Geraden imaginär. Setzen wir in (9) $t=-\frac{p}{4}$, d. h. schneiden wir die Fläche (9) durch eine mit der Ebene der (u, v) parallele Ebene, welche durch die Directrix der Leitparabel des elliptischen Paraboloids (5) geht, so erhalten wir:

$$v=\pm\frac{p}{4}\sqrt{\frac{p}{p'-p}}. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Wird aber in (8) $t=-\frac{p'}{4}$ gesetzt, so kommt:

$$u=\pm\frac{p'}{4}\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

IV. Um mittelst der bisher gefundenen Gleichungen der Fusspunkten-Flächen zu bestimmen, ob und unter welchen Bedingungen jene Flächen in Flächen niedrigeren Grades übergehen, betrachten wir die allgemeine Gleichung der Flächen des vierten Grades, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} Av^4+Bu^4+Ct^4+Duv^3+Etv^3+Fu^2v^2+Gt^2v^2+Hutv^2+Ju^3v \\ +Kt^3v+Lu^2tv+Mut^2v+Nu^3t+Pu^2t^2+Qut^3+A'v^3 \\ +B'u^3+C't^3+D'uv^2+E'tv^2+F'u^2v+G't^2v+H'utv+J'u^2t \\ +K't^2u+A''v^2+B''u^2+C''t^2+D''ut+F''uv+A'''v+B'''u \\ +C'''t+D''' \end{array}\right\}=0. \quad (1)$$

Diese Gleichung kann bei gewissen Relationen ihrer Coefficien-folgende Formen annehmen:

(2)

$$(v+au+bt+c)(v+a'u+b't+c')(v+a''u+b''t+c'')(v+a'''u+b'''t+c''')=0.$$

(3)

$$\left.\begin{array}{l} (v^2+au^2+bt^2+cut+dtv+euv+fv+gu+ht+k) \\ \times(v^2+a'u^2+b't^2+c'ut+d'tv+e'uv+f'v+g'u+h't+k') \end{array}\right\}=0.$$

$$(v^2+au^2+bt^2+cut+dtv+euv+fv+gu+ht+k)(v+a'u+b't+c')(v+a''u+b''t+c'')=0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} v^3+bt^3+cu^3+duv^2+etv^2+fu^2v+gutv+ht^2v+iu^2t+kut^2 \\ +a'v^2+b'u^2+c't^2+d'ut+e'tv+f'uv+a''v+b''u+c''t+a''' \end{array}\right\}(v+a^{IV}u+b^{IV}t+c^{IV})=0 \quad \ldots \quad (5)$$

Untersuchen wir jede dieser Gleichungen besonders und entwickeln desshalb die Gleichung (2) und ordnen sie in Beziehung auf die Veränderlichen t, u, v wie die Gleichung (1), und identificiren wir sie mit dieser, so erhalten wir zwischen den beiderseitigen Coefficienten folgende Gleichungen, von welchen einige der letzteren zur Bestimmung der ersteren dienen, die übrigen aber die Relationen ausdrücken, unter welchen eine Fläche vierten Grades in ein System von vier Ebenen degenerirt:

$$\left.\begin{array}{c} aa'a''a'''=\frac{B}{A};\quad bb'b''b'''=\frac{C}{A};\quad cc'c''c'''=\frac{D'''}{A};\quad aa'a''+aa'a'''+aa''a'''+a'a''a'''=\frac{J}{A}; \\ bb'b''+bb'b'''+bb''b'''+b'b''b'''=\frac{K}{A};\quad cc'c''+cc'c'''+cc''c'''+c'c''c'''=\frac{A'''}{A}; \\ aa'+aa''+aa'''+a'a''+a'a'''+a''a'''=\frac{F}{A};\quad bb'+bb''+bb'''+b'b''+b'b'''+b''b'''=\frac{G}{A}; \\ cc'+cc''+cc'''+c'c''+c'c'''+c''c'''=\frac{A''}{A};\quad a+a'+a''+a'''=\frac{D}{A}; \\ b+b'+b''+b'''=\frac{E}{A};\quad c+c'+c''+c'''=\frac{A'}{A}. \end{array}\right\} \quad . \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&bb'c''c'''+bb''c'c'''+bb'''c'c''+b'b''cc'''+b'b'''cc''+b''b'''cc'-\frac{C''}{A}=0.\\
&a(b'+b''+b''')+a'(b+b''+b''')+a''(b+b'+b''')+a'''(b+b'+b'')-\frac{H}{A}=0.\\
&a(b'b''+b'b'''+b''b''')+a'(bb''+bb'''+b''b''')+a''(bb'+bb'''+b'b''')-\frac{M}{A}=0.\\
&ab'b''b'''+a'bb''b'''+a''bb'b'''+a'''bb'b''-\frac{Q}{A}=0.\\
&a(c'+c''+c''')+a'(c+c''+c''')+a''(c+c'+c''')+a'''(c+c'+c'')-\frac{D'}{A}=0.\\
&a(c'c''+c'c'''+c''c''')+a'(cc''+cc'''+c''c''')+a''(cc'+cc'''+c'c''')\\
&\qquad\qquad+a'''(cc'+cc''+c'c'')-\frac{F''}{A}=0.\\
&ac'c''c'''+a'cc''c'''+a''cc'c'''+a'''cc'c''-\frac{B'''}{A}=0.\\
&aa'b''b'''+aa''b'b'''+aa'''b'b''+a'a''bb'''+a'a'''bb''+a''a'''bb'-\frac{P}{A}=0.\\
&aa'c''c'''+aa''c'c'''+aa'''c'c''+a'a''cc'''+a'a'''cc''+a''a'''cc'-\frac{B''}{A}=0.\\
&aa'(b''c'''+b'''c'')+aa''(b'c'''+b'''c')+aa'''(b'c''+b''c')+a'a''(bc'''+b'''c)\\
&\qquad\qquad+a'a'''(bc''+b''c)+a''a'''(bc'+b'c)-\frac{J'}{A}=0.\\
&aa'a''b'''+aa'a'''b''+aa''a'''b'+a'a''a'''b-\frac{N}{A}=0.\\
&aa'a''c'''+aa'a'''c''+aa''a'''c'+a'a''a'''c-\frac{B'}{A}=0.\\
&b(a'a''+a'a'''+a''a''')+b'(aa''+aa'''+a''a''')+b''(aa'+aa'''+a'a''')\\
&\qquad\qquad+b'''(aa'+aa''+a'a'')-\frac{L}{A}=0.\\
&c(a'a''+a'a'''+a''a''')+c'(aa''+aa'''+a''a''')+c''(aa'+aa'''+a'a''')\\
&\qquad\qquad+c'''(aa'+aa''+a'a'')-\frac{F'}{A}=0.\\
&a\{b'(c''+c''')+b''(c'+c''')+b'''(c'+c'')\}\\
&\qquad+a'\{b(c''+c''')+b''(c+c''')+b'''(c+c'')\}\\
&\qquad+a''\{b(c'+c''')+b'(c+c''')+b'''(c+c')\}\\
&\qquad+a'''\{b(c'+c'')+b'(c+c'')+b''(c+c')\}-\frac{H'}{A}=0.\\
&b(c'+c''+c''')+b'(c+c''+c''')+b''(c+c'+c''')+b'''(c+c'+c'')-\frac{E'}{A}=0.\\
&b(c'c''+c'c'''+c''c''')+b'(cc''+cc'''+c''c''')+b''(cc'+cc'''+c'c''')\\
&\qquad\qquad+b'''(cc'+cc''+c'c'')-\frac{E''}{A}=0.\\
&c(b'b''+b'b'''+b''b''')+c'(bb''+bb'''+b''b''')+c''(bb'+bb'''+b'b''')\\
&\qquad\qquad+c'''(bb'+bb''+b'b'')-\frac{G'}{A}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}
bb'b''c''' + bb'b'''c'' + bb''b'''c' + b'b''b'''c - \frac{C'}{A} = 0. \\[2ex]
cc'c''b''' + cc'c'''b'' + cc''c'''b' + c'c''c'''b - \frac{C'''}{A} = 0. \\[2ex]
bb'(a''c''' + a'''c'') + bb''(a'c''' + a'''c') + bb'''(a'c'' + a''c') \\
\quad + b'b''(ac''' + a'''c) + b'b'''(ac'' + a''c) + b''b'''(ac' + a'c) - \frac{K'}{A} = 0. \\[2ex]
cc'(a''b''' + a'''b'') + cc''(a'b''' + a'''b') + cc'''(a'b'' + a''b') \\
\quad + c'c''(ab''' + a'''b) + c'c'''(ab'' + a''b) + c''c'''(ab' + a'b) - \frac{D''}{A} = 0.
\end{array}\right\} (7)$$

Aus den Gleichungen (6) erhalten wir folgende drei:

$$a^4 - \frac{D}{A}a^3 + \frac{F}{A}a^2 - \frac{J}{A}a + \frac{B}{A} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$b^4 - \frac{E}{A}b^3 + \frac{G}{A}b^2 - \frac{K}{A}b + \frac{C}{A} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$c^4 - \frac{A'}{A}c^3 + \frac{A''}{A}c^2 - \frac{A'''}{A}c + \frac{D'''}{A} = 0. \quad . \quad . \quad (10)$$

Die Gleichung (8) gibt die Werthe von a, a', a'', a'''.
„ „ (9) „ „ „ „ b, b', b'', b'''.
„ „ (10) „ „ „ „ c, c', c'', c'''.

Da die Gleichungen (7) durch die Substitution der Werthe von a, a',.... etc., die man aus den Gleichungen (8), (9) und (10) erhält, nur dann erfüllt werden, wenn die Fläche (1) in ein System von vier Ebenen übergeht, so werden, wenn jene Gleichung irgend eine Fläche des vierten Grades darstellen soll, die Ausdrücke auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in (7) gewisse Werthe p', p'', p''', etc. annehmen, und die Gleichung (2) wird dadurch 22 neue Glieder erhalten, deren constante Coefficienten die Grössen p', p'', p''' etc. sind, und wo die Potenzen der Veränderlichen v, u, z die gleichen sind, welche beziehlich die Faktoren der Coefficienten C'', H, M, Q, etc. haben, so dass also die Gleichung (2) folgende Form annimmt:

(11)

$$\left.\begin{array}{l}
(v+au+bt+c)(v+a'u+b't+c')(v+a''u+b''t+c'')(v+a'''u+b'''t+c''') \\
+ p'v^2ut + p''v^2u + p'''v^2t + p^{IV}vu^2 \\
+ p^{V}vt^2 + p^{VI}vu^2t + p^{VII}tv + p^{VIII}uv + p^{IX}vut^2 + p^{X}vut \\
+ p^{XI}u^3t + p^{XII}u^3 + p^{XIII}t^3 + p^{XIV}ut^3 + p^{XV}u + p^{XVI}t \\
+ p^{XVII}u^2t^2 + p^{XVIII}u^2 + p^{XIX}t^2 + p^{XX}u^2t + p^{XXI}ut^2 + p^{XXII}ut
\end{array}\right\} = 0.$$

V. Wenden wir das gleiche Verfahren auf die Gleichungen (1) und (3) der vorigen Nummer an, so erhalten wir nachstehende Gleichungen, von denen einige zur Bestimmung der Coefficienten $a, b, c, \ldots. k, a', b', c', \ldots. k'$ gebraucht werden, die übrigen aber die Bedingungen angeben, unter welchen eine Fläche vierten Grades in zwei Flächen zweiten Grades übergehen kann. Diese Gleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{c}
aa'=\frac{B}{A};\quad bb'=\frac{C}{A};\quad e+e'=\frac{D}{A};\quad d+d'=\frac{E}{A};\quad a+a'+ee'=\frac{F}{A};\\
b+b'+dd'=\frac{G}{A};\quad ae'+a'e=\frac{J}{A};\quad bd'+b'd=\frac{K}{A};\\
c+c'+de'+d'e=\frac{H}{A};\quad ac'+a'c=\frac{N}{A};\quad f+f'=\frac{A'}{A};\\
g'+a'g=\frac{B'}{A};\quad g+g'+ef'+e'f=\frac{D'}{A};\quad af'+a'f+eg'+e'g=\frac{F'}{A};\\
h'+b'h=\frac{C'}{A};\quad h+h'+df'+d'f=\frac{E'}{A};\quad k+k'+ff'=\frac{A''}{A};\\
ak'+a'k+gg'=\frac{B''}{A}.
\end{array}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{array}{c}
+a'd+ce'+c'e-\frac{L}{A}=0;\quad be'+b'e+cd'+c'd-\frac{M}{A}=0;\\
+a'b-\frac{P}{A}=0;\quad bc'+b'c-\frac{Q}{A}=0;\quad bf'+b'f+dh'+d'h-\frac{G'}{A}=0;\\
+c'f+dg'+d'g+eh'+e'h-\frac{H'}{A}=0;\quad ah'+a'h+cg'+c'g-\frac{J'}{A}=0;\\
bg'+b'g+ch'+c'h-\frac{K'}{A}=0;\quad bk'+b'k+hh'-\frac{C''}{A}=0;\\
+c'k+gh'+g'h-\frac{D''}{A}=0;\quad dk'+d'k+fh'+f'h-\frac{E''}{A}=0;\\
ek'+e'k+fg'+f'g-\frac{F''}{A}=0;\quad fk+f'k-\frac{A'''}{A}=0;\\
gk'+g'k-\frac{B'''}{A}=0;\quad hk'+h'k-\frac{C'''}{A}=0;\quad kk'-\frac{D'''}{A}=0.
\end{array}\right\}(2)$$

Die Gleichungen (1) können zur Bestimmung der Coefficien-
t, $b, c \ldots. k;\ a', b', c', \ldots. k'$ gebraucht werden; die Gleichun-

gen (2) sind alsdann Bedingungsgleichungen. Haben aber jene Coefficienten aus den Gleichungen (1) solche Werthe erhalten, dass sie den Gleichungen (2) nicht genügen, sondern den Ausdrücken linker Hand des Gleichheitszeichens gewisse Werthe p', p'', p''',.... beilegen, daher die Fläche IV. (1) unter diesen Umständen nicht in zwei Flächen zweiten Grades übergehen kann, so nimmt unter diesen Umständen die Gleichung IV. (3) der Fläche des vierten Grades folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l}(v^2+au^2+bt^2+cut+dtv+euv+fv+gu+ht+k)(v^2+a'u^2+b't^2+c'ut+d'tv+e'uv+f'v+g'u+h't+k') \\ \quad +p'tu^2v+p''t^2uv+p'''u^2t^2+p^{IV}ut^3+p^{V}t^2v+p^{VI}tuv+p^{VII}tu^2+p^{VIII}t^2u+p^{IX}t^2+p^{X}ut \\ \qquad +p^{XI}vt+p^{XII}uv+p^{XIII}v+p^{XIV}u+p^{XV}t+p^{XVI}\end{array}\right\}=0. \quad (3)$$

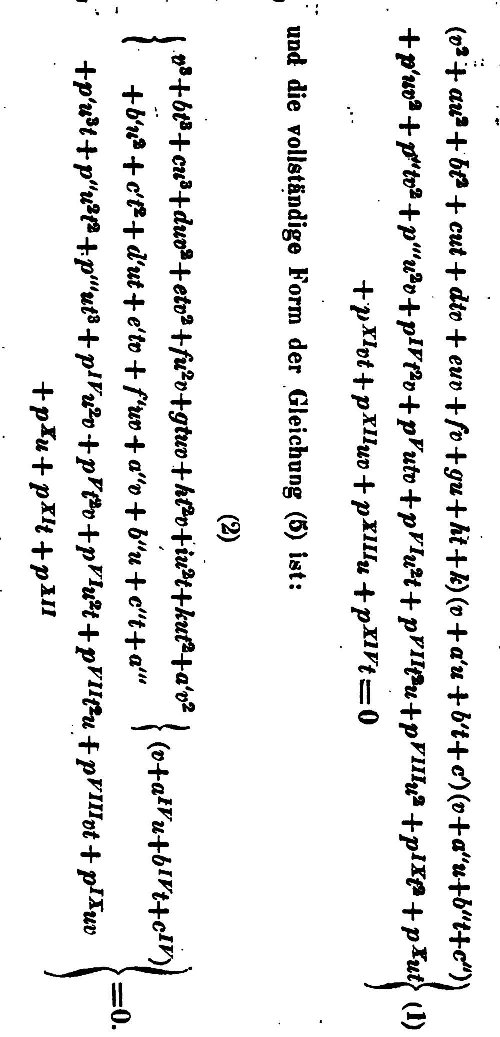
Es ist noch zu bemerken, dass wir aus den ersten acht Gleichungen in (1) folgende zwei zur Bestimmung der Coefficienten a, b, a', b'.... erhalten:

$$a^6-\frac{F}{A}a^5+\frac{\{DJ-AB\}}{A^2}a^4-\frac{\{BD^2+AJ^2-2A^2BF\}}{A^3}a^3+\frac{B\{DJ-AB\}}{A^3}a^2-\frac{B^2F}{A^2}a+\frac{B^3}{A^3}=0. \quad (4)$$

$$b^6-\frac{G}{A}b^5+\frac{\{EK-AC\}}{A^2}b^4-\frac{\{CE^2+AK^2-2A^2GC\}}{A^3}b^3+\frac{C\{EK-AC\}}{A^3}b^2-\frac{C^2G}{A^2}b+\frac{C^3}{A^3}=0. \quad (5)$$

VI. Bei einer gleichen Behandlung der Gleichungen (4) und (5) in IV. würden wir ähnliche Bestimmungs- und Bedingungsgleichungen wie bei den beiden vorhergehenden erhalten, deren Angabe zu weitläufig würde; wir begnügen uns daher blos mit der Hersetzung der umgewandelten Formen jener Gleichungen (4) und (5) und geben die Bestimmung der Coefficienten und die erforderlichen Bedingungen erst, wenn wir sie in der Anwendung gebrauchen.

Die vollständige Form der umgewandelten Gleichung (4) ist:



$$(v^2+au^2+bt^2+cut+dtv+euv+fv+gu+ht+k)(v+a'u+b't+c')(v+a''u+b''t+c'')$$
$$+\left\{\begin{array}{l}p'uv^2+p''tv^2+p'''u^2v+p^{IV}t^2v+p^{V}utv+p^{VI}u^2t+p^{VII}t^2u+p^{VIII}u^2+p^{IX}t^2+p^{X}ut\\ +p^{XI}vt+p^{XII}uv+p^{XIII}u+p^{XIV}t=0\end{array}\right\} \quad (1)$$

und die vollständige Form der Gleichung (5) ist:

$$\left\{\begin{array}{l}v^3+bt^3+cu^3+duv^2+etv^2+fu^2v+gtuv+ht^2v+iu^2t+kut^2+a'v^2\\ +b'u^2+c't^2+d'ut+e'tv+f'uv+a''v+b''u+c''t+a'''\end{array}\right\}(v+a^{IV}u+b^{IV}t+c^{IV})$$
$$+\left\{\begin{array}{l}p'u^3t+p''u^2t^2+p'''ut^3+p^{IV}u^2v+p^{V}t^2v+p^{VI}u^2t+p^{VII}t^2u+p^{VIII}vt+p^{IX}uv\\ +p^{X}u+p^{XI}t+p^{XII}\end{array}\right\}=0. \quad (2)$$

VII. Entwickeln wir die Gleichung (5) in I. und ordnen sie nach den Potenzen von v, u, t wie die Gleichung (1) in IV., so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} v^4+u^4+t^4+2u^2v^2+2t^2v^2+2u^2t^2-2\gamma v^3-2\beta u^3-2\alpha t^3-2\beta uv^2 \\ \quad -2\alpha tv^2-2\gamma u^2v-2\gamma t^2v-2\alpha u^2t-2\beta t^2u+(\gamma^2-c_1{}^2)v^2 \\ +(\beta^2-b_1{}^2)u^2+(\alpha^2-a_1{}^2)t^2+2\alpha\beta ut+2\alpha\gamma tv+2\beta\gamma uv+2c_1{}^2\gamma v \\ \quad +2b_1{}^2\beta u+2a_1{}^2\alpha t-[a_1{}^2\alpha^2+b_1{}^2\beta^2+c_1{}^2\gamma^2] \end{array}\right\}=0. \quad (1)$$

Identificiren wir diese Gleichung mit (1) in IV., so folgt, dass

$$A=1;\ B=1;\ C=1;\ D=E=0;\ F=2;\ G=2;$$
$$H=J=K=L=M=N=0;\ P=2;\ Q=0;\ A'=-2\gamma;\ B'=-2\beta;$$
$$C'=-2\alpha;\ D'=-2\beta;\ E'=-2\alpha;\ F'=-2\gamma;\ G'=-2\gamma;\ H'=0;$$
$$J'=-2\alpha;\ K'=-2\beta;\ A''=\gamma^2-c_1{}^2;\ B''=\beta^2-b_1{}^2;\ C''=\alpha^2-a_1{}^2;$$
$$D''=2\alpha\beta;\ E''=2\alpha\gamma;\ F''=2\beta\gamma;\ A'''=2c_1{}^2\gamma;\ B'''=2b_1{}^2\beta;$$
$$C'''=2a_1{}^2\alpha;\ D'''=-[a_1{}^2\alpha^2+b_1{}^2\beta^2+c_1{}^2\gamma^2].$$

Substituiren wir die Werthe von A, B, D, F, J, E, G, K, C, A', A'', A''', D''' in (8), (9) und (10) Nr. IV., so erhalten wir:

$$a^4+2a^2+1=0 \text{ oder } (a^2+1)^2=0, \text{ also } a=\pm\sqrt{-1}. \quad (2)$$

$$b^4+2b^2+1=0 \text{ oder } (b^2+1)^2=0, \text{ also } b=\pm\sqrt{-1}. \quad (3)$$

$$c^4+2\gamma c^3+(\gamma^2-c_1{}^2)c^2-2c_1{}^2\gamma c-[a_1{}^2\alpha^2+b_1{}^2\beta^2+c_1{}^2\gamma^2]=0. \quad (4)$$

Ohne diese letzte Gleichung aufzulösen, sehen wir schon, dass die Werthe der Coefficienten a, a', a'', a''', b, b', b'', b''' imaginär werden, dass also die durch die Gleichung (5) I. dargestellte Fläche nicht in ein System von vier reellen Ebenen degeneriren kann.

Setzen wir $\alpha=\beta=\gamma=0$, d. h. identificiren wir die Gleichungen (7) I. und (2) I., so erhalten wir aus (8), (9), (10) IV. wieder:

$$a=\pm\sqrt{-1},\quad b=\pm\sqrt{-1},\quad c=0 \text{ oder } c=c_1;$$

also geht, wie es schon vorauszusehen war, weder die Fläche (5) I., noch die Fläche (7) I. unter keinerlei Bedingung in ein System von vier reellen Ebenen über; dasselbe erfolgt auf gleiche Art bei den Flächen (2) und (3) III.

VIII. Untersuchen wir jetzt, ob die Fläche (5) I. nicht in gewissen Fällen in ein System von zwei Flächen zweiten Grades übergehen kann, und führen desshalb die in VII. angegebenen Werthe der Coefficienten A, B, C, D etc. in den Gleichungen (4), (5) V. ein, so erhalten wir:

$$a^6-2a^5-a^4+4a^3-a^2-2a+1=0,$$

$$b^6-2b^5-b^4+4b^3-b^2-2b+1=0.$$

Wir finden aber leicht, dass sich diese beiden Gleichungen auf folgende zwei reduciren:

$$(a-1)^2(a^2-1)^2=0 \text{ oder } (a-1)(a^2-1)=0,$$

$$(b-1)^2(b^2-1)^2=0 \text{ oder } (b-1)(b^2-1)=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind: $a=1$, $a=\pm\sqrt{1}$; $b=1$, $b=\pm\sqrt{1}$. Nehmen wir $a=1$ und $b=\pm 1$, so erhalten wir mittelst der Gleichungen (1) und (2):

$$a'=1,\quad b'=1,\quad e=0,\quad e'=0,\quad c=0,\quad c'=0,\quad d=0,\quad d'=0,$$

$$f=-\gamma,\quad f'=-\gamma,\quad g=-\beta,\quad g'=-\beta,\quad h=-\alpha,\quad h'=-\alpha;$$

alsdann:

$$k+k'=-a_1^2,\quad k+k'=-b_1^2,\quad k+k'=-c_1^2,$$

$$kk'=-[a_1^2\alpha^2+b_1^2\beta^2+c_1^2\gamma^2].$$

Die vier letzten Gleichungen geben die Bedingung, dass die Fläche (5) I. nur in eine Fläche zweiten Grades übergehen kann, wenn $a_1=b_1=c_1$ und $\alpha=\beta=\gamma=0$; also wenn die Fläche eine Kugel von einem gegebenen Radius a_1 oder b_1 oder c_1 und ihr Mittelpunkt zugleich derjenige Punkt ist, von welchem aus die Perpendikel auf die berührenden Ebenen gefällt werden, in welchem Fall die Gleichung (5) I. in $t^2+u^2+v^2=a_1^2$ übergeht, d. h. die Kugel ist ihre eigene Fusspunkten-Fläche, wenn die Perpendikel vom Mittelpunkt aus gefällt werden.

Bei der Fläche II. (2) sind die Coefficientenwerthe von A, B, C,.... die gleichen wie bei der vorigen, mit Ausnahme von A'', A''' und D'''; diese sind

$$A''=\gamma^2+c_1^2,\quad A'''=-2c_1^2\gamma,\quad D'''=-[a_1^2\alpha^2+b_1^2\beta^2-c_1^2\gamma^2],$$

und wir finden leicht die Bedingungen $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $a_1^2=b_1^2=-c_1^2$; dadurch wird die Gleichung der Fusspunkten-Fläche des eintheiligen Hyperboloids zu:

$$(t^2+u^2+v^2)^2 = -a_1^2(t^2+u^2+v^2)$$

oder

$$t^2+u^2+v^2 = -a_1^2.$$

Diese Gleichung drückt eine imaginäre Kugel vom Radius $a_1\sqrt{-1}$ au

IX. Wir werden uns leicht überzeugen, dass die Flächen I. (2), II. (2), III. (2) nicht in Systeme von einer reellen Fläche zweiten Grades und zweier reellen Ebenen übergehen können.

Denn die Hauptbestimmungsgleichungen der Coefficienten sind

$$a^6 - \frac{F}{A}a^5 + \frac{(JD-AB)}{A^2}a^4 - \frac{[BD^2-2ABF+AJ^2]}{A^3}a^3 + \frac{B(JD-AB)}{A^3}$$
$$-\frac{B^2F}{A^3}a + \frac{B^3}{A^3} = 0,$$

$$b^6 - \frac{G}{A}b^5 + \frac{(EK-AC)}{A^2}b^4 - \frac{[CE^2-2ACG+AK^2]}{A^3}b^3 + \frac{C[EK-AC]}{A^3}$$
$$-\frac{C^2G}{A^3}b + \frac{C^3}{A^3} = 0,$$

$$f^6 - \frac{3A'}{A}f^5 + \frac{[3A'^2+2AA'']}{A^2}f^4 - \frac{A'[A'^2+4AA'']}{A^3}f^3$$
$$+\frac{[AA''^2+AA'A'''+2A'^2A''-4A^2D''']}{A^3}f^2 - \frac{A'[A''^2+A'A'''-4AD''']}{A^3}$$
$$+\frac{[A'A''A'''-AA''^2+A^2D''']}{A^3} = 0.$$

Die übrigen Bedingungsgleichen für die Coefficienten c', c'' etc. sind alle von der Art, dass immer eine der Grössen a, b, f darin mittelbar oder unmittelbar vorkommt. Substituiren wir in diese Gleichungen die Werthe von A, A', A'', B, C etc. aus VII., so erhalten wir wieder:

$$(a-1)(a^2-1)=0, \quad (b-1)(b^2-1)=0;$$

allein die dritte der obigen Gleichungen wird von der Art, dass der daraus sich ergebende Werth die übrigen Bedingungsgleichungen nicht erfüllt; da wir alsdann überdiess $a''=\pm\sqrt{-1}$, $a'=-\sqrt{-1}$, $e=0$, $d=0$, $f=0$, $k=0$, $b''=+\sqrt{-1}$, $b'=-\sqrt{-1}$ aus den Coefficienten-Gleichungen erhalten, so geht schon aus den imaginären Werthen von b', b'', a', a'' hervor, dass die Fläche I. (2) nicht in eine reelle Fläche zweiten Grades und in zwei reelle Ebenen degeneriren kann. Das Gleiche findet bei den Flächen II. (2), III. (2) statt.

Endlich finden wir in Beziehung auf IV. (5), wenn wir sie mit der Gleichung IV. (1) identificiren, aus den Bestimmungsgleichungen der Coefficienten a^{IV}, b, d, f; b^{IV}, c, e, h folgende:

$$a^{IV4} - \frac{D}{A} a^{IV3} + \frac{F}{A} a^{IV2} - \frac{J}{A} a^{IV} + \frac{B}{A} = 0,$$

$$b^{IV4} - \frac{E}{A} b^{IV3} + \frac{G}{A} b^{IV2} - \frac{K}{A} b^{IV} + \frac{C}{A} = 0;$$

und wenn wir hierin die Werthe von D, A, F, J, B, E, G, K, C aus VI. einführen:

$$a^{IV4} + 2a^{IV2} + 1 = 0 \text{ oder } a^{IV2} + 1 = 0, \text{ also } a^{IV} = \pm\sqrt{-1};$$

$$b^{IV4} + 2b^{IV2} + 1 = 0 \text{ oder } b^{IV2} + 1 = 0, \text{ also } b^{IV} = \pm\sqrt{-1};$$

...s für die oberen Zeichen

$$b = -\sqrt{-1},\quad c = -\sqrt{-1},\quad d = -\sqrt{-1},\quad f = 1,\quad h = 1,$$

$$g = -2,\quad i = \sqrt{-1},\quad k = \sqrt{-1} \text{ etc.}$$

...t, woraus wir schon hinlänglich erkennen, dass die Fläche (5) niemals in eine reelle Fläche dritten Grades und in eine ...ne übergehen kann; dasselbe findet auch bei den Flächen II. (2) ... III. (2) statt.

... Bei einem ähnlichen Verfahren, wie jenes, welches wir bei ... vorhergehenden Flächen angewendet haben, finden wir auch, ... die Flächen III. (6), (7) weder in Systeme von drei reellen ...en, noch in Systeme von einer reellen Fläche zweiten Gra... und eine reelle Ebene übergehen können.

XIII.

Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi

von

Lejeune Dirichlet.

(Gehalten in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1852.)

Indem ich es unternehme, die wissenschaftlichen Leistungen des grössten Mathematikers zu schildern, welcher seit Lagrange unserer Körperschaft als anwesendes Mitglied angehört hat, treten mir lebhaft die Schwierigkeiten der Aufgabe vor Augen, die ganze Bedeutung der Schöpfungen eines Mannes darzustellen, welcher mit starker Hand in fast alle Gebiete einer durch zweitausendjährige Arbeit zu unermesslichem Umfange angewachsenen Wissenschaft eingegriffen, überall, wohin er seinen schöpferischen Geist gerichtet, wichtige oft tief verborgene Wahrheiten zu Tage gefördert und neue Grundgedanken in die Wissenschaft einführend, die mathematische Speculation in mehr als einer Richtung auf eine höhere Stufe erhoben hat. Nur die Ueberzeugung, dass solchen der Wissenschaft und ihren Pflegern geleisteten Diensten gegenüber eine Pflicht der Dankbarkeit zu erfüllen ist, kann die Bedenken, welche das Bewusstsein meiner Unzulänglichkeit in mir hervorruft, zum Schweigen bringen: denn wem könnte die Erfüllung dieser Pflicht mehr obliegen, als mir, der ich, wie alle meine Fachgenossen durch Jacobi's wissenschaftliche Produktionen so wesentlich gefördert, überdies eine nicht geringere Belehrung meinem vieljährigen, so nahen Verkehr mit dem grossen Forscher verdanke. —

Carl Gustav Jacob Jacobi wurde den 10. December 1804 zu Potsdam geboren, wo sein Vater ein begüterter Kaufmann war. Die erste Unterweisung in den alten Sprachen und den Elementen der Mathematik erhielt er von seinem mütterlichen Oheim, Herrn

Lehmann, der den regsamen Knaben weniger zu unterrichten, als zu lenken hatte, und unter dessen einsichtiger Leitung dieser so rasche Fortschritte machte, dass er noch nicht zwölf Jahre alt in die zweite Klasse des Potsdamer Gymnasiums und schon nach einem halben Jahre in die erste aufgenommen wurde. In dieser blieb er volle vier Jahre, da er nicht füglich vor zurückgelegtem sechszehnten Jahre die Universität besuchen konnte. Der mathematische Unterricht, der ganz als Gedächtnisssache behandelt wurde, konnte dem jungen Primaner nicht zusagen. Sein Verhältniss zum Lehrer war daher längere Zeit sehr unangenehm, gestaltete sich jedoch zuletzt besser, da der Lehrer einsichtig genug war, den ungewöhnlichen Schüler gewähren zu lassen und es zu gestatten, dass dieser sich mit Euler's „*Introductio*“ beschäftigte, während die übrigen Schüler mühsam erlernte Elementarsätze hersagten. Wie weit Jacobi's geistige Entwicklung damals schon vorgeschritten war, zeigt der Versuch, den er um diese Zeit zur Auflösung der Gleichungen des 5ten Grades anstellte, und dessen er in einer seiner Abhandlungen später erwähnt hat.

An dieser Aufgabe hat mehr als einer von denen, welche später einen grossen Namen erlangt haben, zuerst seine Kräfte geübt, und man begreift in der That leicht, welchen Reiz gerade dieses Problem auf ein erwachendes Talent ausüben musste, so lange die Unmöglichkeit desselben noch nicht erwiesen war. Zu der Berühmtheit, welche so viele fruchtlose Bemühungen dieser Untersuchung gegeben hatten, gesellte sich der besondere Umstand, dass das Problem, als einem Gebiete angehörig, welches unmittelbar an die Elemente grenzt, ohne ein grosses Maass von Vorkenntnissen zugänglich schien.

Auf der hiesigen Universität theilte Jacobi seine Zeit zwischen philosophischen, philologischen und mathematischen Studien. Als Theilnehmer an den Uebungen des philologischen Seminars erregte er die Aufmerksamkeit unseres Collegen Böckh, des Vorstehers dieses Instituts, welcher den jungen Mann wegen seines scharfen und eigenthümlichen Geistes sehr lieb gewann und durch besonderes Wohlwollen auszeichnete.

Mathematische Vorlesungen scheint er wenig besucht zu haben, da diese damals auf der hiesigen Universität einen zu elementaren Charakter hatten, als dass sie Jacobi, der schon mit einigen der Hauptwerke von Euler und Lagrange vertraut war, wesentlich hätten fördern können. Desto eifriger sah er sich in der mathematischen Literatur um und suchte namentlich eine allgemeine Uebersicht der grossen wissenschaftlichen Schätze zu

gewinnen, welche die akademischen Sammlungen enthalten. Jacobi, dessen Natur das blosse Einsammeln von Kenntnissen nicht zusagte und der das Bedürfniss fühlte, der Dinge, womit er sich beschäftigte, ganz Herr zu werden, erkannte nach etwa zweijährigen Universitätsstudien die Nothwendigkeit, einen Entschluss zu fassen, und entweder der Philologie oder der Mathematik zu entsagen. Da die Entscheidung, welche er traf, nicht nur für ihn, sondern auch für die Wissenschaft, welcher er sich von nun an ausschliesslich widmete, so wichtige Folgen gehabt hat, so wird man die Gründe, welche seine Wahl bestimmten, gern von ihm selbst erfahren. Er schreibt darüber an seinen schon genannten Oheim: „Indem ich so doch einige Zeit mich ernstlich mit der Philologie beschäftigte, gelang es mir, einen Blick wenigstens zu thun in die innere Herrlichkeit des alten hellenischen Lebens, so dass ich wenigstens nicht ohne Kampf dessen weitere Erforschung aufgeben konnte. Denn aufgeben muss ich sie für jetzt ganz. Der ungeheure Koloss, den die Arbeiten eines Euler, Lagrange, Laplace hervorgerufen haben, erfordert die ungeheurste Kraft und Anstrengung des Nachdenkens, wenn man in seine innere Natur eindringen will und nicht bloss äusserlich daran herumkramen. Ueber diesen Meister zu werden, dass man nicht jeden Augenblick fürchten muss, von ihm erdrückt zu werden, treibt ein Drang, der nicht rasten und ruhen lässt, bis man oben steht und das ganze Werk übersehen kann. Dann ist es auch erst möglich, mit Ruhe an der Vervollkommnung seiner einzelnen Theile recht zu arbeiten und das ganze, grosse Werk nach Kräften weiter zu führen, wenn man seinen Geist erfasst hat."

Zu seiner Doktordissertation wählte Jacobi einen schon vielfach behandelten Gegenstand, die Zerlegung der algebraischen Brüche. Er beweist darin zuerst merkwürdige Formeln, welche Lagrange ohne Beweis in den Abhandlungen unserer Akademie gegeben hatte, geht dann zu einer neuen Art der Zerlegung über, welche nicht, wie die bis dahin ausschliesslich betrachtete, völlig bestimmt ist, und beschliesst die Abhandlung mit Untersuchungen über die Umformung der Reihen, wobei schon ein neues Princip bemerklich wird, von welchem er in späteren Arbeiten mehrfach Gebrauch gemacht hat.

Gleich nach seiner Promotion habilitirte sich Jacobi bei der Universität und hielt eine Vorlesung über die Theorie der krummen Flächen und Curven im Raume. Nach dem Zeugniss eines seiner damaligen Zuhörer muss sein Lehrtalent bei diesem ersten Auftreten schon sehr entwickelt gewesen sein und er es verstanden haben, sein Thema mit grosser Klarheit und auf eine seine

Zuhörer sehr anregende Weise zu behandeln. Der 21jährige Docent zeigte auch darin eine sehr frühe Reife des Urtheils, dass er unbeirrt durch den Misskredit, in welchen die Methode des Unendlichkleinen um jene Zeit durch eine grosse Autorität gekommen war, gerade dieser in seiner Darstellung folgte und seine Zuhörer mit dem besten Erfolge zu überzeugen sich bemühte, dass die verdächtigte Methode nur in ihrer abgekürzten Form von der strengen Methode der Alten unterschieden ist, aber gerade durch diese Form bei allen zusammengesetzteren Fragen unentbehrlich wird.

Die Aufmerksamkeit, welche Jacobi zu erregen anfing, veranlasste die höchste Unterrichtsbehörde, ihn aufzufordern, seine Lehrthätigkeit vorläufig als Privatdocent in Königsberg fortzusetzen, wo durch die eben vacant gewordene Professur der Mathematik sich zu seiner Beförderung mehr Aussichten als in Berlin darboten.

Bei seiner Uebersiedlung nach Königsberg war es für Jacobi ein wichtiges Ereigniss den grossen Astronomen Bessel persönlich kennen zu lernen und zum ersten Male in einem dem seinigen so nahe verwandten Fache ein Genie in der Nähe zu sehen. Die tägliche Anschauung des Feuereifers dieses ausserordentlichen Mannes übte selbst auf ihn, der es doch von seiner frühsten Jugend an gewohnt war, die grössten Anstrengungen von sich zu fordern, den mächtigsten Einfluss, dessen er später oft dankbar erwähnt hat.

Es war für Jacobi's schriftstellerische Laufbahn ein glücklicher Umstand, dass der Anfang derselben mit der Gründung der mathematischen Zeitschrift zusammenfiel, durch deren Herausgabe sich unser College Crelle ein so grosses und bleibendes Verdienst nicht nur um die Verbreitung, sondern auch um die Belebung des Studiums der Wissenschaft erworben hat. Jacobi, der zu den frühsten Mitarbeitern der Zeitschrift gehörte, ist ihr bis zu seinem Tode treu geblieben, und wenn man die beiden besondern Werke „*Fund. nova*" und „*Canon arith.*" ausnimmt, so sind fast alle seine andern Arbeiten zuerst im Crelle'schen Journal erschienen.

Jacobi's erste Abhandlungen zeigen ihn schon als durchaus vollendeten Mathematiker, mag er nun, wie in den Aufsätzen „über Gauss neue Methode zur genäherten Bestimmung der Integrale" und „über die Pfaff'sche Methode für die Integration der partiellen Differentialgleichungen" bekannte Theorieen aus einem neuen Gesichtspunkte betrachten und wesentlich vereinfachen oder noch nicht gelöste Probleme behandeln und zu neuen Resultaten

gelangen. Unter den Arbeiten der letzteren Art sind hier zwei besonders zu erwähnen: eine Abhandlung von wenigen Seiten, in der er eine bis dahin unbekannt gebliebene Grundeigenschaft der merkwürdigen Funktion kennen lehrt, welche von Legendre zuerst in die Wissenschaft eingeführt, in allen spätern allgemeinen Untersuchungen über die Anziehung eine so grosse Rolle gespielt hat, und eine andere „über die cubischen Reste." Diese letztere enthält zwar nur Sätze ohne Beweise, aber diese Sätze sind der Art, dass sie nicht das Ergebniss der Induction sein können und keinen Zweifel darüber lassen, dass Jacobi schon damals in dem wissenschaftlichen Gebiete, welches Gauss ein Vierteljahrhundert früher der mathematischen Speculation eröffnet hatte und welches eben so sehr der höheren Algebra, als der Theorie der Zahlen angehört, im Besitze neuer, fruchtbarer Principien sein musste, was auch durch eine spätere Publikation bestätigt wird, in der er ausdrücklich erwähnt, dass er diese Principien schon damals Gauss brieflich mitgetheilt habe.

Von der weiteren Verfolgung dieses Gegenstandes wurde Jacobi zu jener Zeit durch eine andere Arbeit, seine Untersuchungen über die elliptischen Funktionen abgezogen, welche ihm bald eine so grosse Berühmtheit verleihen und eine Stelle unter den ersten Mathematikern der Zeit anweisen sollten.

Der junge Mathematiker, der sich schon in so vielen Richtungen mit Erfolg versucht hatte, schien längere Zeit in der Theorie der elliptischen Funktionen vom Glücke nicht begünstigt zu werden. Einer seiner Freunde, der ihn eines Tages auffallend verstimmt fand, erhielt auf die Frage nach dem Grunde dieser Verstimmung von ihm die Antwort: Sie sehen mich eben im Begriff, dieses Buch (Legendre's *exercices etc.*) auf die Bibliothek zurückzuschicken, mit welchem ich entschiedenes Unglück habe. Wenn ich sonst ein bedeutendes Werk studirt habe, hat es mich immer zu eigenen Gedanken angeregt und ist dabei immer etwas für mich abgefallen. Diesmal bin ich ganz leer ausgegangen und nicht zum geringsten Einfalle inspirirt worden.

Wenn die eigenen Gedanken in diesem Falle etwas lange auf sich warten liessen, so stellten sie sich dafür später um so reichlicher ein, so reichlich, dass sie in Verbindung mit den gleichzeitigen Gedanken Abel's eine unerwartete Erweiterung und die völlige Umgestaltung eines der wichtigsten Zweige der Analysis zur Folge hatten.

Indem der Fortschritt hier zu derselben Zeit von zwei verschiedenen Seiten ausging, wird es erforderlich, neben Jacobi's

Untersuchungen die gleichzeitigen Arbeiten Abel's zu erwähnen. Im Ursprunge von einander unabhängig, greifen die Entdeckungen beider später so in einander ein, dass die Darstellung der einen ohne Berücksichtigung der andern kaum verständlich sein würde.

Die Theorie der elliptischen Funktionen, mit welcher Abel's und Jacobi's Namen auf immer verbunden sind, reicht in ihren Anfängen nicht über die zweite Hälfte des vorigen Jahrhunderts zurück. Ein italienischer Mathematiker von ungewöhnlichem Scharfsinn, der Graf Fagnano aus dem Kirchenstaate, machte die merkwürdige Entdeckung, dass das Integral, welches den Bogen der Curve ausdrückt, welche damals die Mathematiker unter dem Namen Lemniscate vielfach beschäftigte, ähnliche Eigenschaften besitzt, wie das einfachere Integral, welches einen Kreisbogen darstellt, und dass z. B. zwischen den Grenzen zweier Integrale dieser Art, deren eines dem doppelten Werthe des andern gleich ist, ein einfacher algebraischer Zusammenhang Statt findet, so dass ein Lemniscatenbogen, wenn gleich eine Transcendente höherer Art, doch wie ein Kreisbogen durch geometrische Constructionen verdoppelt oder gehälftet werden kann. Euler fand einige Jahre später die eigentliche Quelle dieser und anderer ähnlicher Eigenschaften in einem Satze, der zu den schönsten Bereicherungen gehört, welche die Wissenschaft diesem grossen Forscher verdankt. Nach diesem Euler'schen Satze hängt ein gewisses Integral, welches allgemeiner ist als das von Fagnano betrachtete und in unserer jetzigen Terminologie elliptisches Integral der ersten Gattung heisst, so von seiner Grenze ab, dass zwei solche Integrale mit beliebigen Grenzen immer in ein drittes vereinigt werden können, dessen Grenze eine einfache algebraische Verbindung der Grenzen jener ist, gerade so wie der Sinus eines zweitheiligen Bogens algebraisch aus den Sinus seiner Bestandtheile gebildet werden kann. Aber das elliptische Integral ist allgemeiner, als dasjenige, welches einen Kreisbogen ausdrückt. Auf die einfachste Form gebracht, hängt es nicht wie dieses bloss von seiner Grenze, sondern auch von einer andern in der Funktion enthaltenen Grösse, dem sogenannten Modul, ab. Das Euler'sche Theorem ergab nur Beziehungen zwischen Integralen mit demselben Modul. Das erste Beispiel eines Zusammenhanges zwischen Integralen, die sich durch ihre Moduln unterscheiden, bot eine spätere, von Landen und in etwas anderer Form von Lagrange gemachte Entdeckung dar, nach welcher ein elliptisches Integral durch eine einfache algebraische Substitution in ein anderes Integral derselben Art verwandelt werden kann.

Es ist Legendre's unvergänglicher Ruhm, in den eben erwähnten Entdeckungen die Keime eines wichtigen Zweiges der Analysis erkannt und durch die Arbeit eines halben Lebens auf diesen Grundlagen eine selbständige Theorie errichtet zu haben, welche alle Integrale umfasst, in denen keine andere Irrationalität enthalten ist, als eine Quadratwurzel, unter welcher die Veränderliche den vierten Grad nicht übersteigt. Schon Euler hatte bemerkt, mit welchen Modifikationen sein Satz auf solche Integrale ausgedehnt werden kann; Legendre, indem er von dem glücklichen Gedanken ausging, alle diese Integrale auf feste canonische Formen zurückzuführen, gelangte zu der für die Ausbildung der Theorie so wichtig gewordenen Erkenntniss, dass sie in drei wesentlich verschiedene Gattungen zerfallen. Indem er dann jede Gattung einer sorgfältigen Untersuchung unterwarf, entdeckte er viele ihrer wichtigsten Eigenschaften, von welchen namentlich die, welche der dritten Gattung zukommen, sehr verborgen und ungemein schwer zugänglich waren. Nur durch die ausdauernste Beharrlichkeit, die den grossen Mathematiker immer von Neuem auf den Gegenstand zurückkommen liess, gelang es ihm, hier Schwierigkeiten zu besiegen, welche mit den Hülfsmitteln, die ihm zu Gebote standen, kaum überwindlich scheinen mussten.

Die Theorie, wie Abel und Jacobi sie vorfanden, bot mehrere höchst räthselhafte Erscheinungen dar, zu deren Aufklärung die damals bekannten Principien nicht ausreichten. So hatte man, um nur eine dieser Erscheinungen zu erwähnen, gefunden, dass der Grad der mit Hülfe des Euler'schen Satzes gebildeten Gleichung, von deren Lösung die Theilung des elliptischen Integrals abhängt, nicht wie in der analogen Frage der Kreistheilung der Anzahl der Theile, sondern dem Quadrate dieser Anzahl gleich ist. Die Bedeutung der reellen Wurzeln, deren Anzahl mit jener übereinstimmt, war leicht ersichtlich, wogegen die zahlreichern imaginären ganz unerklärlich erscheinen mussten. Aber dass hier ein Geheimniss verborgen liege, darüber hatte man vor Abel und Jacobi kein Bewusstsein, und ihnen war es vorbehalten, sich zuerst über diese und ähnliche Erscheinungen zu wundern, was in der Mathematik wie in anderen Gebieten oft schon eine halbe Entdeckung ist.

Obgleich die Umgestaltung der Theorie der elliptischen Funktionen, welche man Abel und Jacobi verdankt, aus dem Zusammenwirken mehrerer sich gegenseitig unterstützender Gedanken hervorgegangen ist, so scheint doch zweien dieser Gedanken die grösste Wichtigkeit zugeschrieben werden zu müssen, weil

sie alle Theile der neuen Theorie innig durchdringen. Während die früheren Bearbeiter dieses Gegenstandes das elliptische Integral der ersten Gattung als eine Funktion seiner Grenze ansahen, erkannten Abel und Jacobi unabhängig von einander, wenn auch der erstere einige Monate früher, die Nothwendigkeit, die Betrachtungsweise umzukehren und die Grenze nebst zwei einfachen, von ihr abhängigen Grössen, die so unzertrennlich mit ihr verbunden sind wie der Sinus zum Cosinus gehört, als Funktionen des Integrals zu behandeln, gerade wie man schon früher zur Erkenntniss der wichtigsten Eigenschaften der vom Kreise abhängigen Transcendenten gelangt war, indem man den Sinus und Cosinus als Funktionen des Bogens und nicht diesen als eine Funktion von jenen betrachtete.

Ein zweiter, Abel und Jacobi gemeinsamer Gedanke, der Gedanke, das Imaginäre in diese Theorie einzuführen, war von noch grösserer Bedeutung, und Jacobi hat es später oft wiederholt, dass die Einführung des Imaginären allein alle Räthsel der früheren Theorie gelöst habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, dass das nahe Liegende sich fast immer zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, dass dieser Gedanke Euler entgangen ist, zu dessen frühesten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunktionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgrössen behandelte, in solchem Grade vereinfacht und erweitert zu haben, dass fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr.

Indem Abel und Jacobi in die vorhin erwähnten, durch Umkehrung aus dem elliptischen Integral der ersten Gattung gebildeten Funktionen, welche nach unserer jetzigen Terminologie ausschliesslich elliptische Funktionen genannt werden, das Imaginäre einführten, erkannten sie, dass diese Funktionen gleichzeitig an der Natur der Kreisfunktionen und an der der Exponentialgrössen Theil haben, und dass, während jene nur für reelle, diese nur für imaginäre Werthe des Argumentes periodisch sind, die elliptischen Funktionen beide Arten der Periodicität in sich vereinigen.

Durch den Besitz dieser Grundgedanken auf einen neuen Boden gestellt, richteten Abel und Jacobi ihre Untersuchungen auf zwei verschiedene Regionen der Theorie. Abel's Thätigkeit wandte sich den Problemen zu, welche die Vervielfältigung und Theilung der elliptischen Integrale betreffen, und indem er mit Hülfe des Princips der doppelten Periode in die Natur der Wurzeln der Gleichung, von welcher die Theilung abhängt, tief eindrang, gelangte er zu der ganz unerwarteten Entdeckung, dass

die allgemeine Theilung des elliptischen Integrals mit beliebiger Grenze immer algebraisch, d. h. durch blosse Wurzelausziehungen bewerkstelligt werden kann, sobald die besondere Theilung der sogenannten vollständigen Integrale als schon ausgeführt vorausgesetzt wird. Die eben genannte besondere Theilung scheint nur für specielle Module möglich, unter welchen derjenige der einfachste ist, dem die Lemniscate entspricht. Indem er die Lösung des Problems für diesen Fall durchführte, zeigte er, dass die Theilung der ganzen Lemniscate der Kreistheilung völlig analog ist und in denselben Fällen durch geometrische Construktion geleistet werden kann, in welchen nach der schönen, 25 Jahre früher von Gauss gegebenen Theorie der Kreis eine solche Theilung zulässt.

An diese letztere Arbeit Abel's knüpft sich eine erwähnenswerthe historische Merkwürdigkeit. In der Einleitung zum letzten Abschnitte der „Disq. arith.", welcher der Kreistheilung gewidmet ist, hatte Gauss im Vorbeigehen bemerkt, dass dasselbe Princip, worauf seine Kreistheilung beruht, auch auf die Theilung der Lemniscate anwendbar sei, und in der That liegt das Gaussische Princip, nach welchem die Wurzeln der zu lösenden Gleichung so in einen Cyclus zu bringen sind, dass jede von der vorhergehenden auf dieselbe Weise abhängt, der Abhandlung Abel's über die Theilung der Lemniscate wesentlich zu Grunde; wenn aber für die Kreistheilung längst bekannte Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen genügten, um die Wurzeln dem Gaussischen Principe gemäss zu ordnen, so war für den Fall der Lemniscate zu einer ähnlichen Anordnung, ja um nur die Möglichkeit einer solchen zu erkennen, eine Einsicht in die Natur der Wurzeln erforderlich, welche nur das Princip der doppelten Periodicität gewähren konnte. Die vorhin erwähnte Aeusserung ist also durch Abel's Abhandlung zu einem unwidersprechlichen Zeugnisse geworden, dass Gauss, seiner Zeit vorauseilend, schon zu Anfange des Jahrhunderts das Princip der doppelten Periode erkannt hatte. Dieses Zeugniss ist jedoch erst durch die spätere Arbeit Abel's verständlich geworden und thut daher seinem und Jacobi's Anrecht an diese Erfindung keinen Abbruch.

Ausser den schon erwähnten, auf die Theilung bezüglichen Resultaten hatten Abel's Untersuchungen noch eine andere, nicht weniger wichtige Entdeckung zur Folge. Indem er in den Formeln, durch welche er die elliptischen Funktionen eines vielfachen Argumentes durch die Funktionen des einfachen dargestellt hatte, den Multiplikator unendlich werden liess, erhielt er merkwürdige Ausdrücke für die elliptischen Funktionen in Form von unend-

lichen Reihen, so wie von Quotienten unendlicher Produkte, eine Entdeckung, welche für die Analysis vielleicht von noch grösserer Bedeutung ist, als die von Abel nachgewiesene algebraische Lösbarkeit der Gleichungen für die Theilung.

Zu derselben Zeit, als Abel diese schönen Untersuchungen ausführte, war Jacobi in einem anderen Theile desselben Gebietes nicht weniger erfolgreich beschäftigt. Die oben erwähnte Substitution, durch welche ein elliptisches Integral in ein Integral derselben Form übergeht, war bis dahin die einzige ihrer Art. Zwar hatte Legendre nicht lange vor der Zeit, wo Jacobi sich diesem Gegenstande zuwandte, eine zweite Transformation der elliptischen Integrale aufgefunden, aber diese zweite Transformation, mit welcher er den Gegenstand für abgeschlossen hielt, war damals in Deutschland noch nicht bekannt, und es gehörte aber ein seltener Scharfsinn dazu, aus einem sichtbaren Ringe auf das Vorhandensein einer unendlichen Kette zu schliessen, und eben so grosse Kühnheit, sich die Erkenntniss der Natur dieser Kette als Aufgabe zu stellen.

Eine glückliche Induktion, bei welcher der feine und ganz ... Gedanke eine wesentliche Rolle spielte, die Transformation und die Multiplikation aus einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkte und letztere als einen speciellen Fall der erstern zu betrachten, ...te Jacobi auf die Vermuthung, dass rationale Funktionen ...es Grades geeignet seien, ein elliptisches Integral in ein Integral derselben Form zu verwandeln. Diese Vermuthung bestätigte sich sogleich, indem sich ergab, dass die Anzahl der willkührlichen Coefficienten, über welche man für jeden Grad zu verfügen hat, ausreichte, um allen Bedingungen zu genügen, welche zu erfüllen waren, wenn das transformirte Integral der Form nach dem ursprünglichen übereinstimmen sollte. Aber wenn eine einfache Betrachtungsweise über die Möglichkeit der Sache keinen Zweifel lassen konnte, so war noch ein grosser Schritt zu thun, um die innere analytische Natur der zur Transformation geeigneten gebrochenen Ausdrücke zu erkennen. Von welcher Art die hierbei zu besiegenden Schwierigkeiten waren, und durch welche geistreiche Betrachtungen Jacobi diese überwand, kann hier nicht ausgeführt werden, eben so wenig, als es mir gestattet ist, alle wichtigen Folgerungen aufzuzählen, die sich aus dem vollständig gelösten Probleme ergaben. Ich erwähne nur des merkwürdigen Ergebnisses dieser Untersuchung, dass die Multiplikation immer aus zwei Transformationen zusammengesetzt werden kann.

Indem Abel und Jacobi so die Theorie gleichzeitig in zwei

verschiedenen Richtungen vervollkommneten, schien es, als habe das Schicksal die Ehre des zu vollbringenden Fortschrittes gleichmässig unter die jungen Wettkämpfer vertheilen wollen, denn die Art, wie bald darauf einer die Erfindung des andern weiter führte, liess keinen Zweifel, dass jeder von ihnen, wäre ihm der andere nicht in einem Theile der Arbeit zuvorgekommen, den ganzen Fortschritt allein vollbracht haben würde.

Jacobi war in seinen Untersuchungen von der Annahme ausgegangen, dass bei der Transformation die ursprüngliche Variable rational durch die neue ausgedrückt sei. Abel behandelte das Problem in der weiteren Voraussetzung, dass zwischen beiden irgend eine algebraische Gleichung Statt finde, und gelangte zu dem Resultate, dass das so verallgemeinerte Problem immer auf den Fall zurückgeführt werden kann, den Jacobi so vollständig behandelt hatte.

Nicht minder erfolgreich griff Jacobi in die von Abel gegebene Theorie der allgemeinen Theilung ein. Die Art, wie Abel das Problem gelöst hatte, zeigte zwar, dass die Wurzeln immer algebraisch ausdrückbar sind, erforderte aber zur wirklichen Darstellung derselben die Bildung von gewissen symmetrischen Wurzelverbindungen, die nur in jedem besondern Falle bewerkstelligt werden konnte. Aus einem neuen Principe, welches bald näher zu erwähnen sein wird, leitete Jacobi die schliesslichen, für jeden Grad geltenden und unmittelbar aus den Daten des Problems gebildeten Ausdrücke der Wurzeln ab, welche Ausdrücke überdies vor den Abel'schen eine grössere Einfachheit ihrer Form voraus haben. Als Jacobi das Resultat dieser Arbeit in einer kurzen Notiz bekannt machte, hoffte er Abel durch die Vervollkommnung der Lösung des Theilungsproblems in Verwunderung zu setzen, aber diese Hoffnung blieb unerfüllt. — Abel war eben gestorben, kaum 27 Jahre alt, weniger als zwei Jahre nach der Bekanntmachung seiner ersten Arbeiten über die elliptischen Funktionen. Ein so frühes Ziel hatte der Tod der glänzenden Laufbahn dieses tiefsinnigen und umfassenden Geistes gesetzt.

Jacobi's weitere Untersuchungen über die elliptischen Transcendenten, wie auch die zuletzt erwähnte, sind aus einem Gedanken hervorgegangen, dem man wegen der Folgen, die er gehabt, vielleicht die erste Stelle unter seinen Conceptionen einräumen muss. Es war dies der Gedanke, die unendlichen Produkte, durch deren Quotienten Abel die elliptischen Funktionen ausgedrückt hatte, als selbständige Transcendenten in die Analysis einzuführen. Als es ihm gelungen war, diese Produkte, die übrigens alle von derselben Natur und als besondere Fälle einer Transcendente

anzusehen sind, in Reihenform darzustellen, erkannte er eine Funktion, welche sich französischen Mathematikern schon in Untersuchungen der mathematischen Physik dargeboten hatte, wo sie aber wenig beachtet und nur eine ihrer Eigenschaften bemerkt worden war. Jacobi unterwarf sie einer tief eindringenden Untersuchung, erforschte ihre analytische Natur und führte sie dann in die Theorie der Integrale der zweiten und dritten Gattung ein, was nicht nur die Erkenntniss des inneren Zusammenhanges schon bekannter, isolirt stehender Eigenschaften dieser Integrale, sondern auch die wichtige Entdeckung zur Folge hatte, dass die Integrale der dritten Gattung, welche von drei Elementen abhangen, vermittelst der neuen Transcendente, welche deren nur zwei enthält, ausgedrückt werden können.

Bei der spätern Darstellung der ganzen Theorie, wie Jacobi sie in seinen Vorlesungen zu geben pflegte, bildet die Betrachtung der erwähnten Funktion den Ausgangspunkt. Die ganze Lehre gewinnt dadurch nicht nur einen überraschenden Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit, sondern dieser umgekehrte Gang ist auch dadurch bemerkenswerth, dass er für andere, später zu erwähnende Untersuchungen das Vorbild geworden ist.

Bedenkt man, dass die neue Funktion jetzt das ganze Gebiet der elliptischen Transcendenten beherrscht, dass Jacobi aus ihren Eigenschaften wichtige Theoreme der höheren Arithmetik abgeleitet hat, und dass sie eine wesentliche Rolle in vielen Anwendungen spielt, von welchen hier nur die vermittelst dieser Transcendente gegebene Darstellung der Rotationsbewegung erwähnt werden mag, welche eine von Jacobi's letzten und schönsten Arbeiten ist, so wird man dieser Funktion die nächste Stelle nach den längst in die Wissenschaft aufgenommenen Elementartranscendenten einräumen müssen. Auffallender Weise hat eine so wichtige Funktion noch keinen andern Namen, als den der Transcendente Θ, nach der zufälligen Bezeichnung, mit der sie zuerst bei Jacobi erscheint, und die Mathematiker würden nur eine Pflicht der Dankbarkeit erfüllen, wenn sie sich vereinigten, ihr Jacobi's Namen beizulegen, um das Andenken des Mannes zu ehren, zu dessen schönsten Entdeckungen es gehört, die innere Natur und hohe Bedeutung dieser Transcendente zuerst erkannt zu haben.

Abel's oben erwähnte Arbeiten sind nicht die einzige Leistung ersten Ranges dieses hervorragenden Mathematikers, sie sind nicht einmal die bedeutendste seiner Leistungen. Seine grösste Entdeckung hat er in einem Satze niedergelegt, welcher seinen Namen führt und ganz das Gepräge seines ausserordent-

lichen Geistes trägt, dessen charakteristische Eigenschaft es war, die Fragen der Wissenschaft in der umfassendsten Allgemeinheit zu behandeln.

Das schon oben bezeichnete Euler'sche Theorem — ich rede hier von demselben als Princip, nicht von den daraus gezogenen Folgerungen, die sich täglich weiter erstreckten — bildete damals auf dem Gebiete, dem es angehört, die Grenze der Wissenschaft, über welche hinauszugehen Euler selbst, Lagrange und andere Vorgänger Abel's sich vergebens bemüht hatten. Welche Bewunderung musste daher eine Entdeckung hervorrufen, welche die Integrale aller algebraischen Funktionen umfassend die Grundeigenschaft derselben enthüllte.

Legendre nennt das Abel'sche Theorem ein *monumentum aere perennius*, und Jacobi bezeichnet denselben Satz, „wie er in einfacher Gestalt und ohne Apparat von Calcul den tiefsten und umfassendsten mathematischen Gedanken ausspreche, als die grösste mathematische Entdeckung unserer Zeit, obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, grosse Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen könne."

Diese Arbeit hat bereits begonnen und Jacobi selbst hat daran den wesentlichsten Antheil gehabt.

Der nahe liegende Versuch, die umgekehrten Funktionen der Abel'schen Integrale auf dieselbe Weise, wie es bei den elliptischen mit so grossem Erfolge geschehen war, in die Analysis einzuführen, erwies sich bald als unausführbar und verwickelte in unauflöslichen Widerspruch, denn Jacobi erkannte sogleich, dass diese umgekehrten Funktionen vier- oder mehrfach periodisch sein müssten, während doch eine analytische Funktion, wenn sie wie die elliptischen und Kreisfunktionen einwerthig, und wo sie nicht unendlich wird, stetig sein soll, nur zwei Perioden zulässt. Es bedurfte also hier eines neuen verborgenen Gedankens, wenn das Abel'sche Theorem nicht unfruchtbar bleiben, wenn es die Basis einer grossen analytischen Theorie werden sollte.

Nachdem Jacobi mehrere Jahre hindurch den Gegenstand nach allen Seiten erwogen hatte, fand er endlich die Lösung des Räthsels darin, dass hier gleichzeitig vier oder mehr Integrale zu betrachten und aus ihnen durch Umkehrung zwei oder mehr Funktionen von eben so vielen Argumenten zu bilden sind. Diese Divination machte er in einer Abhandlung von 10 Seiten bekannt, der zwei Jahre später eine umfangreichere folgte, in welcher die analytische Natur dieser umgekehrten Funktionen im hellsten Lichte erschien.

Gehört auch die später gefundene Darstellung dieser Funktionen nicht Jacobi, sondern zwei jüngern Mathematikern von ungewöhnlichem Talente, so muss ich doch auch dieses wichtigen Fortschrittes hier in so fern erwähnen, als Jacobi's Einfluss unverkennbar darin hervortritt. Goepel und Rosenhain haben beide, Jacobi's oben erwähnte zweite Behandlung der Theorie der elliptischen Funktionen zum Vorbilde nehmend, ihren schönen Arbeiten die Betrachtung von unendlichen Reihen zu Grunde gelegt, deren Bildungsgesetz allgemeiner, aber von derselben Art, wie das der Reihe ist, durch welche die Jacobi'sche Funktion ausgedrückt wird.

Obgleich ich mich bei der eben gegebenen Darstellung von Jacobi's Entdeckungen im Gebiete der elliptischen und Abelschen Transcendenten auf das Wesentlichste beschränkt habe, so ist dieselbe dennoch zu einem Umfange angewachsen, der mich zwingt, die noch zu erwähnenden Leistungen Jacobi's hier in eine kurze Uebersicht zusammenzufassen, aus welcher ich viele Arbeiten, welche nur einzelne Fragen betreffen und das Detail der Wissenschaft vervollkommnet haben, ausschliessen muss.

Schon oben ist von Jacobi's Untersuchungen über die Kreistheilung und die Anwendungen derselben auf die höhere Arithmetik als zu seinen frühesten Arbeiten gehörend die Rede gewesen. Bei diesen Untersuchungen, denen er die Form zum Grunde legte, welche die zuerst von Gauss gegebene Auflösung der zweigliedrigen Gleichungen später durch Lagrange erhalten hatte, traf er in einigen Resultaten mit dem grossen Mathematiker Cauchy zusammen, der zu derselben Zeit mit ähnlichen Forschungen beschäftigt war und dieses Umstandes erwähnte, als er während Jacobi's ersten Aufenthaltes in Paris seine Arbeiten im Auszuge veröffentlichte.

Aus einem schönen, aus der Kreistheilung abgeleiteten Satze, auf den auch Cauchy gekommen war, und nach welchem alle Primzahlen, die bei der Division durch eine gegebene Primzahl oder das Vierfache derselben die Einheit zum Reste lassen, auf eine bestimmte Potenz erhoben, deren Exponent bloss von der letzteren Primzahl abhängt, durch die sogenannte quadratische Hauptform dargestellt werden, welche die negativ genommene gegebene Primzahl zur Determinante hat, schöpfte Jacobi die Vermuthung, dass jener Exponent mit der Anzahl der von einander verschiedenen quadratischen Formen übereinstimmen müsse, welche der erwähnten Determinante entsprechen. Da sich diese Vermuthung in allen numerischen Beispielen bestätigte, so trug er kein Bedenken, diese Bemerkung in einer kurzen Notiz zu ver-

öffentlichen. Ich glaube den bisher unbekannt gebliebenen Ursprung dieses Resultats nach Jacobi's mündlicher Mittheilung als ein merkwürdiges Beispiel scharfsinniger Induktion hier erwähnen zu müssen, obgleich der strenge Beweis desselben nicht auf die Kreistheilung gegründet werden zu können, sondern wesentlich verschiedene, der Integralrechnung und der Reihenlehre entnommene Principien zu erfordern scheint, die erst später in die Wissenschaft eingeführt worden sind.

Die im Jahre 1832 erschienene zweite Abhandlung von Gauss über die biquadratischen Reste, die durch den tiefsinnigen Gedanken, complexe ganze Zahlen in der höheren Arithmetik gerade so wie reelle zu behandeln, und durch das darin aufgestellte Reciprocitätsgesetz Epoche macht, welches in der Theorie der biquadratischen Reste zwischen zwei complexen Primzahlen Statt findet, gab Jacobi Veranlassung, seine früheren Untersuchungen wieder aufzunehmen, und es gelang ihm, den erwähnten schönen Satz von Gauss und einen ähnlichen, welcher sich auf die cubischen Reste bezieht, mit grosser Einfachheit aus der Kreistheilung abzuleiten.

Obgleich Jacobi die eben angeführten Untersuchungen und andere damit zusammenhängende, die ich nicht einmal andeutungsweise bezeichnen kann, in den Jahren 1836—39 vollständig niedergeschrieben hat, so ist er doch nie dazu gekommen, sie durch den Druck zu veröffentlichen. Seine Zögerung entsprang aus dem Wunsche, einigen seiner Resultate eine grössere Ausdehnung zu geben, wozu er, von so vielen andern Arbeiten in Anspruch genommen, die nöthige Musse nicht gefunden hat. Ein Theil seiner Forschungen und namentlich die schon erwähnten Beweise der Reciprocitätssätze sind jedoch einigen deutschen Mathematikern durch Nachschriften der Vorlesungen bekannt geworden, welche er im Winter 1836—37 in Königsberg über die Kreistheilung und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen gehalten hat.

Eine andere höchst ergiebige Quelle für die höhere Arithmetik hat Jacobi in der Theorie der elliptischen Funktionen entdeckt, aus welcher er schöne Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate, so wie andere über solche Zahlen abgeleitet hat, welche gleichzeitig in mehreren quadratischen Formen enthalten sind. Diese wichtigen Bereicherungen der Wissenschaft sind eine Frucht der oben erwähnten Einführung der Jacobi'schen Funktion in die Theorie der elliptischen Transcendenten.

Jacobi hat sich wiederholt mit der Reduktion und Werth-

bestimmung doppelter und vielfacher Integrale beschäftigt. Ich erwähne hier besonders der einfachen Methode, durch welche er die Bestimmung der Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoides auf elliptische Integrale der ersten und zweiten Gattung zurückführt, welche Zurückführung Legendre, zu dessen schönsten Leistungen sie gehört, nur mit Hülfe sehr verborgener Eigenschaften der Integrale der dritten Gattung gelungen war. In einer andern hierher gehörigen Abhandlung hat Jacobi das Euler'sche Additionstheorem auf doppelte Integrale ausgedehnt, und bald darauf bemerkt, wie auch der Abel'sche Satz einer ähnlichen Erweiterung fähig sei.

Von Jacobi's Arbeiten über das eben genannte Kapitel der Integralrechnung ist nur ein Theil veröffentlicht worden. Eine grosse Abhandlung, welche die Attraktion der Ellipsoide zum Gegenstande hat, obgleich seit langer Zeit beinahe vollendet, ist bisher ungedruckt geblieben und nur durch einige gelegentliche Notizen bekannt geworden. Als er sich mit dem erwähnten Problem beschäftigte, kam er auch auf den schönen, von Poisson um dieselbe Zeit gefundenen Satz, nach welchem die Anziehung, welche eine unendlich dünne, von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Flächen begrenzte Schale auf einen Punkt im äusseren Raume ausübt, ohne Integralzeichen dargestellt werden kann. Jacobi hat dieses Umstandes nie öffentlich Erwähnung gethan, obgleich er sich dabei auf das Zeugniss mehrerer Mathematiker hätte berufen können, denen er den Satz mitgetheilt hatte, ehe die erste Anzeige der Poisson'schen Abhandlung erschienen war.

Mit den eben besprochenen Untersuchungen hängt eine andere Arbeit Jacobi's zusammen, die wegen ihres überraschenden Resultates hier nicht unerwähnt bleiben darf. Maclaurin hat bekanntlich zuerst gezeigt, dass eine homogene flüssige Masse mit Beibehaltung ihrer äussern Gestalt sich gleichförmig um eine feste Axe drehen kann, wenn diese Gestalt die eines Rotations-Ellipsoides ist, und dieses schöne Resultat ist später von d'Alembert und Laplace durch den Nachweis vervollständigt worden, dass jedem Werthe der Winkelgeschwindigkeit, wenn dieser unter einer gewissen Grenze liegt, zwei und nur zwei solche Ellipsoide entsprechen. Lagrange scheint zuerst an die Möglichkeit gedacht zu haben, dass auch ein ungleichaxiges Ellipsoid den Bedingungen der Permanenz genügen könne; wenigstens geht dieser grosse Mathematiker in seiner analytischen Mechanik bei Behandlung dieser Frage von Formeln aus, welche für ein beliebiges Ellipsoid gelten. Indem er aber so zu zwei zu erfüllenden Glei-

chungen gelangt, in welchen die beiden Aequatorialaxen auf ein symmetrische Weise enthalten sind, zieht er aus dieser Symmetrie den Schluss, dass jene Axen gleich sein müssen, während doch nur daraus folgt, dass sie gleich sein können, wo das beide Gleichungen in eine und mit der von Maclaurin zuerst aufgestellten und von d'Alembert und Laplace discutirte zusammenfallen.

Der Verfasser eines bekannten Lehrbuchs, der in der Darstellung dieses Gegenstandes Lagrange gefolgt ist und den eben erwähnten übereilten Schluss mit dem Worte „nothwendig" begleitet, erregte zuerst Jacobi's Verdacht, welcher bei genauerer Betrachtung jener zwei Gleichungen zu seiner und gewiss aller Mathematiker grossen Ueberraschung bald fand, dass auch ein ungleichaxiges Ellipsoid den Bedingungen des Gleichgewichts genügen kann.

Der Veranlassung, welche Jacobi in seinen Untersuchungen über die Attraktion der Ellipsoide fand, sich mit den Flächen zweiten Grades zu beschäftigen, verdankt man die Kenntniss mehrerer interessanter Eigenschaften und einer höchst eleganten Erzeugungsweise dieser Flächen. Die mir gestellten Grenzen zwingen mich, mich auf diese Andeutung zu beschränken, und Jacobi's übrige der Geometrie gewidmeten Arbeiten nur dem Gegenstande nach zu bezeichnen. Ich nenne daher nur die Abhandlung über ein Problem der Elementargeometrie, welches vor ihm nur in speciellen Fällen behandelt worden war, und dessen vollständige Lösung er aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ableitet, seine Untersuchungen über die Anzahl der Doppeltangenten algebraischer Curven und einige kleinere Aufsätze, in welchen er Sätze über die Krümmung der Flächen und kürzeste Linien mit grosser Einfachheit auf rein synthetischem Wege beweist.

Zu Jacobi's wichtigsten Untersuchungen gehören diejenigen über die analytische Mechanik. Hamilton hatte die interessante Entdeckung gemacht, dass die Integration der Differentialgleichungen der Mechanik sich immer auf die Lösung von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückführen lässt, aber diese Entdeckung war, wie merkwürdig sie auch erscheinen musste, völlig unfruchtbar geblieben, bis Jacobi sie von einer unnöthigen Complication befreite, indem er zeigte, dass die zu findende Lösung nur einer der beiden partiellen Differentialgleichungen zu genügen braucht. Indem er vermittelst der so vereinfachten Theorie, um nur eine der zahlreichen Anwendungen anzuführen, das noch ungelöste Problem behandelte, die geodätische Linie auf dem ungleichaxigen Ellipsoid zu bestimmen, gelang es ihm, mi

Hülfe eines analytischen Instruments, welches sich schon früher in seinen Händen als sehr wirksam gezeigt hatte und jetzt unter dem Namen der elliptischen Coordinaten allgemein bekannt ist, die partielle Differentialgleichung zu integriren und so die Gleichung der geodätischen Linie in Form einer Relation zwischen zwei Abel'schen Integralen darzustellen. Diese Jacobi'sche Entdeckung ist die Grundlage eines der schönsten Kapitel der höheren Geometrie geworden, welches deutsche, französische und englische Mathematiker wetteifernd ausgebildet haben.

Durch den oben erwähnten Zusammenhang zwischen einem Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen und einer partiellen Differentialgleichung wurde er, die Sache in umgekehrter Ordnung betrachtend, zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, mit welcher er sich schon in einer seiner frühesten Abhandlungen über die Pfaff'sche Methode beschäftigt hatte, und gelangte jetzt zu dem Resultate, dass von der ganzen Reihe von Systemen, deren successive Integration Pfaff fordert, die Behandlung des ersten alle übrigen überflüssig macht, dass also schon der erste Schritt der früheren Methode vollständig zum Ziele führt.

Einen ähnlichen Charakter hat die Vervollkommnung, welche die Variationsrechnung Jacobi verdankt. Während zur Existenz eines Maximums oder Minimums das Verschwinden der ersten Variation nothwendig ist, so ist diese Bedingung allein nicht ausreichend und erst die Beschaffenheit der zweiten Variation entscheidet, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden stattfindet. Zufolge der Theorie, wie sie Jacobi vorfand, waren nach den Integrationen, die durch das Verschwinden der ersten Variation gefordert werden, neue Integrationen zu leisten, um die zweite Variation zu discutiren; Jacobi zeigte, dass die ersteren die letzteren involviren, so dass also auch hier die vollständige Lösung der Aufgabe bereits mit der Vollendung des ersten Schrittes gegeben ist.

Wenn es die immer mehr hervortretende Tendenz der neueren Analysis ist, Gedanken an die Stelle der Rechnung zu setzen, so giebt es doch gewisse Gebiete, in denen die Rechnung ihr Recht behält. Jacobi, der jene Tendenz so wesentlich gefördert hat, leistete vermöge seiner Meisterschaft in der Technik auch in diesen Gebieten Bewunderungswürdiges. Dahin gehören seine Abhandlungen über die Transformation homogener Funktionen des zweiten Grades, über Elimination, über die simultanen Werthe, welche einer Anzahl von algebraischen Gleichungen genügen, über die Umkehrung der Reihen und über die Theorie der Determinan-

ten. In dem letztgenannten Kapitel verdankt man ihm eine ausgebildete Theorie der von ihm mit dem Namen der Funktional-Determinanten bezeichneten Ausdrücke. Indem er die Analogie dieser Ausdrücke mit den Differentialquotienten weit verfolgte, gelangte er zu einem allgemeinen Principe, welches er das Princip des letzten Multiplicators nannte, und welches bei fast allen in den Anwendungen vorkommenden Integrationsproblemen die letzte Integration zu bewerkstelligen das Mittel giebt, indem es den dazu erforderlichen integrirenden Faktor *a priori* angiebt.

Der Einfluss, welchen Jacobi auf die Fortschritte der Wissenschaft geübt hat, würde nur unvollständig hervortreten, wenn ich nicht seiner Thätigkeit als öffentlicher Lehrer Erwähnung thäte. Es war nicht seine Sache, Fertiges und Ueberliefertes von neuem zu überliefern; seine Vorlesungen bewegten sich sämmtlich ausserhalb des Gebietes der Lehrbücher, und umfassten nur diejenigen Theile der Wissenschaft, in denen er selbst schaffend aufgetreten war, und das hiess bei ihm, sie boten die reichste Fülle der Abwechselung. Seine Vorträge zeichneten sich nicht durch diejenige Deutlichkeit aus, welche auch der geistigen Armuth oft zu Theil wird, sondern durch eine Klarheit höherer Art. Er suchte vor Allem die leitenden Gedanken, welche jeder Theorie zu Grunde liegen, darzustellen, und indem er Alles, was den Schein der Künstlichkeit an sich trug, entfernte, entwickelte sich die Lösung der Probleme so naturgemäss vor seinen Zuhörern, dass diese Aehnliches schaffen zu können die Hoffnung fassen konnten. Wie er die schwierigsten Gegenstände zu behandeln wusste, konnte er seine Zuhörer mit Recht durch die Versicherung ermuthigen, dass sie in seinen Vorlesungen sich nur ganz einfache Gedanken anzueignen haben würden.

Der Erfolg einer so ungewöhnlichen Lehrart, wie ich sie eben geschildert habe und wie sie nur einem schöpferischen Geiste zu Gebote steht, war wahrhaft ausserordentlich. Wenn jetzt in Deutschland die Kenntniss der Methoden der Analysis in einem Grade verbreitet ist wie zu keiner frühern Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft nach allen Richtungen erweitern und bereichern: so hat Jacobi an einer so erfreulichen Erscheinung den wesentlichsten Antheil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rath, seine aufmunternde Theilnahme gefehlt.

Ich habe mich eben bemüht, Jacobi als Erfinder und in seiner Wirksamkeit als Lehrer darzustellen. Soll ich jetzt den Versuch wagen, ihn zu schildern, wie er ausserhalb der wissen-

schaftlichen Sphäre denen erschien, die den mathematischen Wissenschaften fern stehen, so muss ich es als den Grundzug seines Wesens bezeichnen, dass er ganz in der Welt der Gedanken lebte, und dass in ihm Das, wozu es bei den meisten, selbst bedeutenden Menschen, eines besonderen Anlaufs bedarf, das Denken zum habituellen Zustande und wie zur zweiten Natur geworden war. Wenn etwas im Leben oder in der Wissenschaft einmal seine Aufmerksamkeit erregt hatte, so ruhte er nicht, bis er es zu eigenen Gedanken verarbeitet hatte, und mit dieser ununterbrochenen geistigen Thätigkeit war in ihm ein so seltenes Gedächtniss vereinigt, dass er Alles, womit er sich einmal beschäftigt hatte, sich sogleich vergegenwärtigen und darüber verfügen konnte.

Der unerschöpfliche Vorrath an Wissen und eigenen Gedanken, welcher Jacobi jeden Augenblick zu Gebote stand, eine seltene geistige Beweglichkeit, durch die er sich jedem Alter, jeder Fassungskraft anzupassen wusste, und eine eigenthümlich humoristische, die Dinge scharf bezeichnende Ausdrucksweise verliehen dem grossen Mathematiker auch im geselligen Verkehr eine ungewöhnliche Bedeutung, die noch durch die Bereitwilligkeit, wissenschaftliche Fragen aus dem Stegreif zu behandeln erhöht wurde. Diese Bereitwilligkeit entsprang aus dem innersten Wesen seiner Natur, die in der Ueberwindung von Schwierigkeiten ihre eigentliche Befriedigung fand, und es lag daher für ihn ein ganz besonderer Reiz darin, wissenschaftliche Ergebnisse durch einfache Betrachtungen selbst solchen verständlich zu machen, denen die dazu scheinbar unentbehrlichen Vorkenntnisse fehlten. Nur musste er, um einen solchen Versuch anzustellen, die Ueberzeugung haben, dass die, mit welchen er sich unterhielt, ein wirkliches Interesse an der Sache nahmen. Wo er hingegen gedankenlose Neugier zu bemerken glaubte oder entschiedene Meinungen mit Selbstgefälligkeit von solchen aussprechen hörte, die sich nie die harte Arbeit des Selbstdenkens zugemuthet hatten, verliess ihn die Geduld, und er machte dann gewöhnlich der Unterhaltung durch eine ironische, nicht selten scharf abweisende Bemerkung ein Ende. Mat hat ihm oft vorgeworfen, dass er sich bei solchen Anlässen seiner geistigen Kraft zu sehr bewusst gezeigt habe. Aber die, welche ihn so beurtheilten, würden vielleicht ihre Meinung geändert haben, hätten sie den Preis gekannt, um welchen er das Recht auf ein solches Bewusstsein erlangt hatte. Ein Brief aus dem Jahr 1824, aus einer Zeit also, zu welcher Jacobi noch völlig unbekannt war und daher durchaus ein Interesse haben konnte, seine geistigen Kämpfe mit übertriebenen Farben zu schildern, enthält folgende Stelle, die ich als

merkwürdigen Beitrag zur Charakteristik des ausserordentlichen Mannes hier wörtlich mittheile. Jacobi war damals eben 20 Jahre alt geworden und seit etwa einem Jahre ausschliesslich mit mathematischen Studien beschäftigt.

„Es ist eine saure Arbeit, die ich gethan habe, und eine saure Arbeit, in der ich begriffen bin. Nicht Fleiss und Gedächtniss sind es, die hier zum Ziele führen, sie sind hier die untergeordnetsten Diener des sich bewegenden reinen Gedankens. Aber hartnäckiges, hirnzersprengendes Nachdenken erheischt mehr Kraft als der ausdauernste Fleiss. Wenn ich daher durch stete Uebung dieses Nachdenkens einige Kraft darin gewonnen habe, so glaube man nicht, es sei mir leicht geworden, durch irgend eine glückliche Naturgabe etwa. Saure, saure Arbeit hab' ich zu bestehen, und die Angst des Nachdenkens hat oft mächtig an meiner Gesundheit gerüttelt. Das Bewusstsein freilich der erlangten Kraft giebt den schönsten Lohn der Arbeit, so wie wiederum die Ermuthigung, fortzufahren und nicht zu erschlaffen. Gedankenlose Menschen, denen jene Arbeit und jenes Bewusstsein also auch ein ganz fremdes ist, suchen diesen Trost, der doch allein machen kann, dass man auf der schwierigen Bahn den Muth nicht sinken lässt, dadurch zu verkümmern, dass sie das Bewusstsein, ein eignes, freies zu sein — denn nur in der Bewegung des Gedankens ist der Mensch frei und bei sich — unter dem Namen Eigendünkel oder Anmaassung gehässig machen. Jeder, der die Idee einer Wissenschaft in sich trägt, kann nicht anders, als die Dinge darnach abschätzen, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbart: nach diesem grossen Maassstabe muss ihm daher manches als geringfügig vorkommen, was den andern ziemlich preiswürdig erscheinen kann. So hat man auch mir oft Anmaassung vorgeworfen, oder wie man mich am schönsten gelobt hat, indem man einen Tadel auszusprechen meinte, ich sei stolz gegen alles Niedere und nur demüthig gegen das Höhere. Aber jener unendliche Maassstab, den man an die Welt in sich und ausser sich legt, hindert vor aller Ueberschätzung seiner selbst, indem man immer das unendliche Ziel im Auge hat und seine beschränkte Kraft. In jenem Stolze und jener Demuth will ich immer zu beharren streben, ja immer stolzer und immer demüthiger werden."

Dass es bei Jacobi keine blosse Phrase war, wenn er von sich sagt, dass er die Dinge darnach abschätze, wie sich der menschliche Geist in ihnen offenbare, und dass er wirklich Alles, was die Welt der Gedanken nicht berührte, wenn nicht mit Gleichgültigkeit, doch mit Gleichmuth behandelte, hat er in den schwierigsten Lagen seines Lebens gezeigt. Am bewunderungswürdigsten

offenbarte sich dieser wahrhaft philosophische Gleichmuth, als ihn das Unglück traf, sein ganzes, von seinem Vater ererbtes Vermögen zu verlieren, ein Verlust, der ihm um so empfindlicher hätte sein können, als er, seit zehn Jahren verheirathet, für eine zahlreiche Familie zu sorgen hatte. Wer ihn damals sah, als er herbeigeeilt war, um seiner von ähnlichem Verluste betroffenen Mutter mit Rath und That beizustehen, konnte in seiner Stimmung nicht die geringste Veränderung wahrnehmen. Er sprach mit demselben Interesse wie immer von wissenschaftlichen Dingen und klagte nur darüber, dass die unerwartete Reise ihn aus einer Untersuchung gerissen habe, die ihn gerade lebhaft beschäftigte.

Wie Jacobi's Gedankencultus sich in der Anerkennung von Abel's grosser Entdeckung kund gab, habe ich schon früher erwähnt. Einen ähnlichen Sinn zeigte er für alles geistig Bedeutende, und auf ihn findet der Ausspruch eines alten Schriftstellers keine Anwendung, dass die Menschen eigentlich nur das bewundern, was sie selbst vollbringen zu können glauben. Seine Anerkennung umfasste das ganze geistige Gebiet, und in seiner Wissenschaft war Jacobi's Freude über eine fremde Erfindung um so lebhafter, je mehr sich diese durch ihr Gepräge von seinen eigenen Schöpfungen unterschied. Es war eine ihm natürliche Bewegung, in solchem Falle den Ausdruck seines Beifalls durch das Geständniss zu verstärken, dass er diesen Gedanken nie gehabt haben würde.

Es bleibt mir nun noch übrig, das, was ich oben von Jacobi's äussern Lebensverhältnissen erwähnt habe, mit wenigen Worten zu vervollständigen.

Als er seine Untersuchungen über die elliptischen Funktionen bekannt zu machen anfing, war er noch Privatdocent; die Bewunderung, welche seine Entdeckungen bei allen denen erregten, denen in solchen Dingen ein Urtheil zustand, hatte die Folge, dass er sogleich zum ausserordentlichen und bald darauf zum ordentlichen Professor befördert wurde.

Indem ich von der Aufnahme rede, welche Abel's und Jacobi's Entdeckungen — denn beider Namen sind hier unzertrennlich — bei allen Fachgenossen fanden, kann ich nicht umhin, des Mannes namentlich zu erwähnen, der durch seine vieljährigen Forschungen ganz besonders berufen war, den unerwarteten Fortschritt nach seiner ganzen Bedeutung zu würdigen. Legendre, der seine Zeitgenossen so oft der Theilnahmlosigkeit angeklagt und noch kurz vor jener Zeit das Bedauern ausgesprochen hatte, dass seine Lieblingswissenschaft, von allen andern verlassen,

durch ihn allein erst nach 40jähriger Arbeit, wie er glaubte, zum Abschluss gekommen sei, begrüsste Abel's und Jacobi's Entdeckungen, welche die Theorie weit über die Grenzen hinausführten, die ihm selbst durch die Natur des Gegenstandes gesetzt schienen, mit so warmer, ja enthusiastischer Anerkennung, dass es schwer zu sagen ist, wen eine solche Anerkennung mehr ehrte, die jungen Mathematiker, welchen sie am Eingange ihrer Laufbahn zu Theil ward oder den edlen Altmeister, der fast am Ziele angelangt sich solcher Gefühlswärme fähig zeigte.

Eine nicht minder ehrenvolle Auszeichnung war es, als bald darauf die Pariser Akademie, obgleich sie keine Preisbewerbung über die Theorie der elliptischen Funktionen eröffnet hatte, Abel's und Jacobi's Arbeiten als der wichtigsten Entdeckung der Zeit einen ihrer grossen mathematischen Preise zuerkannte und zwischen Jacobi und Abel's Erben theilte.

Ich muss mich darauf beschränken, hier die Beweise der Anerkennung zu erwähnen, welche Jacobi's Eintritt in die wissenschaftliche Laufbahn bezeichneten, die mir gesteckten Grenzen gestatten mir nicht, alle die Auszeichnungen anzuführen, die ihm auch später in so reichem Maasse zu Theil wurden, und deren Erwähnung in einer ausführlichen Biographie nicht fehlen dürfte.

Bald nachdem Jacobi im Jahre 1829 seine „*Fundamenta nova theoriae funct. ellipt.*“, die nur einen Theil seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand enthalten, veröffentlicht hatte, machte er die erste grössere Reise in's Ausland, schlug den Weg über Göttingen ein, um Gauss persönlich kennen zu lernen, und wandte sich dann nach Paris, wo er mehrere Monate sich aufhielt und wo damals ausser Legendre, mit dem er seit längerer Zeit in naher brieflicher Verbindung stand und für den er immer eine grosse Pietät bewahrt hat, noch Fourier, Poisson und andere hervorragende Mathematiker, die Jacobi überlebt haben, vereinigt waren.

Eine zweite Reise in's Ausland unternahm Jacobi, der seit 1831 mit einer Frau von hervorragender Geistesbildung verheirathet war, erst wieder im Jahre 1842 in Gesellschaft seiner Frau. Die Veranlassung zu dieser Reise war für ihn zu ehrenvoll, als dass ich sie unerwähnt lassen könnte. Dem erleuchteten Staatsmanne, welcher damals an der Spitze der Verwaltung in der Provinz Preussen stand, schien es im Interesse der Wissenschaft wünschenswerth, dass Bessel und Jacobi einmal der schon oft an sie ergangenen Aufforderung zur Theilnahme an der jährlich in England Statt findenden Gelehrtenversammlung Folge leisteten,

und er stellte daher bei dem Könige den Antrag auf Bewilligung der Kosten zu einer solchen Reise, welchem Antrage Se. Majestät mit Königlicher Municifenz zu willfahren geruhte.

Bald nach seiner Rückkehr von dieser Reise zeigten sich bei Jacobi die Symptome einer leider unheilbaren Krankheit. Er schwebte längere Zeit in der grössten Gefahr, und als diese endlich für den Augenblick beseitigt war, erklärten seine Aerzte zu seiner Kräftigung einen längeren Aufenthalt in einem südlichen Klima für nothwendig. Diese ärztliche Erklärung setzte Jacobi in nicht geringe Verlegenheit, aber diese Verlegenheit war nicht von langer Dauer, denn die Lage der Sache war nicht sobald durch unseren Collegen Alex. von Humboldt, dessen gewichtige Vermittelung nirgend fehlt, wo es die Ehre der Wissenschaft und das Wohl ihrer Vertreter gilt, zur Kenntniss Sr. Majestät des Königs gelangt, als durch einen neuen Akt Königlicher Grossmuth eine ansehnliche Summe zu einer Reise nach Italien angewiesen wurde.

Das milde Klima von Rom, wo Jacobi den Winter zubrachte, wirkte so wohlthätig auf ihn, dass die, welche ihn dort sahen, weit entfernt, in ihm einen Reconvalescenten zu erkennen, über seine wahrhaft ausserordentliche Thätigkeit erstaunen mussten. Er schrieb nicht nur während der fünf Monate seines dortigen Aufenthaltes ausser mehreren kleinern Aufsätzen, welche in einer wissenschaftlichen Zeitschrift in Rom selbst erschienen, eine wichtige, sehr umfangreiche, für das Crelle'sche Journal bestimmte Abhandlung, sondern unternahm auch die Vergleichung der im Vatikan aufbewahrten Handschriften des Diophantus, mit welchem er sich seit längerer Zeit angelegentlich beschäftigt hatte.

In sein Vaterland zurückgekehrt, wurde er von Königsberg nach Berlin versetzt, wo das wenigstens relativ mildere Klima seine Gesundheit weniger zu bedrohen schien. Ohne hier der Universität anzugehören, hatte er nur die Verpflichtung, Vorlesungen zu halten, so weit es mit der Schonung, deren sein Gesundheitszustand so sehr bedurfte, verträglich sein würde. Seine schriftstellerische Thätigkeit während seines hiesigen Aufenthaltes stand gegen die der besten Königsberger Zeit kaum zurück, wie es die hier in etwa 6 Jahren geschriebenen Abhandlungen bezeugen, welche zwei starke Quartbände füllen.

Zu Anfang des Jahres 1851 hatte er einen Anfall der Gripppe zu bestehen; da er sich jedoch schnell erholte und wieder mit grossem Eifer zu arbeiten anfing, so durften seine Freunde sich

der Hoffnung überlassen, dass er ihnen und der Wissenschaft noch lange erhalten bleiben würde, als er plötzlich am 11. Februar von Neuem erkrankte. Sein Zustand erregte sogleich die grössten Besorgnisse, und als man nach einigen Tagen erkannte, dass er von den Blattern ergriffen sei, die auf dem durch das alte Uebel unterwühlten Boden den bösartigsten Charakter zeigten, schwand jede Hoffnung. Den 18. Februar, Abends 11 Uhr, acht Tage nach seiner Erkrankung, erlag er ohne Kampf.

Jacobi's wissenschaftliche Laufbahn umfasst gerade ein Vierteljahrhundert, also einen weit kürzern Zeitraum, als die der meisten frühern Mathematiker ersten Ranges, und kaum die Hälfte der Zeit, über welche sich Euler's Wirksamkeit erstreckt hat, mit dem er wie durch Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit, so auch darin die grösste Aehnlichkeit hat, dass ihm alle Hülfsmittel der Wissenschaft immer gegenwärtig waren und jeden Augenblick zu Gebote standen.

Der Tod, welcher ihn so früh und so plötzlich im Besitze seiner vollen Kraft von der Arbeit hinweggenommen, hat der Wissenschaft die grossen Bereicherungen nicht gegönnt, die sie von Jacobi's nie ermüdender Thätigkeit noch erwarten durfte. Indem ich dies ausspreche, thue ich es nicht nur in der Voraussetzung, dass in einem solchen Geiste die schöpferische Kraft nur mit der physischen zugleich erlöschen konnte; ich habe auch eine Reihe von fast vollendeten Arbeiten vor Augen, an die er selbst in kurzer Zeit — vielleicht während des Drucks, wie er es in der letzten Zeit so gern that — die letzte Hand hätte legen können und die jetzt durch seine Freunde als Bruchstücke, in unvollkommener Form an's Licht treten müssen. Noch während seiner Krankheit, kaum vier Tage vor seinem Tode, beklagte er das Missgeschick, welches über vielen seiner grössern Arbeiten gewaltet habe, die Krankheit oder häusliches Unglück unterbrochen habe. Wenn ich dann, setzte er wehmüthig hinzu, später an die Arbeit zurückkehrte, habe ich lieber etwas Neues anfangen, als Untersuchungen wieder aufnehmen wollen, die so traurige Erinnerungen in mir erweckten. Aber ich sehe ein, dass ich nicht länger zögern darf, jene ältern Arbeiten, denen ich einen so grossen Theil meiner besten Kraft gewidmet habe, der Oeffentlichkeit zu übergeben, wenn sie noch erfolgreich in den Gang der Wissenschaft eingreifen sollen. Glücklicher Weise bedarf es dazu nur sehr kurzer Zeit, die mir ja hoffentlich nicht fehlen wird.

XIV.

Ueber die Theorie des Grössten und Kleinsten.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Man bestimme die höchsten oder tiefsten Punkte der Fläche, deren Gleichung

$$(1) \qquad z=\varphi(x,y)$$

ist. Um diese zu finden, hat man bekanntlich aus den beiden Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{dz}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dy}=0$$

die reellen Wurzeln x und y zu suchen, die gefundenen Werthe in

$$\varphi(x+h,\ y+k)-\varphi(x,y)$$

zu substituiren und nachzusehen, ob der so erhaltene Ausdruck für alle sehr kleinen und reellen Werthe von h und k stets dasselbe Zeichen beibehält oder nicht. Im ersten Falle hat man, je nachdem das Zeichen positiv oder negativ ist, ein Minimum oder Maximum, im zweiten Falle weder ein Minimum noch ein Maximum.

Es kann nun sein, dass $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ einen gemeinschaftlichen, x und y enthaltenden Factor besitzen; wäre etwa

$$\frac{dz}{dx}=\psi(x,y).P, \quad \frac{dz}{dy}=\psi(x,y).Q;$$

so werden offenbar beide Gleichungen (2) befriedigt für

$$\psi(x, y) = 0,$$

also für unendlich viele Werthe von x und y; ich behaupte, in diesem Falle erhält man im Allgemeinen statt höchste und tiefste Punkte höchste und tiefste Linien, deren Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind. Ich nenne nämlich höchste oder tiefste Linien auf krummen Flächen solche Linien, deren sämmtliche Punkte dieselbe Höhe haben, deren nächste, aber ausser ihnen auf der Fläche liegenden Punkte entweder alle tiefer oder alle höher liegen.

Dass sämmtliche Punkte der Curve (3) dieselbe Höhe haben, ist leicht einzusehen, denn $\psi(x, y) = 0$ bringt ja identisch $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ auf Null, diess hat zur unmittelbaren Folge, dass sämmtliche an diese Curve gezogenen Tangenten horizontal laufen, also ist diese Curve selbst eine horizontale; ihre Gleichungen müssen sich somit auf die Form:

$$(4) \quad \begin{cases} z = h, \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

bringen lassen, unter h eine constante Zahl verstanden. — Man wird, um diese Formänderung ihrer Gleichungen zu bewirken, $\varphi(x, y)$ durch $\psi(x, y)$ dividiren, ist der Quotient $f(x, y)$ und der Rest h, so hat man:

$$z = \varphi(x, y) = \psi(x, y) . f(x, y) + h,$$

was sich für $\psi(x, y) = 0$ auf $z = h$ zurückzieht.

Um zu untersuchen, in welchem Falle die Curve, deren Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$$

sind, und die man sich in der Form

$$(4) \quad \begin{cases} z = h, \\ y = f(x) \end{cases}$$

aufgestellt denken kann, wirklich eine höchste oder tiefste Linie

der Fläche $z=\varphi(x, y)$ ist, gehe man von ihr (der Linie (4)) zu anderen, auf derselben Fläche in unmittelbarer Nähe liegenden über, etwa dadurch, dass man y um δy wachsen lässt, unter δy eine beliebige Function von x verstanden, die stets sehr kleinen numerischen Werth hat.

Man erhält sonach als Gleichungen von, in der Nähe der Curve (3) auf der Fläche $z=\varphi(x, y)$ liegenden Curven folgende:

$$(5) \quad \begin{cases} z=\varphi(x, y), \\ y=f(x)+\delta y. \end{cases}$$

Die Substitution $y=f(x)+\delta y$ in $z=\varphi(x, y)$ und darauf folgende Entwickelung nach Taylor's Reihe gibt:

$$z=h+\delta y \cdot \frac{dz}{dy}+\frac{\delta y^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\dots.$$

oder, da $\frac{dz}{dy}$ wegen des innehabenden Factors $\psi(x, y)$ gleich Null wird,

$$z=h+\frac{\delta y^2}{1.2}\frac{d^2z}{dy^2}+\dots.$$

Behält $\frac{d^2z}{dy^2}$ für alle Punkte der horizontalen Projection der Curve, d. h. für alle Werthe von x und y, welche der Gleichung $\psi(x, y)=0$ genügen, einerlei Zeichen, so ist offenbar die Linie (3) eine höchste oder tiefste; sollte $\frac{d^2z}{dy^2}$ hiefür Null werden, so müsste man, gleich den ähnlichen Theorieen des Maximums und Minimums, das nächste Glied der Reihe zu Rathe ziehen; ist dieses positiv oder negativ, so hat man weder eine höchste noch eine tiefste Linie; ist es aber auch Null, so entscheidet das Zeichen des vierten Differentialquotienten u. s. f.

Um daher die höchsten und tiefsten Linien einer Fläche

$$z=\varphi(x, y)$$

zu finden, bilde man sich die Ausdrücke

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx}, \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy},$$

und sehe, ob sie einen gemeinschaftlichen, variablen Factor besitzen. Sei einer vorhanden und heisse dieser

$$\psi(x, y),$$

so untersuche man, ob $\frac{d^2\varphi(x,y)}{dy^2}$ für alle Werthe, die der Gleichung $\psi(x,y)=0$ genügen, positiv oder negativ sei; im ersten Falle ist die Curve, deren Gleichungen

$$z=\varphi(x,y),\quad \psi(x,y)=0$$

sind, eine tiefste, im zweiten eine höchste; ist aber $\frac{d^2\varphi(x,y)}{dy^2}$ für $\psi(x,y)=0$ gleich Null, so bleibe man bei dem ersten, hiefür nicht verschwindenden Gliede der Reihe

$$\frac{d^3\varphi(x,y)}{dy^3},\ \frac{d^4\varphi(x,y)}{dy^4},\ \frac{d^5\varphi(x,y)}{dy^5},\ldots.$$

stehen; ist nun $\frac{d^n\varphi(x,y)}{dy^n}$ dieses erste, so hat man eine höchste oder tiefste Linie, wenn n gerade ist, und wenn es dasselbe Zeichen beibehält für alle, der Gleichung $\psi(x,y)=0$ genügenden Werthe; und weder eine höchste, noch eine tiefste, wenn auch nur eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt wird.

Sollte der $n$te Differentialquotient stets dasselbe Zeichen beibehalten, mit Ausnahme einiger specieller Werthe, wofür er Null wird, so muss man für diese speciellen Werthe die Untersuchung auf dieselbe Weise fortsetzen; man bilde nämlich die nächsten Differentialquotienten

$$\frac{d^{n+1}\varphi(x,y)}{dy^{n+1}},\ \frac{d^{n+2}\varphi(x,y)}{dy^{n+2}},\ \frac{d^{n+3}\varphi(x,y)}{dy^{n+3}},\ldots,$$

substituire in denselben die speciellen Werthe, welche $\frac{d^n\varphi(x,y)}{dy^n}=0$ machen, und bleibe bei dem ersten, für diesen speciellen Werth nicht verschwindenden Differentialquotienten stehen; ist dieser von gerader Ordnungszahl und ist das Zeichen desselben mit dem Zeichen des $n$ten Differentialquotienten übereinstimmend, so hat man auch in diesem Falle eine höchste oder tiefste Linie.

Sei z. B. $z=(x^2-y^2+1)^2-10(x^2-y^2+1)+9$, so ist

$$\frac{dz}{dx}=4x(x^2-y^2-4),\quad \frac{dz}{dy}=-4y(x^2-y^2-4).$$

Diese beiden Ausdrücke haben den gemeinschaftlichen Factor x^2-y^2-4; ferner ist $\frac{d^2z}{dy^2}=-4x^2+12y^2+16$, und setzt man in diesem $x^2=y^2+4$, so ist $\frac{d^2z}{dy^2}=8y^2$; da dieses stets positiv ist (mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn $y=0$, $x=\pm 2$ ist), so ist die Curve, deren Gleichungen

$$z=(x^2-y^2+1)^2-10(x^2-y^2+1)+9, \quad x^2-y^2=4;$$

oder reducirt

$$z=-16, \quad x^2-y^2=4$$

sind, eine tiefste auf der Fläche $z=(x^2-y^2+1)^2-10(x^2-y^2+1)+9$ liegende Curve, falls nur noch die Substitution von $y=0$, $x=\pm 2$ den dritten Differentialquotienten zu Null, den vierten aber positiv macht; oder, falls der vierte Differentialquotient auch 0 würde, den fünften zu Null, den sechsten positiv u. s. f. Nun ist:

$$\frac{d^3z}{dy^3}=24y, \quad \frac{d^4z}{dy^4}=24;$$

also ist bestimmt die Curve eine tiefste, weil der dritte Differentialquotient gleich Null, der vierte gleich 24 ist.

Diese Theorie ist einer Verallgemeinerung fähig. Wäre nämlich

$$x=f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

so sind jene Werthe von x_1, x_2, ... x_n, welche x zu einem Maximum oder Minimum machen, aus den Gleichungen:

$$\frac{dx}{dx_1}=0, \quad \frac{dx}{dx_2}=0, \ldots, \frac{dx}{dx_n}=0$$

zu bestimmen. Wird diesen n Gleichungen genügt durch r Gleichungen, wo $r<n$ ist, so tritt ein ähnlicher Fall ein, wie der in diesem Aufsatze discutirte.

XV.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$F\left(\frac{dx}{dx_1}, \frac{dx}{dx_2}, \ldots \frac{dx}{dx_n}\right)=0.$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Assist. und Privatdoc. der Mathematik am k. k. polytechn. Institute zu Wien.

Setzen wir der Kürze halber, so wie es üblich ist:

$$\frac{dx}{dx_1}=p_1, \quad \frac{dx}{dx_2}=p_2, \ldots \frac{dx}{dx_n}=p_n;$$

so finden zwischen den partiellen Differentialquotienten folge zwei Gleichungen statt:

$$F(p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \quad dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n.$$

Sucht man aus der ersten dieser Gleichungen den Werth p_n, so hat man:

$$p_n = \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1}),$$

und wenn man diesen Werth in die andere Gleichung einführt

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_{n-1} dx_{n-1} + \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1}) dx_n$$

welche, nach der Methode des theilweisen Integrirens behand sich so stellt:

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{n-1} x_{n-1} + x_n \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$$
$$- \int \{ x_1 dp_1 + x_2 dp_2 + \ldots + x_{n-1} dp_{n-1} + x_n d\varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1}) \}$$

Setzt man statt $d\varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$ seinen Werth

$$\frac{d\varphi}{dp_1} dp_1 + \frac{d\varphi}{dp_2} dp_2 + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_{n-1}} dp_{n-1},$$

so erhält man:

$$x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{n-1} x_{n-1} + x_n \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$$
$$- \int \{ (x_1 + x_n \frac{d\varphi}{dp_1}) dp_1 + (x_2 + x_n \frac{d\varphi}{dp_2}) dp_2 + \ldots + (x_{n-1} + x_n \frac{d\varphi}{dp_{n-1}}) dp_{n-1}$$

und nimmt man nun an, dass die Grösse unter dem Integralzeich das vollständige Differential der Function

$$\psi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$$

sei, so ist:

$$(1) \quad x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_{n-1} x_{n-1} + x_n \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})$$
$$- \psi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1}),$$

während zugleich folgende Gleichungen stattfinden:

$$\frac{d\psi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_1} = x_1 + x_n \frac{d\varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_1},$$

$$(2) \quad \frac{d\psi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_2} = x_2 + x_n \frac{d\varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d\psi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_{n-1}} = x_{n-1} + x_n \frac{d\varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1})}{dp_{n-1}}.$$

Ich behaupte nun, das Resultat der Elimination von $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ aus den Gleichungen (1) und (2), hiebei ψ als willkührliche Function betrachtet, ist das Integral der vorgelegten Differentialgleichung. Denn denkt man sich aus den $n-1$ Gleichungen (2) $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ gesucht, dann in (1) substituirt, wodurch $p_2, \ldots p_{n-1}$ sowohl, als auch x als eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ erscheinen, so hat man, wenn man x successive nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ differenzirt, Folgendes:

$$\frac{dx}{dx_1} = p_1 + (x_1 \frac{dp_1}{dx_1} + x_2 \frac{dp_2}{dx_1} + \ldots + x_{n-1} \frac{dp_{n-1}}{dx_1})$$
$$+ x_n\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{dp_2}{dx_1} + \ldots + \frac{d\varphi}{dp_{n-1}}\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right)$$
$$- \left(\frac{d\psi}{dp_1}\frac{dp_1}{dx_1} + \frac{d\psi}{dp_2}\frac{dp_2}{dx_1} + \ldots + \frac{d\psi}{dp_{n-1}}\frac{dp_{n-1}}{dx_1}\right).$$

Setzt man hierin statt $\frac{d\psi}{dp_1}, \frac{d\psi}{dp_2}, \ldots \frac{d\psi}{dp_{n-1}}$ ihre aus (2) folgenden Werthe und reducirt gehörig, so erhält man $\frac{dx}{dx_1} = p_1$, und so findet man auch:

$$\frac{dx}{dx_2} = p_2, \quad \frac{dx}{dx_3} = p_3, \ldots \frac{dx}{dx_n} = \varphi(p_1, p_2, \ldots p_{n-1});$$

t ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

XVI.

Untersuchung über die Formel

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

Von

Herrn *H. Kinkelin*,

Kandidaten der Mathematik zu München.

---

§. 1.

ror wir zum Gegenstand der Untersuchung selbst überist es nöthig, noch einen Hülfssatz aus der Theorie der

Rekursionsgleichungen aufzustellen. Es sei z. B. eine zweigliedrige Rekursionsgleichung vorgelegt, welche für alle reellen Werthe von x gültig ist:

$$f(x+1)=\varphi(x)+\psi(x)f(x). \tag{1}$$

f, φ, ψ sind beliebige Funktionszeichen. Alsdann gibt es unendlich viele Funktionen $f(x)$, welche dieser Gleichung ein Genüge leisten. Dieser Lehrsatz lässt sich auf die folgende Art leicht allgemein beweisen für jede n-gliedrige Rekursion. Man löse nemlich die Gleichung (1) nach den bekannten Methoden, welche für ganze Werthe von x gelten, auf und nenne diese Auflösung $f'(x)$. Man lasse nun in dieser Funktion $f'(x)$ x einen variablen Werth annehmen, so wird dieselbe der Gleichung (1) noch immer ein Genüge thun. Es sei nun $f(x)$ die allgemeine Auflösung der Gleichung (1), so ist

$$f(x)=\mu(x)f'(x)+\nu(x). \tag{2}$$

Nun ist klar, dass $f(x)$ für ganze positive oder negative Werthe in $f'(x)$ übergehen muss. Es wird daher

$$\left.\begin{array}{l}\mu(x)=1+A'(x).(x^2-1^2)(x^2-2^2)(x^2-3^2)\ldots \text{ in inf.}\\ \nu(x)=\quad B'(x).(x^2-1^2)(x^2-2^2)(x^2-3^2)\ldots \text{ in inf.}\end{array}\right\}, \tag{3}$$

wo $A'(x)$ und $B'(x)$ noch zu bestimmende Funktionen von x sind. Oder es muss

$$\mu(x)=1+A(x).\sin\pi x,\ \nu(x)=B(x).\sin\pi x$$

sein; und sonach wird

$$f(x)=(1+A(x)\sin\pi x)\,f'(x)+B(x)\sin\pi x, \tag{4}$$

wo nun $A(x)$ und $B(x)$ zu bestimmen sind. Wird aus dieser Gleichung der Werth von $f(x)$ in die Gleichung (1) substituirt, so wird erhalten:

$$f'(x+1)=-\frac{A(x)}{A(x+1)}f'(x)\psi(x)+\frac{B(x)}{A(x+1)}\psi(x)-\frac{B(x+1)}{A(x+1)}, \tag{5}$$

welcher Gleichung offenbar durch unendlich viele Verfügungen über $A(x)$ und $B(x)$ willfahrt werden kann.

Eine der interessantesten dieser Annahmen ist folgende:

$$1=-\frac{A(x)}{A(x+1)},\quad -\frac{B(x)}{A(x+1)}\psi(x)-\frac{B(x+1)}{A(x+1)}=\varphi(x)$$

oder

$$A(x+1)=-A(x),\ B(x)\psi(x)+B(x+1)=A(x)\varphi(x). \tag{6}$$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen wird durch Auflösen in ganzen Zahlen $A(x)=(-1)^x C$ erhalten, wo C eine beliebige Konstante vorstellt. Lässt man hierin x einen beliebigen variabeln Werth annehmen, so kommt

$$A(x)=C(\cos(2k+1)\pi x+\sqrt{-1}.\sin(2k+1)\pi x). \qquad (7)$$

Es kann also $A(x)$ die zwei Werthe

$$A(x)=C\cos(2k+1)\pi x \text{ und } A(x)=C'\cos(2k+1)\pi x \qquad (8)$$

annehmen; und zur Auffindung von $B(x)$ erhält man alsdann resp. eine der folgenden zwei Rekursionen:

$$\left.\begin{array}{l} B(x+1)=C\cos(2k+1)\pi x.\varphi(x)-B(x)\psi(x), \\ B(x+1)=C'\sin(2k+1)\pi x.\varphi(x)-B(x)\psi(x). \end{array}\right\} \quad (6)$$

C und C' bedeuten zwei beliebige Konstanten, welche auch Null sein können.

Aus dem Vorhergehenden geht ferner hervor, dass es nur Eine algebraische Funktion gebe, welche eine Rekursionsgleichung auflöst. Wenn in dieser Funktion, welche oben mit $f'(x)$ bezeichnet wurde, x beliebig variabel erklärt wird, so erhält man die sogenannte einfache Auflösung der n-gliedrigen Rekursionsgleichung.

§. 2.

Nach dem bekannten Fourier'schen Lehrsatz lässt sich jede Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach cos und sin der Vielfachen von $2\pi x$ entwickeln. Setzt man der Kürze wegen $2\pi x=x'$, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=A+2\{A_1\cos x'+A_2\cos 2x'+A_3\cos 3x'+\ldots A_k\cos kx'+\ldots \text{ in inf.}\} \\ +2\{B_1\sin x'+B_2\sin 2x'+B_3\sin 3x'+\ldots+B_k\sin kx'+\ldots \text{ in inf.}\} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x>0 \\ x<1 \end{array} \quad (1)$$

wo A, A_k, B_k Konstanten sind, welche durch die Gleichungen

$$A=\int_0^1 f(x)dx, \quad A_k=\int_0^1 f(x)\cos kx'dx, \quad B_k=\int_0^1 f(x)\sin kx'dx \qquad (2)$$

bestimmt werden. Die Gleichung (1) gilt im Allgemeinen für alle jene Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen 0 und 1 fallen.

Es sei nun n eine beliebige ganze Zahl, so setze man in Gleichung (1) für x nach und nach die Werthe

$$x,\ x+\frac{1}{n},\ x+\frac{2}{n},\ \ldots x+\frac{n-1}{n};$$

so erhält man, wenn man die daraus entstehenden n Gleichungen addirt:

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=nA+2n\sum_{k=1}^{k=\infty}A_{kn}\cos knx'+2n\sum_{k=1}^{k=\infty}B_{kn}\sin knx'. \quad \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{n} \end{cases}$$

Setzt man

$$A+2\sum_{k=1}^{k=\infty}A_{kn}\cos kx'+2\sum_{k=1}^{k=\infty}B_{kn}\sin kx'=F(x), \tag{3}$$

so hat man endlich folgende Gleichung:

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=nF(nx). \quad (4) \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{n} \end{cases}$$

Die Form von $F(x)$ wird von der Form von $f(x)$ abhangen und umgekehrt. Durch die Gleichung (3) ist $F(x)$ unmittelbar mittelst der Coefficienten der Entwickelung von $f(x)$ gegeben; auf gleiche Weise ist, wenn $F(x)$ gegeben ist, $f(x)$ durch die Coefficienten der Entwickelung von $F(x)$ gegeben, indem man in A_{kn} nur $n=1$ zu setzen braucht. In den meisten Fällen handelt es sich aber darum, $f(x)$ und $F(x)$ als endliche Funktionen zu behandeln, wie man es z. B. für die Euler'sche Funktion $\Gamma(x)$ und die Jacob Bernoulli'sche Funktion $B(x)$ gethan hat. Es ist nicht der Plan vorliegenden Aufsatzes, die Art und Weise, wie eine dieser beiden Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ aus der gegebenen andern erhalten werden kann, näher zu erörtern. Wir werden uns damit befassen, diejenigen Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ zu finden, für den Fall, dass die Relation

$$F(nx)=\varphi(n)+\psi(n)f(nx)+\psi'(n)\Phi(nx) \tag{5}$$

unter ihnen statthabe, wo $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\psi'(n)$ bestimmte Funktionen von n sein werden, welche selbst wieder von $f(nx)$ abhängen. $\Phi(nx)$ stellt eine gegebene ganze rationale Funktion von nx vor. Alle diese Gleichungen müssen simultan bestehen, und es ist unsere Aufgabe, aus dieser Simultaneität $f(x)$, $\varphi(n)$, $\psi'(n)$ zu bestimmen.

§. 3.

Es sei als erster Fall $\Phi(nx)=0$, so geht die Gleichung (5) §. 2. über in

$$F(nx)=\varphi(n)+\psi(n)f(nx). \tag{1}$$

Alsdann wird also

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = f(nx) . n\psi(n) + n\varphi(n). \quad (1')$$

Und es muss, wenn man die Gleichung (1) in Reihen entwickelt,

$$A + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \{A_{kn} \cos knx' + B_{kn} \sin knx'\}$$
$$= \psi(n) A + \varphi(n) + 2\psi(n) \sum_{k=1}^{k=\infty} \{A_k \cos knx' + B_k \sin knx'\} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

sein. Damit diese Gleichung bestehe, muss

$$\varphi(n) + \psi(n) A = A, \qquad (2)$$
$$\psi(n) A_k = A_{kn}, \qquad (3)$$
$$\psi(n) B_k = B_{kn} \qquad (4)$$

sein. Die Funktion $f(x)$ hat diesen drei Bedingungen zu genügen, damit die Entwickelung (1′) möglich sei. Zur Untersuchung der Gleichungen (2), (3), (4) schlagen wir folgenden Weg ein. Setzt man in Gleichung (3) successive die Werthe $k, kn, kn^2, \ldots kn^{m-1}$ anstatt k, und multiplicirt alsdann diese entstehenden Gleichungen mit einander, so folgt $\psi(n)^m A_k = A_{kn^m}$. Setzt man aber weiter in (3) n^m für n, so ist auch $\psi(n^m) A_k = A_{kn^m}$, und folglich $\psi(n)^m = \psi(n^m)$, woraus nun

$$\psi(n) = n^{m'} \qquad (5)$$

geschlossen wird; m' stellt eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl vor. Da aber in der folgenden Entwickelung der Fall, wo m' imaginär ist, leicht aus dem ersten abzuleiten ist, so brauchen wir m' nur als reelle Zahl anzusehen. Es wird also auch

$$A_{kn} = n^{m'} A_k, \quad B_{kn} = n^{m'} B_k;$$

woraus, wenn $k = 1$ gesetzt und hernach n in k umgewandelt wird, $A_k = k^{m'} A_1$, $B_k = k^{m'} B_1$, wo $A_1 = \int_0^1 f(x) \cos x' dx$, $B_1 = \int_0^1 f(x) \sin x' dx$ ist. Obige Bestimmung von $\psi(n)$ scheint nun nur Bestand zu haben, wenn die Reihe in (1) §. 2. konvergent ist, d. h. für $m' \leqq 0$. Bedenkt man aber, dass, wenn diese Bestimmung von $\psi(n)$ in die Gleichung (1′) eingeführt ist und ihr zufolge auch $f(x)$ berechnet, alsdann die Gleichung (1′) noch Bestand haben wird, so sieht man, dass diese Gleichung (5) für alle reellen Werthe von m' gültig ist und gebraucht werden darf. Man setze $m' = -\mu$, so kommt

$$A_k = \frac{1}{k^\mu} A_1, \quad B_k = \frac{1}{k^\mu} B_1 \qquad (6)$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^{s-1}}; \quad \psi(n) = A\frac{n^s - 1}{n^s} \qquad (7)$$

Die Function $f(x)$ ist also

$$f(x) = A + 2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^{s}} + 2B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n^{s}} \qquad (8) \quad x > 0,\ x < 1$$

und für alle Functionen von dieser Form existirt die Gleichung

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + f\left(x + \frac{2}{n}\right) + \dots f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{s-1}} f(nx) + A\frac{n^s - 1}{n^s}. \qquad (9)$$

§. 3.

Durch den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdruck für $f(x)$ ist zwar diese gesuchte Function hergestellt, aber nur mittelst unendlicher Ausdrücke. Es ist daher noch unser Bestreben, einen endlichen Ausdruck für dieselbe zu finden, was der Gegenstand des gegenwärtigen Paragraphen sein soll. Für den Fall, dass die Gleichung (9) nur für jene Werthe von x gilt, welche > 0, $< \frac{1}{n}$ sind, dürfte sich dieses Problem nur äusserst schwer lösen. In dem speciellen Fall aber, wo die Gleichung §. 2. nicht nur in jenem Umfange der Werthe von x, sondern allgemein für jeden reellen Werth von x gilt, führt folgender Weg zum Ziel. — Die Gleichung (9) §. 2. ist folgende:

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \dots f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n^{s-1}} f(nx) + \psi(n) \qquad (1)$$

wo

$$\psi(n) = A\frac{n^s - 1}{n^s}$$

Setzt man hierin $x + \frac{1}{n}$ für x, so wird auch

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) + \dots f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) + f(x+1) = \frac{1}{n^{s-1}} f(nx+1) + \psi(n). \qquad (1')$$

Werden diese beiden Gleichungen von einander abgezogen, so kommt

$$f(x+1) - f(x) = \frac{f(nx+1) - f(nx)}{n^{s-1}}.$$

Links vom Gleichheitszeichen kommt hier kein n vor; da diese *Gleichung identisch ist*, so darf aber auch rechts kein n vorkommen. *Damit dies möglich sei*, muss

$$f(nx+1) - f(nx) = (nx)^{s-1} C$$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

oder, wenn $n=1$ gesetzt wird,

$$f(x+1)=f(x)+Cx^{\mu-1} \quad (2)$$

sein, wo C eine beliebige konstante Grösse vorstellt. Diese Gleichung ist es, welche die Form der Funktion $f(x)$ angibt. Zur Diskussion derselben übergehend, so ist vorerst klar, dass die einfache Auflösung derselben der Gleichung (2) sowohl als der Gleichung (1) genügen werde. Denn wenn man aus (2) die einfache Auflösung berechnet, für ganze Werthe von x, so ist dies eine Funktionsform, welche der Gleichung (1) genügt. Lässt man x beliebig variabel werden, so wird die Form der Funktion die nemliche bleiben und sonach der Gleichung (1) immer noch genügen.

1. Es sei $\mu>0$ und >1, so ist die Rekursion

$$f(x+1)-f(x)=x^{\mu-1}C,$$

wo

$$\left.\begin{array}{l} C=f(2)-f(1) \\ 0\;=f(1)-f(0) \end{array}\right\} \quad (3)$$

ist, aufzulösen.

Die einfache Auflösung ist

$$f(x)=C\{1^{\mu-1}+2^{\mu-1}+3^{\mu-1}+\ldots(x-1)^{\mu-1}\}+f(1).$$

Für $C=f(2)-f(1)=1$ und $f(1)=f(0)=0$ wird

$$f(x)=1^{\mu-1}+2^{\mu-1}+3^{\mu-1}+\ldots+(x-1)^{\mu-1},$$

welches, wenn μ eine ganze Zahl ist, die von Herrn Prof. Raabe diskutirte Bernoulli'sche Funktion ist.

2. Es sei ferner $\mu=1$, so wird $f(x+1)=C+f(x)$, woraus

$$f(x)=Cx+f(1) \quad (6)$$

gefunden wird. Eine zweite ebenfalls einfache Auflösung findet man so: Man setze $f(x)=\log F(x)$, so kommt $F(x+1)=C'F(x)$. Da die Konstante C' beliebig ist, so darf man sie gleich -1 annehmen, ohne der Allgemeinheit weiter zu schaden. Alsdann ist $F(x+1)=-F(x)$, woraus schon in §. 1. $F(x)=c'\cos\pi x$ und $F(x)=c\sin\pi x$ gefunden wurde. Da nun $c'\cos\pi x$ in $c\sin\pi x$ übergeht, wenn man darin $x+\frac{1}{2}$ für x setzt, so braucht man als zweite einfache Auflösung bloss

$$f(x)=\log c\sin\pi x \quad (7)$$

anzunehmen.

Anmerkung. Im folgenden Fall werden wir sehen, dass,

wenn $C=0$ oder $C=+1$ angenommen wird, alsdann $\mu=0$ sein muss, was nicht in diesen Fall hineingehört. Hätte man ferner $C \gtrless \pm 1$ angenommen, so würde man $F(x)=C^x F(0)$ finden, was aber auf keine anderen Resultate geführt hätte.

3. Es sei endlich $C=0$, so wird $f(x+1)=f(x)$. Hieraus ist als erste einfache Auflösung

$$f(x)=c. \tag{8}$$

Die zweite einfache Auflösung ist

$$f(x)=1^x=\cos 2k\pi x+i\sin 2k\pi x.$$

Da aber für $f(x)=\cos 2\pi x$ und $f(x)=\sin 2\pi x$ A_k und B_k verschwinden, so sind die Reihen unbrauchbar und es wird bloss in Bezug auf die Gleichung (1)

$$f(x)=c\sin 2k\pi x,\quad f(x)=c'\cos 2k\pi x. \tag{9}$$

Die Gleichung $f(x+1)=f(x)$ hat noch eine einfache Auflösung. Setzt man nemlich $f(x)=\frac{F(x)}{F'(x)}$, so muss $\frac{F(x+1)}{F'(x+1)}=\frac{F(x)}{F'(x)}$ sein, wo nun $F(x)$ und $F'(x)$ so bestimmt werden können, dass

$$F(x+1)=-F(x),\quad F'(x+1)=-F'(x).$$

Auf diese Weise erhält man

$$f(x)=c\operatorname{cotg}\pi x,\quad f(x)=c'\operatorname{tang}\pi x. \tag{10}$$

Setzt man endlich noch $f(x)=\frac{1}{F(x)}$, so wird auch $F(x+1)=F(x)$, also auch

$$f(x)=c\sec 2k\pi x,\quad f(x)=c'\operatorname{cosec} 2k\pi x. \tag{11}$$

Auch für diese letztere Bestimmung werden die Reihen unbrauchbar. Durch Entwickelung der Ausdrücke in (8) und (10) findet man in der That, dass für diesen Fall $\mu=0$ ist, womit die Untersuchung für $\mu=$ positiv geschlossen ist.

§. 5.

Nennt man $B''(x)$ die Summe $\sum_{k=1}^{k=x-1} k^{2m}$ und $B'(x)$ die Summe $\sum_{k=1}^{k=x-1} k^{2m+1}$, wo m eine ganze positive Zahl ist, so wird

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\dots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}B''(x)&=\frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\tfrac{1}{2}x^{2m}+\sum_{k=1}^{k=m}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{2m}{2k-1}B_k x^{2m-2k+1}\\ B'(x)&=\frac{x^{2m+2}}{2m+2}-\tfrac{1}{2}x^{2m+1}+\sum_{k=1}^{k=m}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}\binom{2m+1}{2k-1}B_k x^{2m-2k+1}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

wo B_k die $k$te Bernoulli'sche Zahl, positiv gonommen, vorstellt; und man findet wirklich

$$\left.\begin{aligned}B''(x)&=\frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}}1.2.3\dots(2m)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}}\left\{\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}\right.\\ B'(x)&=\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}B_{m+1}\\ &\quad+\frac{2(-1)^m}{(2\pi)^{2m+2}}1.2.3\dots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}}\left\{\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}\right.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

woraus also

$$\left.\begin{aligned}&B''(x)+B''\left(x+\frac{1}{n}\right)+\dots B''\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n^{2m}}B''(nx);\\ &B'(x)+B'\left(x+\frac{1}{n}\right)+\dots B'\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\\ &\qquad=\frac{B'(nx)}{n^{2m+1}}+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\,\frac{n^{2m+2}-1}{n^{2m+1}}B_{m+1}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned}\log 2\sin\pi x&=-\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k}\left\{\begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}\right.,\\ x&=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k}\left\{\begin{matrix}x>0\\x<1\end{matrix}\right.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

also

$$\left.\begin{aligned}&\sin\pi x.\sin\pi\left(x+\frac{1}{n}\right).\sin\pi\left(x+\frac{2}{n}\right)\dots\sin\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\\ &\qquad=2^{1-n}\sin n\pi x\\ &\text{und}\\ &x+\left(x+\frac{1}{n}\right)+\left(x+\frac{2}{n}\right)+\dots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=nx+\frac{n-1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

und endlich

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} &= \sum_{k=1}^{k=x} \cos 2k\pi x \left\{\begin{matrix} x>0 \\ x<1 \end{matrix}\right. \\ \operatorname{cotg} \pi x &= 2\sum_{k=1}^{k=x} \sin 2k\pi x \left\{\begin{matrix} x>0 \\ x<1 \end{matrix}\right. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

woraus

$$\operatorname{cotg}\pi x + \operatorname{cotg}\pi\left(x+\frac{1}{n}\right) + \operatorname{cotg}\pi\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots \operatorname{cotg}\pi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= n \operatorname{cotg} n\pi x. \quad (7)$$

Man sehe hierüber: Raabe, die Jacob Bernoulli'sche Funktion; Crelle's Journal Bd. XLII.; Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Cap. 14.

§. 6.

Wir gehen nun zu jenen Funktionen über, wo μ negativ ist oder $\mu = -m$; in diesem Fall werden die Reihen divergent, also unbrauchbar, und es wird

$$f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots = n^{m+1}f(nx)+An(1-n^m). \quad (1)$$

Soll diese Gleichung für alle reellen Werthe von x bestehen, so muss

$$f(x+1) = \frac{C}{x^{m+1}} + f(x) \quad (2)$$

sein, wo die Fälle $m=0$ und $m=-1$ ausgeschlossen sind. Hieraus kommt

$$f(x) = \frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots \frac{1}{(x-1)^{m+1}} \quad (3)$$

für ganze positive Werthe von x. Für die Annahme, dass m eine ganze Zahl ist, wird für variable Werthe von x

$$f(x) = S_{m+1} + \frac{(-1)^m}{1.2.3\ldots m}\,\frac{d^{m+1}\log\Gamma(x)}{dx^{m+1}}. \quad (3')$$

Man sehe: Legendre, Traité des fonctions elliptiques. Band II. Nr. 90 ff., wo S_{m+1} die Summe $\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{m+1}}$ bedeutet.

Anmerkung. $A=\int_0^1 f(x)dx$ wird hier scheinbar unendlich.

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\dots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

Verfährt man aber wie Legendre a. a. O., so findet man

$$A=0. \tag{4}$$

§. 7.

Betrachtet man die Gleichung (2) §. 4., so sieht man, dass auch die successiven Differenzialien und Integrale von $f(x)$ derselben genügen werden, wenn gewisse Bedingungen stattfinden. Differenzirt man daher alle dort in den Formeln (3), (7), (8), (9), (10), (11) gefundenen Funktionen, so sieht man, dass sich alle auf diese Weise erhaltenen neuen Funktionen auf

$$f(x)=\frac{d^m \operatorname{cotg} \pi x}{dx^m} \tag{1}$$

reduziren. Ebenso reduziren sich alle durch Integration zu erhaltenden neuen Funktionen auf

$$f(x)=\int^{(n)} \log 2\sin \pi x dx^n.$$

Es ist aber aus §. 5. Gleichung (4)

$$\int^{(2n)} \log 2\sin \pi x dx^{2n}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}},$$

$$\int^{(2n+1)} \log 2\sin \pi x\, dx^{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n+1}}.$$

Oder nach der bekannten Reduktionsformel der mehrfachen Integrale, wenn man um abzukürzen $1.2.3\dots r=r!$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(2n-1)!}\int_0^x (x-t)^{2n-1}\log(2\sin\pi t)\,dt+\overset{(2n)}{A_0}x^{2n-1}+\overset{(2n)}{A_1}x^{2n-2}\\
&+\overset{(2n)}{A_2}x^{2n-3}+\dots\overset{(2n)}{A_{2n-2}}x+\overset{(2n)}{A_{2n-1}}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}},\\
&\frac{1}{(2n)!}\int_0^x (x-t)^{2n}\log(2\sin\pi t)\,dt+\overset{(2n+1)}{A_0}x^{2n}+\overset{(2n+1)}{A_1}x^{2n-1}\\
&+\overset{(2n+1)}{A_2}x^{2n-2}+\dots\overset{(2n+1)}{A_{2n-1}}x+\overset{(2n+1)}{A_{2n}}=\frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n+1}}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n+1}}
\end{aligned}\right\}\begin{matrix}(2)\\ x=0\\ x=1\\ (3)\end{matrix}$$

wo die $\overset{(\lambda)}{A_k}$ Integrationskonstanten sind, welche nun bestimmt werden müssen. Wird die Gleichung (3) nach x differenzirt, so muss die Gleichung (2) hervorgehen, es muss also allgemein

$$(2n-k)\overset{(2n+1)}{A_k} = \overset{(2n)}{A_k}$$

sein; und hieraus erhält man, indem man successive für n Werthe n, $n-\frac{1}{2}$, $n-\frac{2}{2}$, $n-\frac{3}{2}$, ... $n-\frac{k}{2}$ annimmt, und diese e stehenden Gleichungen alle mit einander multiplicirt:

$$\overset{(2n+1)}{A_k} = \frac{\overset{(k+1)}{A_k}}{(2n-k)!}.$$

Setzt man in der Gleichung (2) $x=0$, so verschwindet d Integral und es wird

$$\overset{(2n)}{A_{2n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2\pi)^{2n}} S_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} B_n}{2.(2n)!};$$

wird dagegen in der Gleichung (3) $x=0$ angenommen, so kom

$$\overset{(2n+1)}{A_{2n}} = 0,$$

und es wird also, wenn der Kürze wegen

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{1.2.3\dots k}$$

ist:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 2\int_0^x (x-t)^{2n-1} \log(2\sin\pi t)dt + 1\binom{2n-1}{1} B_1 x^{2n-2} \\ -3\binom{2n-1}{3} B_2 x^{2n-4} + 5\binom{2n-1}{5} B_3 x^{2n-6} - \\ \dots(-1)^{n+1} B_n \binom{2n-1}{n+1}(n+1) \\ = \frac{(-1)^{n+1} 2.(2n-1)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x) = 2\int_0^x (x-t)^{2n} \log(2\sin\pi t)dt + 1.\binom{2n}{1} B_1 x^{2n-1} \\ -3\binom{2n}{3} B_2 x^{2n-3} + 5\binom{2n}{5} B_3 x^{2n-5} - \\ \dots(-1)^{n+1}(n+1)\binom{2n}{n+1} B_n x \\ = \frac{(-1)^{n+1} 2.(2n)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n}}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

Hiemit ist nun die Untersuchung über die Form der Funktion $f(x)$, welche der Gleichung (1') §. 3. ein Genüge leistet, für die Annahme, dass m' reell ist, als beendigt anzusehen.

§. 8.

Es bleibt noch übrig, diejenigen Funktionen aufzusuchen, welche aus der Annahme (s. §. 3.) $m'=a'+b'\sqrt{-1}$ hervorgehen. Man bezeichne $\sqrt{-1}$ mit i, und $-m'$ mit μ, so sei

$$\mu=a+bi,$$

wo a und b reelle Werthe haben. Alsdann wird

$$n^{\mu}=n^{a}\{\cos(b\log n)+i\sin(b\log n)\},$$

$$n^{-\mu}=n^{-a}\{\cos(b\log n)-i\sin(b\log n)\},$$

$$n^{-\mu+1}=\frac{1}{n^{\mu-1}}=\frac{\cos(b\log n)}{n^{a-1}}-i\frac{\sin(b\log n)}{n^{a-1}},$$

$$(n^{\mu}-1)n^{-\mu+1}=n-\frac{\cos(b\log n)}{n^{a-1}}+i\frac{\sin(b\log n)}{n^{a-1}}.$$

Die Gleichungen (8) und (9) in §. 3. gehen alsdann über in

$$\left.\begin{aligned}f(x)=A&+2A_1\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos(b\log k)}{k^a}\cos 2k\pi x\\&+2B_1\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos(b\log k)}{k^a}\sin 2k\pi x\\-i\Big\{2A_1&\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin(b\log k)}{k^a}\cos 2k\pi x+2B_1\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin(b\log k)}{k^a}\sin 2k\pi x\Big\}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\\&=\frac{\cos(b\log n)}{n^{a-1}}f(nx)+A\left(n-\frac{\cos(b\log n)}{n^{a-1}}\right)\\&-i\left\{\frac{\sin(b\log n)}{n^{a-1}}f(nx)-A\frac{\sin(b\log n)}{n^{a-1}}\right\}.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Die Gleichung (2) §. 4. wird nunmehr

$$f(x+1)=Cx^{a-1}\cos(b\log x)+iCx^{a-1}\sin(b\log x)+f(x).\quad(3)$$

Es sei nun

$$f(x)=F(x)+iF'(x), \tag{4}$$

was angenommen werden darf; so hat man zur Bestimmung von $F(x)$ und $F'(x)$ die Rekursionsgleichungen

$$F(x+1)=x^{a-1}\cos(b\log x)\,C+F(x), \tag{5}$$

$$F'(x+1)=x^{a-1}\sin(b\log x)\,C+F'(x). \tag{6}$$

Diese geben als einfache Auflösung, wenn $C=1$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{r}F(x)=1^{a-1}\cos(b\log 1)+2^{a-1}\cos(b\log 2)\\ +3^{a-1}\cos(b\log 3)+\ldots(x-1)^{a-1}\cos(b\log(x-1))+F(1)\end{array}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{r}F'(x)=1^{a-1}\sin(b\log 1)+2^{a-1}\sin(b\log 2)\\ +3^{a-1}\sin(b\log 3)+\ldots(x-1)^{a-1}\sin(b\log(x-1))+F'(1).\end{array}\right\} \tag{8}$$

Für den speziellen Fall $a=1$ erhält man:

$$-F(1)+\underset{a=1}{F(x)}=1+\cos(b\log 2)+\cos(b\log 3)+\ldots\cos(b\log(x-1)), \tag{9}$$

$$\underset{a=1}{F'(x)}=\sin(b\log 2)+\sin(b\log 3)+\ldots\sin(b\log(x-1))+F'(1). \tag{10}$$

§. 9.

Noch einige gemeinsame Eigenschaften der Funktionen $f(x)$, wenn dieselben gewissen Integrationen unterworfen werden, wollen wir ableiten. Es ist nemlich, wenn wieder $x'=2\pi x$ angenommen wird:

$$\left.\begin{array}{l}n^m\int_0^1 f(x)\cos kx'dx=\int_0^1 f(x)\cos knx'dx,\\ n^m\int_0^1 f(x)\sin kx'dx=\int_0^1 f(x)\sin knx'dx;\end{array}\right\} \tag{1}$$

wo k eine ganze positive Zahl ist; m wird, je nachdem man eine spezielle Verfügung über $f(x)$ macht, positiv oder negativ oder auch imaginär sein. Werden diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, so kommt

$$\frac{\int_0^1 f(x)\cos kx'dx}{\int_0^1 f(x)\sin kx'dx}=\frac{\int_0^1 f(x)\cos knx'dx}{\int_0^1 f(x)\sin knx'dx}$$

oder

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)f(\alpha)\cos kx'\sin kn\alpha'dxd\alpha=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(\alpha)\sin kx'\cos kn\alpha'dxd\alpha,$$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

woraus

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)f(\alpha)\sin k(n\alpha'-x')dx\,d\alpha=0, \qquad (2)$$

wo der Kürze wegen $\alpha'=2\pi\alpha$ gesetzt wurde. Wird ferner die erste Gleichung in (1) mit $\cos k\alpha'$, die zweite mit $\sin k\alpha'$ multiplizirt, und alsdann beide addirt oder subtrahirt, so kommt:

$$n^m\{\int_0^1 f(x)\cos kx'dx\cos k\alpha'\pm\int_0^1 f(x)\sin kx'\sin k\alpha'dx\}$$
$$=\int_0^1 f(x)\cos knx'\cos k\alpha'dx\pm\int_0^1 f(x)\sin knx'\sin k\alpha'dx$$

oder

$$n^m\int_0^1 f(x)\cos k(x'\mp\alpha')dx=\int_0^1 f(x)\cos k(nx'\mp\alpha')dx. \qquad (3)$$

Ebenso

$$n^m\int_0^1 f(x)\sin k(x'\pm\alpha')dx=\int_0^1 f(x)\sin k(nx'\pm\alpha')dx, \qquad (4)$$

wo α' einen beliebigen reellen Werth hat, die Null mitbegriffen.

§. 10.

Es sei nunmehr als zweiter Fall

$$\Phi(nx)=nx,$$

so hat man zur Bestimmung der Bedingungsgleichungen, wenn die daraus hervorgehende Funktion mit $f'(x)$ bezeichnet wird,

$$F(nx)=\varphi(n)+\psi(n)f'(nx)+nx\psi'(n). \qquad (1)$$

Werden hier auf beiden Seiten nach §. 2. Gleichung (1) und (2) die Funktionen in Reihen entwickelt und aus §. 5. die Gleichung (4) oder

$$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin nx'}{1}+\frac{\sin 2nx'}{2}+\frac{\sin 3nx'}{3}+\ldots\frac{\sin knx'}{k}+\ldots\right\}\begin{matrix}x>0\\ x<\frac{1}{n}\end{matrix}$$

zu Hülfe genommen, so erhält man die identische Gleichung

$$A+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\{A_{kn}\cos knx'+B_{kn}\sin knx'\}=A\psi(n)+\varphi(n)+\tfrac{1}{2}\psi'(n)$$

$$+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\psi(n)A_k\cos knx'+\{\psi(n)B_k-\frac{1}{2\pi k}\psi'(n)\}\sin knx'\right]\begin{matrix}x>0\\ x<\frac{1}{n}\end{matrix},$$

werden, wenn die Coefficienten von $\cos kx'$ und $\sin kx'$ links und rechts vom Gleichheitszeichen einander gleich gesetzt werden,

$$A = \varphi(n) A + \varphi(n) + \tfrac{1}{2}\psi'(n), \qquad (2)$$

$$A_{kn} = \psi(n) A_k, \qquad (3)$$

$$B_{kn} = \psi(n) B_k - \frac{\psi'(n)}{2\pi k} \qquad (4)$$

erhalten wird, wo

$$\left.\begin{aligned} A &= \int^1 f'(x)\, dx, \\ A_k &= \int^1 f'(x) \cos kx'\, dx, \\ B_k &= \int^1 f'(x) \sin kx'\, dx. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Um hieraus $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $\psi'(n)$ zu berechnen, verfahre man mit der Gleichung (3) wie mit Gleichung (2) §. 3.; so wird

$$\psi(n) = \frac{1}{n^m},$$

also

$$A_k = \frac{1}{k^m} A_1. \qquad (6)$$

Dieses in die Gleichung (4) substituirt, gibt, wenn der Kürze wegen

$$k\left(B_{kn} - \frac{B_k}{n^m}\right) = \frac{B'_n}{n^m} \qquad (\alpha)$$

gesetzt wird,

$$-\psi'(n) = \frac{2\pi B'_n}{n^m}. \qquad (4')$$

Um die Gleichung (α) aufzulösen, bringe man sie unter die Form

$$kn^m B_{kn} - kB_k = B'_n;$$

alsdann setze man in dieser Gleichung für k successive die Werthe $k, kn, kn^2, \ldots kn^{m'-1}$, multiplizire die so entstehenden Gleichungen resp. mit $1, n^{m-1}, n^{2(m-1)}, n^{3(m-1)}, \ldots n^{(m'-1)(m-1)}$ und addire alle zusammen, so erhält man

$$kn^{(m'-1)(m-1)+m+m'-1} B_{kn^{m'}} - kB_k$$
$$= B'_n(1 + n^{m-1} + n^{2(m-1)} + \ldots n^{(m'-1)(m-1)})$$

oder

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$kn^{mm'}B_{kn^{m'}}-kB_k=B'_n\frac{n^{m'(m-1)}-1}{n^{m-1}-1}.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (α) $n^{m'}$ für n, so erhält man

$$kn^{mm'}B_{kn^{m'}}-kB_k=B'_{n^{m'}}.$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Gleichungen unter einander folgt aber

$$\frac{B'_n}{n^{m-1}-1}=\frac{B'_{n^{m'}}}{n^{m'(m-1)}-1}, \qquad (\beta)$$

woraus endlich

$$B'_n=c(n^{m-1}-1)$$

folgt, und mithin ist

$$\psi'(n)=-2\pi c\frac{n^{m-1}-1}{n^m}. \qquad (7)$$

wo c eine Konstante vorstellt, die der Aufgabe gemäss bestimmt werden muss. Zur Bestimmung von B_k hat man nunmehr die Gleichung

$$kB_{kn}-\frac{kB_k}{n^m}=c\frac{n^{m-1}-1}{n^m}.$$

Setzt man hier $k=1$, so kommt, wenn hernach n in k umgetauscht wird:

$$B_k=c\frac{k^{m-1}-1}{k^m}+B_1\frac{1}{k^m}. \qquad (7')$$

Für die Annahme $m=1$ erhält $\frac{B'_{n^{m'}}}{B'_n}$ aus (β) die Form $\frac{0}{0}$. Differenzirt man daher Zähler und Nenner dieses Ausdrucks nach m und setzt hernach $m=1$, so erhält man $B_{n^{m'}}=m'B_n$, woraus $B_n=c\log n$ und also

$$\psi'(n)=-2\pi c\frac{\log n}{n} \qquad (8)$$

geschlossen wird, und alsdann wird auch

$$B_k=\frac{c\log k}{k}+\frac{B_1}{k}. \qquad (8')$$

Führt man diese Bestimmungen für $\psi(n)$ und $\psi'(n)$ in die Gleichung (2) ein, so kommt

$$\varphi(n)=\frac{1}{n^m}\{A(n^m-1)+\pi c(n^{m-1}-1)\}\text{ für }m\gtrless 1 \qquad (9)$$

und

$$\varphi(n)=A\left(1-\frac{1}{n}\right)+\pi c\frac{\log n}{n}\text{ für }m=1. \qquad (10)$$

§. 11.

Fasst man Alles in §. 10. Gefundene zusammen, so hat man also für den Fall, dass $m\gtrless 1$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)+f'\left(x+\frac{1}{n}\right)+f'\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f'\left(x+\frac{n-1}{n}\right) \\ =\frac{1}{n^{m-1}}f'(nx)-2\pi cx\frac{n^{m-1}-1}{n^{m-2}}+A\frac{n^m-1}{n^{m-1}}+\pi c\frac{n^{m-1}-1}{n^{m-1}} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

welche Gleichung für alle jene Werthe von x, welche sich innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{n}$ befinden, Bestand hat. Es ist nunmehr unsere Aufgabe, diejenigen Funktionen zu finden, welche derselben ein Genüge thun. Macht man die Annahme, dass die zu findende Funktion die Eigenschaft hat, die Gleichung (1) wenigstens für alle positiven Zahlenwerthe von x zu erfüllen, so setze man in derselben $x+\frac{1}{n}$ für x ein und ziehe diese so entstehende Gleichung von (1) ab, so kommt, wenn, um abzukürzen, $C=+2\pi c$ ist:

$$f'(x+1)-f'(x)=\frac{f'(nx+1)-f'(nx)}{n^{m-1}}-C\frac{n^{m-1}-1}{n^{m-1}}$$

oder

$$f'(x+1)-f'(x)=\frac{f'(nx+1)-f'(nx)-C(n^{m-1}-1)}{n^{m-1}}.$$

Nimmt man hier $x=1$ an, tauscht alsdann n in x um und bedenkt, dass die Funktion $f(x)$ ihre Form für variable Werthe nicht ändern wird, so erhält man für alle Werthe von x die Rekursion

$$f'(x+1)-f'(x)=C'x^{m-1}-C, \qquad (2)$$

wo

$$C'=f'(2)-f'(1)+C$$

ist.

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \dots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

Ruft man die Auflösung der Rekursion (2) §. 4. zu Hülfe, so kommt also

$$f'(x) = C'f(x) - Cx + f'(1), \tag{3}$$

welches Resultat vorauszusehen war; denn integrit man die Gleichung (2) §. 4. und Gleichung (9) §. 3., so erhält man resp. die Gleichungen (1) und (2). Es ist diess also keine neue Funktion.

Eine solche würde aber erhalten bei der Annahme $m=1$; denn alsdann hat man

$$\left.\begin{aligned} f'(x) + f'\left(x+\frac{1}{n}\right) + f'\left(x+\frac{2}{n}\right) + \dots f'\left(x+\frac{n-1}{n}\right) \\ = f'(nx) - Cxn\log n + A(n-1) + \frac{C}{2}\log n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Verfährt man mit dieser Gleichung ganz gleich wie mit Gleichung (1), so kommt

$$f'(x+1) - f'(x) = f'(nx+1) - f'(nx) - C\log n,$$

woraus wie oben

$$f'(x+1) - f'(x) = C' + C\log x \tag{5}$$

erhalten wird für alle Werthe von x. Dieses gibt also

$$f'(x+1) = C\log\Gamma(x+1) + C'x + f'(1),$$

oder also

$$f'(x) = C\log\Gamma(x) + (x-1)C' + f'(1), \tag{6}$$

wo $\Gamma(x)$ die durch das Integral $\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{x-1}d\alpha$ ausgedrückte Funktion $\lim_{k=\infty}\frac{1.2.3\dots k.k^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)}$ ist, welche für ganze Werthe von x in die Funktion $1.2.3\dots(x-1)$ übergeht.

Nimmt man

$$C=1,\ f'(1)=0,\ C'=f'(2)-f'(1)=0-0=0,$$

welches keine Widersprüche darbietet, an, so erhält man

$$f'(x) = \log\Gamma(x),$$

und alsdann geht aus Gleichung (4)

$$\log\Gamma(x) + \log\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) + \dots\log\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \log\Gamma(nx) + (\tfrac{1}{2} - nx)\log n + A(n-1)$$

hervor, wo nur noch A zu bestimmen ist. Es ist nun nach der Theorie der Funktion $\Gamma(x)$:

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma(1-x) = \log \pi - \log \sin \pi x$$

oder wegen Gleichung (4) §. 5.:

$$2A + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos kx' + B_k \sin kx') + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} (A_k \cos kx' - B_k \sin kx')$$
$$= \log 2\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos kx'}{k},$$

woraus

$$2A = \log 2\pi, \quad A = \tfrac{1}{2}\log 2\pi, \quad A_k = \frac{1}{4k}$$

folgt. B_k wird durch die Gleichung

$$B_k = \int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2k\pi x\, dx = \frac{1}{2\pi k}(\log 2\pi k - c)$$

bestimmt. Diesem zufolge wird

$$\left.\begin{aligned} &\log \Gamma(x) + \log \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) + \ldots \log \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \log \Gamma(nx) + (\tfrac{1}{2} - nx)\log n + \frac{n-1}{2}\log 2\pi, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\log \Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log 2\pi k - c}{k} \sin 2k\pi x \left\{ \begin{matrix} x > 0 \\ x < 1 \end{matrix} \right. \quad (8)$$

wo $c = -0.5772156649\ldots$ die Konstante des Integrallogarithmus vorstellt. Die Gleichung (8) fand Kummer: Crelle's Journal Band 35.

§. 12.

Wir lassen noch einen neüen elementaren Beweis der Gleichung (7) des vorhergehenden Paragraphen folgen.

Es ist nemlich aus Gleichung (5) §. 5.

$$\sin n\pi x = 2^{1-n} \sin \pi x \sin \pi \left(x + \frac{1}{n}\right) \sin \pi \left(x + \frac{2}{n}\right) \ldots \sin \pi \left(x + \frac{n-1}{n}\right),$$

wo x irgend eine reelle Zahl vorstellt. Berücksichtigt man nun die Fundamentalgleichung der Funktion $\Gamma(x)$:

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad \text{(a)}$$

so ergibt sich

$$\Gamma(nx).\,\Gamma(1-nx)=(2\pi)^{1-n}\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x).\,x\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-x-\frac{1}{n}\right)\ldots.\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-x-\frac{n-1}{n}\right),$$

oder, da

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \qquad \text{(b)}$$

so geht diese Gleichung über in

$$\Gamma(nx).\,n\Gamma(-nx)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots.\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right).\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(-x)\Gamma\left(-x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(-x+\frac{n-1}{n}\right),$$

woraus die beiden Gleichungen

$$\Gamma(nx)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)f(x,n)$$

und

$$\Gamma(-nx)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\Gamma(-x)\Gamma\left(-x+\frac{1}{n}\right)\ldots.\Gamma\left(-x+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{nf(x,n)}$$

hervorgehen, wo jetzt $f(x,n)$ als Funktion von x und n zu bestimmen ist. Geht in der letzten Gleichung x in $-x$ über, so erhält man durch Vergleichung mit der ersten

$$f(x,n).f(-x,n)=\frac{1}{n},$$

woraus

$$f(0,n)=n^{-\frac{1}{2}}$$

folgt.

Um nun $f(x,n)$ selbst zu finden, setze man in der ersten jener zwei simultan bestehenden Gleichungen $x+\frac{1}{n}$ für x und bedenke die Gleichung (b), so kommt

$$\Gamma(nx)=\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}f\left(x+\frac{1}{n},\,n\right),$$

welche, mit der ursprünglichen verglichen, die Rekursion

$$f\left(x+\frac{1}{n},\,n\right)=nf(x,n)$$

darbietet, aus welcher leicht

$$f\left(x+\frac{k}{n},\,n\right)=n^k f(x,n)$$

gewonnen wird, wo k irgend eine positive oder negative ganze Zahl ist; hierin $k=-n$ gesetzt gibt

$$f(x,n)=n^n f(x-1,n),$$

woraus endlich unter der Voraussetzung, dass x eine ganze Zahl sei, die Gleichung

$$f(x,n)=n^{nx}f(0,n)=n^{nx-\frac{1}{2}}$$

und sonach

$$f\left(x+\frac{k}{n},\,n\right)=n^{n\left(x+\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}},\quad f(x,n)=n^{nx-\frac{1}{2}}$$

folgt.

Die Gleichung $f(x,n)=n^{nx-\frac{1}{2}}$ gilt sonach für alle Werthe von x von der Form $x'+\frac{k}{n}$, wo x' und k beliebige ganze Zahlen vorstellen. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$\Gamma(nx)=\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}n^{nx-\frac{1}{2}}.$$

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

Setzt man in dieser Gleichung nq für n, so gilt sie für alle Werthe von x von der Form $x' + \frac{k}{nq}$, und es wird

$$\Gamma(qnx) = \Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{qn}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{qn}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{q-1}{qn}\right).\,\Gamma\left(x+\frac{q}{qn}\right)\Gamma\left(x+\frac{q+1}{qn}\right)\Gamma\left(x+\frac{q+2}{qn}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{2q-1}{qn}\right).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$.\,\Gamma\left(x+\frac{n-1}{qn}q\right)\Gamma\left(x+\frac{(n-1)q+1}{qn}\right)\Gamma\left(x+\frac{(n-1)q+2}{qn}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{nq-1}{qn}\right)(2\pi)^{\frac{1-qn}{2}}(qn)^{qnx-\frac{1}{2}},$$

oder

$$\Gamma(qnx) = \frac{\Gamma(nx)}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}n^{nx-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(nx+\frac{1}{q}\right)}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}f\left(x+\frac{1}{qn},\,n\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(nx+\frac{2}{q}\right)}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}f\left(x+\frac{2}{qn},\,n\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(nx+\frac{q-1}{q}\right)}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}f\left(x+\frac{q-1}{qn},\,n\right)}(2\pi)^{\frac{1-qn}{2}}(qn)^{qnx-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\Gamma(qnx) = \frac{\Gamma(nx).\,\Gamma\left(nx+\frac{1}{q}\right)\ldots\Gamma\left(nx+\frac{q-1}{q}\right)(2\pi)^{\frac{1-q}{2}}q^{qnx-\frac{1}{2}}n^{(q-1)nx}}{f\left(x+\frac{1}{qn},\,n\right).f\left(x+\frac{2}{qn},\,n\right)\ldots f\left(x+\frac{q-1}{qn},\,n\right)},$$

woraus, wenn man die Bedeutung von q als ganze positive Zahl bedenkt, folgende Bestimmungsgleichung für $f\left(x+\frac{k}{qn},n\right)$ erhalten wird:

$$f\left(x+\frac{1}{qn},n\right).f\left(x+\frac{2}{qn},n\right)\dots f\left(x+\frac{q-1}{qn},n\right)=n^{(q-1)nx},$$

woraus, wenn man hierin successive für x die Werthe $x, x+\frac{1}{qn}$, $x+\frac{2}{qn}, \dots$ einsetzt, leicht erhalten wird:

$$f\left(x+\frac{p+1}{qn},n\right)\cdots f\left(x+\frac{q-1}{qn},n\right)=n^{(q-p-1)nx+\frac{p}{q}\frac{(2q-p-1)}{2}-\frac{p}{2}},$$

$$f\left(x+\frac{p}{qn},n\right)f\left(x+\frac{p+1}{qn},n\right)\cdots f\left(x+\frac{q-1}{qn},n\right)$$
$$=n^{(q-p)nx+\frac{p-1}{q}\cdot\frac{2q-p}{2}-\frac{p-1}{2}}.$$

Werden diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, so kommt endlich

$$f\left(x+\frac{p}{qn},n\right)=n^{n\left(x+\frac{p}{qn}\right)-\frac{1}{2}}$$

oder allgemein

$$f\left(x+\frac{p}{q},n\right)=n^{n\left(x+\frac{p}{q}\right)-\frac{1}{2}},$$

in welcher Form nun alle reellen Werthe von x enthalten sind. Die Formel $f(x,n)=n^{nx-\frac{1}{2}}$ gilt daher allgemein für jedes reelle x.

§. 13.

Integrirt man die Gleichung (2) §. 11., welche von der Form

$$f'(x+1)-f'(x)=Cx^{m-1}+C' \tag{1}$$

ist, einmal nach x, so wird

$$f''(x+1)-f''(x)=Cx^{m}+C'x+C'', \tag{1'}$$

wenn allgemein $f^{(k)}(x)$ das $k$te Integral von $f(x)$ nach x bedeuten soll. Integrirt man zugleich Gleichung (1) §. 11., nemlich

$$f'(x)+f'\left(x+\frac{1}{n}\right)+\dots f'\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n^{m-1}}f'(nx)+ax+a', \; ($$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

so ist auch

(2′)

$$f''(x)+f''\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots f''\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n^{m-1}}f''(nx)+ax^2+a'x+a''.$$

Die Funktionen, welche aus der Gleichung (1′) entspringen, werden also auch der Gleichung (2′) ein Genüge leisten. Aber auch aus der Gleichung (5) §. 11. entspringt durch Integration noch eine Funktion, welche die Gleichung (2′) erfüllt, nemlich

$$f''(x+1)-f''(x)=C(x\log x)+C'x+C''(x), \qquad (1')$$

welche Gleichung das $\int \log \Gamma(x)dx$ enthält; und noch eine andere Funktion wird erhalten durch zweimaliges Integriren von $\log 2\sin \pi x$, wenn man die Integrations-Konstanten willkührlich bleiben lässt.

Und so werden allgemein diejenigen Funktionen, welche aus der Gleichung

$$f^{(k)}(x+1)-f^{(k)}(x)=Cx^{m-1}+C'x^{k-1}+C''x^{k-2}+\ldots C^{(k-1)}x+C^{(k)} \qquad (1'')$$

entspringen, die identische Gleichung

$$f^{(k)}(x)+f^{(k)}\left(x+\frac{1}{n}\right)+f^{(k)}\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f^{(k)}\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{m-1}}f^{(k)}(nx)+ax^k+a'x^{k-1}+a''x^{k-2}+\ldots a^{(k-1)}x+a^{(k)} \qquad (2'')$$

erfüllen. Es ist auch leicht zu zeigen, dass es wirklich keine anderen Funktionen gibt, als die aus der Integration von $f(x)$ und $f''(x)$ entspringen. Denn es sei $F_k(x)$ das Zeichen für diese Funktionen, so wird

$$F_k(x+1)-F_k(x)=Cx^{m-1}+C'x^{k-1}+C''x^{k-2}+\ldots C^{(k-1)}x+C^{(k)} \qquad (1''')$$

$$F_k(x)+F_k\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots F_k\left(x+\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{m-1}}F_k(nx)+ax^k+a'x^{k-1}+\ldots a^{(k-1)}x+a^{(k)}. \qquad (2''')$$

Aus der Gleichung (2‴) können nun nur algebraische Funktionen hervorgehen, spezielle Fälle ausgenommen. Diese werden vom [illegible]ten Grad sein. Gesetzt nun, es gäbe noch andere algebraische Funktionen, welche die Gleichung (2‴) erfüllen, welche vom $p$ten Grad sein sollen, so setze man diese Funktion in die Gleichung (2‴) ein, vergleiche links und rechts vom Gleichheitszeichen die Coeffizienten der gleichen Potenzen von x, so werden die Coeffi-

zienten der Funktion alle bestimmt werden, deren Anzahl $p+1$ ist, indem die Anzahl der so entstehenden Gleichungen auch $p+1$ ist. Es gibt also, da diese Gleichungen lineär sind, nur eine algebraische Funktion, welche der Gleichung (2''') genügt, und zwar ist es die Funktion, welche aus der Gleichung (1''') hervorgeht. Was nun die transcendenten Funktionen betrifft, welche die Gleichung (2''') erfüllen, so wird man dieselben k mal hinter einander differenziren können, ohne dass sie verschwinden. Alsdann wird die Gleichung (2''') zu

$$(2^{IV})\qquad \frac{d^kF_k(x)}{dx^k}+\frac{d^kF_k\left(x+\frac{1}{n}\right)}{dx^k}+\ldots\frac{d^kF_k\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{dx^k}=\frac{1}{n^{m-1}}\frac{d^kF_k(nx)}{dx^k}+a.$$

Dieses ist aber die Gleichung (1) §. 4., welcher die Funktionen $f(x)$ entsprechen. Es muss also

$$\frac{d^kF_k(x)}{dx^k}=f(x)$$

oder

$$F_k(x)=\int^{(n)}f(x)dx^n$$

sein.

Die Gleichung (2''') korrespondirt aber mit der Gleichung (5) §. 2., wenn $\psi(n)=\frac{1}{n^m}$ gesetzt wird. Die daselbst angekündigte Untersuchung ist hiemit als geschlossen anzusehen.

§. 14.

Es ergeben sich aus einer der Gleichung (5) §. 2. analogen Gleichung, in welcher jene als spezieller Fall enthalten ist, noch eine Anzahl von Funktionen, welche analoge Lehrsätze hervorrufen, nemlich aus der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} F(nx)=\psi(n)f(nx)+\psi'(n)nx+\psi''(n)n^2x^2 \\ \quad+\psi'''n^3x^3+\ldots\psi^{(\mu)}(n)n^\mu x^\mu+\varphi(n), \end{array}\right\}\qquad(1)$$

wo $\psi(n)$, $\psi'(n)$, $\psi''(n)$, ... $\psi^{(\mu)}(n)$ im Allgemeinen von einander verschiedene Funktionen vorstellen, welche unter sich einen gewissen Zusammenhang haben. Um aber zu untersuchen, was für Funktionen dieser Gleichung genügen, so hat man vorerst folgende drei Gleichungen zur Entwickelung von x, x^{2p+1}, x^{2p}, welche nach den in §. 2. Gleichung (2) aufgestellten Formeln leicht erhalten werden können:

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$x^{2p}=\frac{1}{2p+1}+2\frac{p}{2\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{k=\infty}K_{2p}\cos kx'-2\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}K_{2p}'\sin kx',$$

wo

$$K_{2p}=\frac{1}{k^3}-\frac{(2p-1)(2p-2)}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^4}+\ldots(-1)^{p+1}\frac{(2p-1)(2p-2)\ldots 2}{(2\pi)^{2p-2}}\frac{1}{k^{2p}},\qquad (2)$$

$$K_{2p}'=\frac{1}{k}-\frac{2p(2p-1)}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^3}+\ldots(-1)^{p+1}\frac{2p(2p-1)\ldots 3}{(2\pi)^{2p-2}}\frac{1}{k^{2p-1}}$$

der Kürze wegen gesetzt wurde, und

(3)

$$x^{2p+1}=\frac{1}{2p+2}+2\frac{2p+1}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}K_{2p+1}\cos kx'-2\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}K'_{2p+1}\sin kx',$$

wo

$$K_{2p+1}=\frac{1}{k^2}-\frac{2p(2p-1)}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^4}+\ldots(-1)^{p+1}\frac{2p(2p-1)\ldots 3}{(2\pi)^{2p-2}}\frac{1}{k^{2p}},$$

$$K'_{2p+1}=\frac{1}{k}-\frac{(2p+1).2p}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^3}+\ldots(-1)^{p}\frac{(2p+1)(2p)\ldots 2}{(2\pi)^{2p}}\frac{1}{k^{2p+1}};$$

und endlich noch

$$x=\frac{1}{2}-2\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\sin kx',\qquad (4)$$

wo überall der Kürze wegen $x'=2\pi x$ ist. Alsdann hat man die identische Gleichung:

$$A\psi(n)+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{A_k\psi(n)+\frac{\psi''(n)}{2\pi^2}K_2+\frac{3\psi''''(n)}{(2\pi)^2}K_3+\ldots\right\}\cos knx'$$

$$+\sum_{r=1}^{r=\mu}\frac{\psi^{(r)}(n)}{r+1}+\varphi(n)$$

$$+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{B_k\psi(n)-\frac{\psi'(n)}{2\pi k}-\frac{\psi''(n)}{2\pi}K'_2-\frac{\psi'''(n)}{2\pi}K'_3-\ldots\right\}\sin knx'$$

$$=A+2\sum_{k=1}^{k=\infty}A_{kn}\cos knx'+2\sum_{k=1}^{k=\infty}B_{kn}\sin knx'$$

für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{n}$ liegen. Es muss also sein:

$$A(\psi(n)-1)+\sum_{r=1}^{r=\mu}\frac{\psi^{(r)}(n)}{r+1}+\varphi(n)=0\,, \tag{5}$$

$$A_{kn}=A_k\psi(n)+\frac{1}{(2\pi)^2}\{2\psi''(n)K_2+3\psi'''(n)K_3+\ldots.\mu\psi^{(\mu)}(n)K_\mu\}$$

$$=A_k\psi(n)+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{r=2}^{r=\mu}r\psi^{(r)}(n)K_r, \tag{6}$$

$$B_{kn}=B_k\psi(n)-\frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{r=\mu}\psi^{(r)}(n)K'_r. \tag{7}$$

Diese drei Gleichungen nun sind es allein, welche zur Bestimmung der $\mu+2$ Funktionen von n, nemlich $\psi(n)$, $\psi'(n)$,....$\psi^{(\mu)}(n)$, $\varphi(n)$ dienen. Es ist also klar, dass eine Anzahl $\mu-1$ derselben beliebig angenommen werden kann. Die Willkührlichkeit dieser $\mu-1$ Funktionen ist es nun, welche eine unendliche Menge Formen für $f(x)$ zulässt. Die Verfügung über $\psi(n)$, nemlich

$$\psi(n)=\frac{1}{n^m}, \tag{8}$$

wo m irgend eine positive oder negative Zahl vorstellt, liefert einige interessante Entwickelungen, deren Ausführung der Zweck der folgenden Paragraphen ist.

§. 15.

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi'(n)=\psi'(n)+\psi''(n) \tag{1}$$

und betrachtet den Fall, wo $\mu=2$ ist, so hat man zufolge der Gleichungen (5), (6), (7) §. 14.:

$$A(\psi(n)-1)-\frac{\psi''(n)}{6}+\frac{\varphi'(n)}{2}+\varphi(n)=0,\ A_k\psi(n)+\frac{\psi''(n)}{2\pi^2k^2}=A_{kn},$$

$$B_k\psi(n)-\frac{\varphi'(n)}{2\pi k}=B_{kn}. \tag{2}$$

Setzt man ferner $2\pi^2A_k=A_k'$ und $2\pi B_k=B_k'$, so gehen die beiden letzten Gleichungen in (2) über in:

$$k^2A_{kn}'-k^2A_k'\psi(n)=\psi''(n) \text{ und } kB_{kn}'-k\psi(n)=-\varphi'(n), \tag{3}$$

welche nun aufzulösen sind. Setzt man in der ersten derselben für k successive die Werthe k, kn, kn^2,....$kn^{m'-1}$, multiplizirt sie alsdann resp. mit $n^{2m'-2}\psi(n)^{m'-1}$, $n^{2m'-4}\psi(n)^{m'-2}$, $n^{2m'-6}\psi(n)^{m'-3}$,....1 und addirt sie sämmtlich, so wird:

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$A'_{kn^{m'}}k^2n^{2m'-2}-k^2n^{2m'-2}\psi(n)^{m'}A'_k$$
$$=\psi''(n)\{1+n^2\psi(n)+n^4\psi(n)^2+\ldots\, n^{2m'-2}\psi(n)^{m'-1}\}$$
$$=\psi''(n)\frac{n^{2m'}\psi(n)^{m'}-1}{n^2\psi(n)-1},$$

oder

$$k^2A'_{kn^{m'}}-k^2\psi(n)^{m'}A'_k=\frac{\psi''(n)}{n^{2m'-2}}\,\frac{n^{2m'}\psi(n)^{m'}-1}{n^2\psi(n)-1}.$$

Es ist aber auch

$$k^2A'_{kn^{m'}}-k^2\psi(n^{m'})A'_k=\psi''(n^{m'}).$$

Setzt man daher

$$\psi(n)=\frac{1}{n^m}, \tag{4}$$

so werden die ersten Glieder dieser beiden Gleichungen einander gleich, und es wird dann:

$$\frac{\psi''(n)}{n^{2m'-2}}\,\frac{n^{m'(2-m)}-1}{n^{2-m}-1}=\psi''(n^{m'}) \tag{α}$$

oder

$$\psi''(n)\frac{n^2}{n^{2-m}-1}=\psi''(n^{m'})\frac{n^{2m'}}{n^{(2-m)m'}-1},$$

woraus

$$\psi''(n)=-a\frac{n^{2-m}-1}{n^2}\ \text{oder}\ \psi''(n)=a\frac{n^{m-2}-1}{n^m} \tag{5}$$

folgt. Behandelt man ebenso die zweite der Gleichungen (3), so kommt

$$\frac{\varphi'(n)}{n^{m'-1}}\,\frac{n^{m'(1-m)}-1}{n^{(1-m)}-1}=\varphi'(n^{m'}), \tag{β}$$

woraus

$$\varphi'(n)=b\frac{n^{m-1}-1}{n^m}. \tag{6}$$

So lange m von 1 oder 2 verschieden ist, wird man auf diesem Wege auf keine neuen Funktionen stossen.

Für $m=2$ dagegen erhält man aus Gleichung (α), welche in $\frac{0}{0}$ übergeht:

$$\frac{\psi''(n).m'}{n^{2m'-2}}=\psi''(n^{m'})\ \text{oder}\ n^2\psi''(n)=\frac{n^{2m'}\psi''(n^{m'})}{m'},$$

und hieraus:

$$\psi''(n) = \frac{a}{n^2} \log n. \tag{7}$$

Alsdann wird auch (6) zu

$$\varphi'(n) = b\,\frac{n-1}{n^2},$$

also

$$\psi'(n) = \frac{bn-b-a\log n}{n^2}, \quad \psi(n) = \frac{1}{n^2},$$

$$\varphi(n) = \frac{a\log n + 6An^2 - 3bn - (6A-3b)}{6n^2}. \tag{8}$$

Es wird also

$$f(x) + f(x+\frac{1}{n}) + \ldots. f(x+\frac{n-1}{n})$$
$$= \frac{1}{n} f(nx) + x(bn-b-a\log n) + x^2 an\log n + n\varphi(n), \tag{9}$$

welche Gleichung identisch ist für alle Werthe von x, welche innerhalb der Grenzen 0 und $\frac{1}{n}$ liegen. Nehmen wir an, sie bestehe für alle Werthe von x, sofern $f(x)$ dies im Allgemeinen zulässt, so darf man in derselben $x+\frac{1}{n}$ für x substituiren. Thut man das und subtrahirt die Gleichung (9) von der so entstehenden, so kommt:

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{n}\{f(nx+1) - f(nx)\} + \frac{1}{n}(bn-b-a\log n)$$
$$+ \frac{2axn\log n}{n} + \frac{a}{n}\log n.$$

Nimmt man hier $x=1$ an und setzt zur Abkürzung $f(2)-f(1)=c$, so wird

$$nc = f(n+1) - f(n) + bn - b + 2an\log n$$

oder, wenn man n in x umsetzt, so wird diese Gleichung offenbar auch für variable Werthe von x gelten, und es ist

$$f(x+1) = f(x) + b + x(c-b) - 2ax\log x, \tag{10}$$

woraus für ganze Werthe von x die Funktion $f(x+1) = f(1) + bx + (c-b)(1+2+3+\ldots. x) - 2a(1\log 1 + 2\log 2 + 3\log 3 + \ldots. x\log x)$ sich ergibt. $1+2+3+\ldots. x$ ist aber die Bernoulli'sche Funktion $\underset{m=0}{B'}(x+1)$, wenn x einen variablen Werth hat. Bezeichnet man ferner:

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\dots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

$$\log{}'\Gamma(x+1)=1\log 1+2\log 2+3\log 3+\dots . x\log x, \qquad (A)$$

wofür

$$\log{}'\Gamma(x+1)=x\log x+\log{}'\Gamma(x) \qquad (B)$$

ist, und also

$$\log{}'\Gamma(1)=0, \quad \log{}'\Gamma(2)=0; \qquad (C)$$

so ergibt sich schliesslich für gebrochene Werthe von x die Funktion:

$$f(x)=(f(1)-b)+bx+(c-b)\underset{m=0}{B'(x)}-2a\log{}'\Gamma(x). \qquad (11)$$

Um endlich noch die Reihenentwickelung von $f(x)$ und somit auch von $\log{}'\Gamma(x)$ zu finden, so ist aus den Gleichungen (2), wenn man $a=1$ annimmt, was erlaubt ist:

$$\frac{1}{n^2}A_k+\frac{1}{n^2}\frac{\log n}{2\pi^2k^2}=A_{kn}, \quad B_{kn}=\frac{1}{n^2}B_k-b\,\frac{n-1}{n.2\pi k};$$

woraus, wenn $k=1$ gesetzt und dann n in k umgesetzt wird:

$$A_k=\frac{A_1}{k^2}+\frac{1}{2\pi^2}\frac{\log k}{k}, \quad B_k=\frac{B_1}{k^2}+\frac{b}{2k\pi}-\frac{b}{2\pi}. \qquad (12)$$

Für $m=1$ erhält man auf ähnliche Art:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi(n)=\frac{1}{n}, \quad \psi''(n)=a\frac{1-n}{n^2}, \quad \varphi'(n)=\frac{b\log n}{n};\\
&\text{also } \psi'(n)=\frac{an+bn\log n-a}{n^2},\\
&\text{und } \varphi(n)=\frac{1}{6n^2}\{a-(6A+a)n+6An^2-3bn\log n\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Dies gibt also die Funktion

$$f(x+1)=f(x)+(c-2a)+2ax-b\log x,$$

woraus

$$f(x)=f(1)+(c-2a)(x-1)+ax(x-1)-b\log\Gamma(x) \qquad (14)$$

hervorgeht. Da die Eigenschaften dieser Funktion schon bekannt sind, so bleiben wir nicht dabei stehen, sondern gehen zum folgenden Fall über.

§. 16.

Es sei als zweite Spezialisirung $\mu=3$, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &A(\psi(n)-1)+\frac{\psi'(n)}{2}+\frac{\psi''(n)}{3}+\frac{\psi'''(n)}{4}+\varphi(n)=0;\\ &A_{kn}=A_k\psi(n)+\frac{2\psi''(n)}{(2\pi)^2k^2}+\frac{3\psi'''(n)}{(2\pi)^2k^2};\\ &B_{kn}=B_k\psi(n)-\frac{\psi'(n)}{2\pi k}-\frac{\psi''(n)}{2\pi k}-\frac{\psi'''(n)}{2\pi k}+\frac{\psi'''(n).2.3}{(2\pi)^3k^3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\psi'(n)+\psi''(n)+\psi'''(n)=\varphi'(n),\quad 2\psi''(n)+3\psi'''(n)=\varphi''(n); \quad (2)$$

so kommt

$$A_{kn}=A_k\psi(n)+\frac{\varphi''(n)}{(2\pi)^2k^2}, \quad (3)$$

$$B_{kn}=B_k\psi(n)-\frac{\varphi'(n)}{2\pi k}+\frac{2.3\psi'''(n)}{(2\pi)^3k^3}. \quad (4)$$

Die erste der Gleichungen (3) aufgelöst gibt, wenn $\psi(n)=\frac{1}{n^m}$ angenommen wird, nach §. 15.:

$$\varphi''(n)=b\,\frac{n^{m-2}-1}{n^m}. \quad (5)$$

Setzt man in der zweiten Gleichung in (3) der Kürze wegen $\varphi'(n)(2\pi)^2=\chi(n)$, $6\psi'''(n)=\varphi'''(n)$, $(2\pi)^3B_k=B'_k$, so wird selbige zu

$$k^3B'_{kn}-k^3B'_k\psi(n)+k^2\chi(n)=\varphi'''(n).$$

Hiernach, auch noch für k die Werthe $k, kn, kn^2, \ldots kn^{m'-1}$ gesetzt, dann die entstehenden Gleichungen resp. mit $n^{3(m'-1)}\psi(n)^{m'-1}$, $n^{3(m'-2)}\psi(n)^{m'-2}, \ldots 1$ multiplicirt und sämmtlich addirt, gibt zuletzt:

$$k^3B'_{kn^{m'}}-k^3\psi(n)^{m'}B'_k+k^2n^{-m'+1}\chi(n)\frac{n^{m'}\psi(n)^{m'}-1}{n\psi(n)-1}$$
$$=\varphi'''(n)n^{-3(m'-1)}\frac{n^{3m'}\psi(n)^{m'}-1}{n^3\psi(n)-1}.$$

Es ist aber auch

$$k^3B'_{kn^{m'}}-k^3\psi(n^{m'})B'_k+k^2\chi(n^{m'})=\varphi'''(n^{m'}).$$

Setzt man nun, um diese beiden Gleichungen identisch zu machen:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(n)=\frac{1}{n^m};\quad \chi(n^{m'})=n^{-m'+1}\chi(n)\frac{n^{m'(1-m)}-1}{n^{(1-m)}-1},\\ &\varphi'''(n^{m'})=n^{-3(m'-1)}\varphi'''(n)\frac{n^{m'(3-m)}-1}{n^{3-m}-1}; \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$nF(nx) = f(x) + f\left(x+\frac{1}{n}\right) + f\left(x+\frac{2}{n}\right) + \ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

so folgt daraus

$$\varphi'(n) = a\,\frac{n^{m-1}-1}{n^m}, \quad \psi'''(n) = \frac{c}{3}\,\frac{n^{m-3}-1}{n^m}; \tag{7}$$

wodurch nun $\psi'(n)$ und $\psi''(n)$ ebenfalls bestimmt sind. Diese Bestimmungen geben aber, wenn m nicht gleich 1, 2 oder 3 ist, keine neuen Resultate; auch für $m=1$ kommt man auf die Funktion $\log\Gamma(x)$, für $m=2$ auf $\log'\Gamma(x)$. Es sei also $m=3$, so wird ganz analog dem früher angegebenen Verfahren:

$$\psi(n) = \frac{1}{n^3}, \quad \varphi'(n) = a\,\frac{n^2-1}{n^3}, \quad \varphi''(n) = b\,\frac{n-1}{n}, \quad \psi'''(n) = \frac{c}{3}\,\frac{\log n}{n^3}; \tag{8}$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} &\psi(n) = \frac{1}{n^3}, \quad \psi'(n) = \frac{an^2 - \frac{b}{2}n - \left(a - \frac{b}{2}\right)}{n^3} + \frac{c}{6}\,\frac{\log n}{n^3}, \\ &\psi''(n) = \frac{1}{2}\,\frac{bn-b}{n^3} - \frac{c}{2}\,\frac{\log n}{n^3}, \quad \varphi'''(n) = \frac{c}{3}\,\frac{\log n}{n^3}. \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

Nun aber kommt auf gleiche Weise, wie im vorhergehenden Paragraphen, wenn $f(2) - f(1) = -d$ gesetzt wird:

$$f(x+1) = f(x) + a + bx - (d + a + b)x^2 - cx^2 \log x, \tag{9}$$

woraus

$$\begin{aligned} f(x+1) = f(x) + ax + b\underset{m=0}{B'}(x+1) - (d+a+b)\underset{m=1}{B''}(x+1) \\ - c\log''\Gamma(x+1); \end{aligned} \tag{10}$$

wo mit $''\Gamma(x+1)$ die Funktion $1^{1^2} 2^{2^2} 3^{3^2} - x^{x^2}$ oder $\log''\Gamma(x+1) = 1^2\log 1 + 2^2\log 2 + 3^2\log 3 + \ldots. x^2\log x$ bezeichnet wurde.

§. 17.

Allgemein erhält man, wenn μ als gerade oder ungerade Zahl $2\mu'$ oder $2\mu'+1$ betrachtet wird:

$$A_{kn} = A_k\psi(n) + \frac{1!}{(2\pi)^2k^2}\left\{\binom{2}{1}\psi''(n) + \binom{3}{1}\psi'''(n) + \ldots \binom{2\mu'}{1}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{1}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$-\frac{3!}{(2\pi k)^4}\left\{\binom{4}{3}\psi^{IV}(n) + \binom{5}{3}\psi^{V}(n) + \ldots \binom{2\mu'}{3}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{3}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$+\frac{5!}{(2\pi k)^6}\left\{\binom{6}{5}\psi^{VI}(n) + \ldots \binom{2\mu'}{5}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{5}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\frac{(-1)^{\mu'+1}(2\mu'-1)!}{(2\pi k)^{2\mu'}}\left\{\binom{2\mu'}{2\mu'-1}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{2\mu'-1}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\},$$

$$B_{kn} = B_k\psi(n) - \frac{1}{2\pi k}\left\{\psi'(n) + \psi''(n) + \psi'''(n) + \ldots \psi^{(2\mu')}(n) + \psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$+\frac{2!}{(2\pi k)^3}\left\{\binom{3}{2}\psi'''(n) + \binom{4}{2}\psi^{IV}(n) + \ldots \binom{2\mu'}{2}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{2}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$-\frac{4!}{(2\pi k)^5}\left\{\binom{5}{4}\psi^{V}(n) + \ldots \binom{2\mu'}{4}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{4}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\frac{(-1)^{\mu'}(2\mu'-2)!}{(2\pi k)^{2\mu'-1}}\left\{\binom{2\mu'-1}{2\mu'-2}\psi^{(2\mu'-1)}(n) + \binom{2\mu'}{2\mu'-2}\psi^{(2\mu')}(n) + \binom{2\mu'+1}{2\mu'-1}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\}$$

$$+\frac{(-1)^{\mu'+1}(2\mu')!}{(2\pi k)^{2\mu'+1}}\left\{\binom{2\mu'+1}{2\mu'}\psi^{(2\mu'+1)}(n)\right\};$$

$$nF(nx)=f(x)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots f\left(x+\frac{n-1}{n}\right).$$

wo das Symbol

$$r!=1.2.3\ldots.r \quad \text{und} \quad \binom{r}{k}=\frac{r(r-1)(r-2)\ldots.(r-k+1)}{1.2.3\ldots.k}$$

ist. Setzt man nun allgemein der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned}\varphi^{(r)}(n)=\binom{r}{r-1}\psi^{(r)}(n)+\binom{r+1}{r-1}\psi^{(r+1)}(n)+\binom{r+2}{r-1}\psi^{(r+2)}(n)\\ +\ldots.\binom{2\mu'}{r-1}\psi^{(2\mu')}(n)+\binom{2\mu'+1}{r-1}\psi^{(2\mu'+1)}(n),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

so gehen A_{kn} und B_{kn} über in:

$$\left.\begin{aligned}A_{kn}=A_k\psi(n)+\frac{1!}{(2\pi k)^2}\varphi''(n)-\frac{3!}{(2\pi k)^4}\varphi^{IV}(n)+\frac{5!}{(2\pi k)^6}\varphi^{VI}(n)\\ -\ldots.\frac{(-1)^{\mu'+1}(2\mu'-1)!}{(2\pi k)^{2\mu'}}\varphi^{(2\mu')}(n).\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}B_{kn}=B_k\psi(n)-\frac{1}{(2\pi k)}\varphi'(n)+\frac{2!}{(2\pi k)^3}\varphi'''(n)-\frac{4!}{(2\pi k)^5}\varphi^{V}(n)\\ +\ldots.\frac{(-1)^{\mu'+1}(2\mu')!}{(2\pi k)^{2\mu'+1}}\varphi^{(2\mu'+1)}(n).\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Werden diese beiden Gleichungen nach der im vorhergehenden Paragraphen angewandten Methode aufgelöst, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(n)=a_1\frac{n^{m-1}-1}{n^m},\quad \varphi''(n)=a_2\frac{n^{m-2}-1}{n^m},\\ \varphi'''(n)=a_3\frac{n^{m-3}-1}{n^m},\ \ldots.\ \varphi^{(k)}_{(n)}=a_k\frac{n^{m-k}-1}{n^m}\ldots.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Für $m=2\mu'+1$ wird nun

$$\varphi^{(2\mu'+1)}(n)=\frac{a_{2\mu'+1}\log n}{n^{2\mu'+1}}.$$

Setzt man nun überall $\psi^{(2\mu'+1)}(n)=0$, so erhält man ganz eben so die Gleichungen (4) und für $m=2\mu'$ wird dann auch:

$$\varphi^{(2\mu')}_{(n)}=\frac{a_{2\mu'}\log n}{n^{2\mu'}}.$$

Es ist also allgemein für ein beliebiges μ:

$$\varphi^{(\mu)}(n)=\frac{a_\mu\log n}{n^\mu}. \quad (5)$$

Ferner wird, wenn Alles gehörig reducirt wird und angenommen, $f(x)$ solle der Gleichung (1) §. 14. für jedes reelle x genügen, so fern es möglich ist, auf gleiche Weise wie früher erhalten:

$$f(x+1)-f(x)=n\varphi(n)\{f(nx+1)-f(nx)\}$$
$$+n\varphi'(n)+n^2x\varphi''(n)+n^3x^2\varphi'''(n)+\ldots n^\mu x^{\mu-1}\varphi^{(\mu)}(n),$$

und somit, wenn man hierin den Werth von $\varphi^{k)}(n)$ aus (4) substituirt und der Kürze wegen $f(2)-f(1)=-a_{\mu+1}$ annimmt:

$$\left.\begin{array}{l}f(x+1)=f(x)-x^{\mu-1}(a_{\mu+1}+a_1+a_2+a_3+\ldots a_{\mu-1})\\ +x^{\mu-2}a_{\mu-1}+x^{\mu-3}a_{\mu-2}+\ldots x^2a_3+xa_2+a_1-a_\mu x^{\mu-1}\log x,\end{array}\right\}(6)$$

woraus kommt:

$$\left.\begin{array}{l}f(x+1)=f(1)-(a_1+a_2+a_3+\ldots a_{\mu-1}+a_{\mu+1})B_{\mu-1}(x+1)\\ +a_{\mu-1}B_{\mu-2}(x+1)+\ldots a_1x-\mu a_\mu\log^{(\mu-1)}\Gamma(x+1),\end{array}\right\}(7)$$

worin

$$\log^{(\mu-1)}\Gamma(x+1)=1^{\mu-1}\log 1+2^{\mu-1}\log 2+3^{\mu-1}\log 3+\ldots x^{\mu-1}\log x$$

und $B_k(x+1)$ der Bernoulli'schen Funktion $B(x+1)$ aus §. 5. gleich gesetzt ist, wenn für $m=k$ angenommen wird.

XVII.

Miscellen.

In dem folgenden, manche interessante Dinge enthaltenden Werke:

Paulli Frisii Operum Tomus primus, Algebram et Geometriam analyticam continens. Mediolani. 1782. 4. p. 255.

wird die Geschichte der Erfindung der Auflösungen der cubischen und biquadratischen Gleichungen auf folgende Art erzählt:

„Cum ad sextum decimum usque saeculum, qui Algebram excoluerunt Mathematici, et Lucas ipse Paciolus, qui aliorum inventa collegerat in Arithmeticae summa Venetiis edita anno 1494, ultra aequationes secundi gradus minime progressi essent, primus omnium Scipio Ferreus Bononiensis aequationem tertii gradus caepit resolvere, et methodum resolutionis Florido Veneto Auditori, et amico suo communicavit. Is autem occasione quarumdam disputationum idem problema aequationis cubicae resolvendae Nicolao Tartaleae Brixiensi proposuit. Tartalea ad eosdem Scipionis Ferrei conclusiones pervenit, et celato progressu, ac serie calculi, regulas omnes aperuit Hieronimo Cardano Mediolanensi, qui se arcanum fore pollicitus, cum diuturno studio evolutis cubicis aequationibus regularum omnium rationem invenisset, publici juris omnia esse voluit. Quo quidem ipse datam Tartaleae fidem fefellit, et promovendae Algebrae, et votis Algebristarum optime consuluit. In sua enim Magna Arte Algebrae, et in libro de Regula Aliza, qui anno 1545 in lucem prodiit, aequationes cubicas pro casibus singulis evolutas exhibuit Cardanus, et casum etiam illum attigit, quem vocant irreductibilem, et in quo reales aequationis cubicae radices prodeunt sub forma imaginaria. Hisce omnibus de causis Algebristae aequationum huiusmodi resolvendarum formulam Cardanicam appellare consueverunt. Methodum eamdem resolutioni aequationum quarti gradus aptavit Ludovicus de Ferrariis, aequationibus quadratico-quadraticis in cubicas resolutis, ut in Coroll. III. Probl. IL. jam dictum est. Post illud tempus celebriores Algebristae fere omnes in hanc Algebrae partem studia sua contulerunt. Singulare est autem duorum saeculorum studiis vix quidpiam amplius Mathematicos obtinuisse quam antea scripserat Cardanus, homo qui summi ingenii monumentum apud Mathematicos ipsos reliquit, cum aliis editorum operum voluminibus tot ineptias, tot somnia et deliria promiscuerit, ut in iis ne prudens quidem, et consideratus author dignosci possit."

In den „Astronomischen Nachrichten Nr. 875." theilt Herr Professor d'Arrest in Leipzig folgende sehr interessante Bemerkungen über das Florentiner Problem mit:

„Seit Viviani und Jac. Bernoulli kennt man die einfachste Lösung des Florentiner Problems, der zufolge zwei orthogonale Cylinder, errichtet auf dem Aequator *BCD* und auf kreisförmigen Grundflächen, deren Durchmesser dem Kugelradius gleich

sind, die Halbkugel *ABCD* (*A* der Pol) in zwei ovalen Oeffnungen durchbohren, so dass der Rest der hemisphärischen Fläche durch das Quadrat des Kugeldurchmessers ausgedrückt wird. Dass die gewöhnliche Lemniscate an die Stelle jener zwei Kreise treten kann, ist unter den zahlreichen Entdeckungen, zu denen diese Aufgabe späterhin Veranlassung gegeben hat, wie ich glaube, nicht erwähnt worden; statt jene Kreise orthographisch auf die Kugel zu projiciren, muss man, um den unquadrirbaren Theil aus der Hemisphäre auszuscheiden, die Lemniscate stereographisch auf die Kugel werfen. Man kann sich hiervon auf ganz elementare Weise überzeugen. Die Polargleichung der im Aequator liegenden Lemniscate, deren Halbaxe dem Kugelradius gleich und Eins gesetzt wird, sei $r^2=\cos 2\alpha$. Dann ist nach der Natur der stereographischen Projection $\operatorname{tg}^2(45^0-\frac{\delta}{2})=\cos 2\alpha$, wenn man die Declination des entsprechenden Punktes mit δ bezeichnet. Dafür die gleichbedeutenden Ausdrücke

$$\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

gesetzt, giebt

$$\sin\delta=\operatorname{tg}^2\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

welches für den Anfangspunkt *B* der α und für die Grundebene *BCD* die Gleichung an die sphärische Linie ist. Nehmen wir dagegen jetzt den grössten Kreis *AC* als Grundebene, in der die α gezählt werden, legen den Anfangspunkt der Coordinaten nach *A*, und bezeichnen in diesem Systeme die zusammengehörigen rechtwinkligen sphärischen Coordinaten mit α' und δ', so sieht man, dass

$$\sin\delta=\cos\delta'\cos\alpha', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{cotg}\delta'\sin\alpha'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Eliminirt man nun α und δ aus (1), (2), (3), so kommt $\alpha'=\delta'$, und dies ist, wie bekannt, die Gleichung der gesuchten Curve, welche das Viviani'sche Räthsel löst. Aus Gleichung (1) ist sogleich klar, dass die sphärischen Tangenten im Knotenpunkte sich unter rechten Winkeln, wie bei der ebenen Lemniscate, schneiden; auch lassen sich einige andere Eigenschaften dieser Linie nun direct auf die sphärische Schleifenlinie des Viviani übertragen."

In seinem Journal T. XI. p. 466. hat Herr Liouville die folgende Auflösung von n Gleichungen des ersten Grades zwischen n unbekannten Grössen von der Form:

$$\frac{x}{A-a}+\frac{y}{A-b}+\frac{z}{A-c}+\ldots=1,$$

$$\frac{x}{B-a}+\frac{y}{B-b}+\frac{z}{B-c}+\ldots=1,$$

$$\frac{x}{C-a}+\frac{y}{C-b}+\frac{z}{C-c}+\ldots=1,$$

u. s. w.

gegeben, mit der Bemerkung, dass schon Herr Binet dieselbe Auflösung in T. II. p. 248. des nämlichen Journals gegeben habe, zu dieser Auflösung aber auf weniger einfachem Wege gelangt sei.

Man kann die n Grössen $A, B, C, \ldots$ als die n Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x}{U-a}+\frac{y}{U-b}+\frac{z}{U-c}+\ldots=1,$$

welche in Bezug auf U als unbekannte Grösse offenbar vom $n$ten Grade ist, betrachten. Setzen wir nun

$$U-a=-V,\quad U=a-V,\quad V=a-U;$$

so wird vorstehende Gleichung:

$$1+\frac{x}{V}+\frac{y}{V+b-a}+\frac{z}{V+c-a}+\ldots=0,$$

eine Gleichung des $n$ten Grades in Bezug auf V als unbekannte Grösse, deren Wurzeln

$$a-A,\quad a-B,\quad a-C,\ldots$$

sind. Schaffen wir nun in dieser Gleichung die Brüche weg, um sie auf die Form $V^n+\ldots=0$ zu bringen, so ist das von V unabhängige Glied offenbar:

$$x(b-a)(c-a)(d-a)\ldots,$$

und da nun

$$(a-A)(a-B)(a-C)\ldots$$

das Product aller Wurzeln dieser Gleichung des $n$ten Grades ist, so ist nach einem bekannten Satze von den Gleichungen:

$$(-1)^n(a-A)(a-B)(a-C)\ldots=x(b-a)(c-a)(d-a)\ldots,$$

$$x = (-1)^p \frac{(a-A)(a-B)(a-C)\ldots}{(b-a)(c-a)(d-a)\ldots}$$

, oder, wie sogleich erhellet:

$$x = (-1)^p \frac{(a-A)(a-B)(a-C)\ldots}{(-1)^{p-1}(a-b)(a-c)(a-d)\ldots},$$

also

$$x = -\frac{(a-A)(a-B)(a-C)\ldots}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots}.$$

Ganz auf ähnliche Art findet man y, z,...., und erhält also:

$$x = -\frac{(a-A)(a-B)(a-C)\ldots}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots},$$

$$y = -\frac{(b-A)(b-B)(b-C)\ldots}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots},$$

$$z = -\frac{(c-A)(c-B)(c-C)\ldots}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots},$$

u. s. w.

Herr Liouville bemerkt noch, dass auch Herr Chelini in Rom auf demselben Wege zu diesen Ausdrücken gelangt sei.

Bezeichnet man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch a, seine beiden Katheten durch b, c, seinen Flächeninhalt durch Δ, so ist $\Delta = \frac{1}{2}bc$. Bezeichnet nun ferner p den halben Umfang dieses Dreiecks, ist also $a+b+c=2p$, so ist $b+c=2p-a$, also $(b+c)^2=(2p-a)^2$, folglich $2bc=(2p-a)^2-(b^2+c^2)$ $=(2p-a)^2-a^2=(2p-a+a)(2p-a-a)=4p(p-a)$, $\Delta=\frac{1}{2}bc$ $=p(p-a)$. Also ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks gleich seinem halben Umfange mal seinem halben Umfange weniger der Hypotenuse.

Es ist

$$x^{2n} - 2x^n y^n \cos 2n\alpha + y^{2n} = (Ax^n - By^n)(Bx^n - Ay^n)$$

für

$$A = \cos n\alpha + \sin n\alpha\sqrt{-1},$$

$$B = \cos n\alpha - \sin n\alpha\sqrt{-1}.$$

(Leonhardi Euleri Opuscula analytica. T. I. Petrop. 1783. p. 363.)

Durch den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xyz sei eine Ebene gelegt, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

sein mag. Die Gleichungen der Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Ebenen der xz und yz sind respective

$$Ax + Cz = 0 \quad \text{und} \quad By + Cz = 0.$$

Bezeichnen wir nun den in gewöhnlicher Weise genommenen Winkel, welchen die Durchschnittslinie mit der Ebene der xz mit dem positiven Theile der Axe der x einschliesst, durch i; den in gewöhnlicher Weise genommenen Winkel, welchen die Durchschnittslinie mit der Ebene der yz mit dem positiven Theile der Axe der y einschliesst, durch i_1; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\tang i = -\frac{A}{C}, \quad \tang i_1 = -\frac{B}{C}.$$

Bezeichnet nun ferner J den Neigungswinkel der durch den Anfang der Coordinaten gelegten Ebene gegen die Ebene der xy, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich:

$$\cos J^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} \text{ *)},$$

also

$$\sin J^2 = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

und folglich

$$\tang J^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2} = \left(\frac{A}{C}\right)^2 + \left(\frac{B}{C}\right)^2.$$

Dies, mit dem Obigen verglichen, giebt die Relation:

$$\tang J^2 = \tang i^2 + \tang i_1^2.$$

Die Gleichung des sechsten Grades:

$$x^6 - 6x^4 + ax^3 + 9x^2 - 3ax + b = 0$$

kann auf folgende Art geschrieben werden:

*) M. s. meine Elemente der analytischen Geometrie. I. Leipzig. 1838. S. 218. G.

$$(x^6-6x^4+9x^2)+ax^3-3ax+b=0,$$

also auf folgende Art:

$$\{x(x^2-3)\}^2+a\{x(x^2-3)\}+b=0.$$

Setzt man nun

$$x(x^2-3)=y,$$

so wird unsere Gleichung:

$$y^2+ay+b=0,$$

welche Gleichung vom zweiten Grade ist. Bestimmt man nun y mittelst dieser Gleichung, so wird x mittelst der Gleichung des dritten Grades

$$x(x^2-3)=y \quad \text{oder} \quad x^3-3x-y=0,$$

in welcher das zweite Glied fehlt, bestimmt. Daher kann man die gegebene Gleichung des sechsten Grades immer mittelst einer Gleichung des zweiten, und einer Gleichung des dritten Grades auflösen.

(Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XI. 1852. p. 48.)

Auflösung der Gleichung $x^2+y^2=z^2$ in positiven ganzen Zahlen.

(M. s. Nouvelles Annales de Mathématiques. T. XI. 1852. p. 21.)

Man setze

$$x=u+v, \quad y=u+w, \quad z=u+v+w;$$

führt man diese Werthe von x, y, z in die Gleichung

$$x^2+y^2=z^2$$

ein, so wird dieselbe:

$$(u+v)^2+(u+w)^2=(u+v+w)^2,$$

$$2u^2+2u(v+w)+v^2+w^2=u^2+2u(v+w)+2vw+v^2+w^2,$$

$$u^2=2vw.$$

Weil das Quadrat einer ungeraden Zahl, wie sich leicht zeigen lässt, immer auch eine ungerade Zahl ist, so braucht man für

u nur beliebige gerade Zahlen zu setzen, und u^2, was wieder gerade ist, in zwei Factoren zu zerlegen, von denen der eine immer gerade sein wird, da das Product zweier ungeraden Zahlen immer wieder eine ungerade Zahl ist. Die Hälfte dieses geraden Factors und der andere Factor sind respective die Werthe von v und w; und da man auch u kennt, so kennt man auch x, y, z, indem nach dem Obigen

$$x=u+v,\quad y=u+w,\quad z=u+v+w$$

ist.

Man setze z. B. $u=14$, so ist $u^2=196$; und weil nun

$$196=4.49$$

ist, so ist

$$v=2,\quad w=49;$$

also

$$x=u+v=16,$$
$$y=u+w=63,$$
$$z=u+v+w=65.$$

In der That ist

$$16^2+63^2=65^2,$$

wie verlangt wurde.

Setzt man $u=6$, so ist

$$u^2=36=2.18=4.9;$$

also kann man

$$v=1,\quad w=18 \text{ oder } v=2,\quad w=9$$

setzen. Im ersten Falle ist

$$x=u+v=7,$$
$$y=u+w=24,$$
$$z=u+v+w=25;$$

und wirklich

$$7^2+24^2=25^2.$$

Im zweiten Falle ist

$$x=u+v=8,$$
$$y=u+w=15,$$
$$z=u+v+w=17;$$

und wirklich

$$8^2+15^2=17^2.$$

Setzt man $u=2$, so ist

$$u^2=4=2.2,$$

also $v=1$, $w=2$; folglich

$$x=u+v=3,$$
$$y=u+w=4,$$
$$z=u+v+w=5;$$

und wirklich

$$3^2+4^2=5^2.$$

Beweis der Formeln für $\sin(a\pm b)$ und $\cos(a\pm b)$.

Von Herrn Dr. Kösters in Aachen.

Man drücke den Inhalt des Dreiecks abc (Taf. III. Fig. verschieden aus. Es ist, wenn $bd\perp ac$ und $ce\perp ab$ und $ag\perp bc$ ist

1) $ac.bd=ab.ec=ae.ec+be.ec$, also

$$\frac{bd}{bc}=\frac{ae}{ac}\cdot\frac{ec}{bc}+\frac{be}{bc}\cdot\frac{ec}{ac},$$

oder

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$$

2) $ac.bd=(bg-gc).ag=ag.bg-ag.gc$,

$$\frac{bd}{ab}=\frac{ag.bg}{ac.ab}-\frac{ag.gc}{ab.ac},$$

oder

$$\sin(c-b)=\sin c\cos b-\cos c\sin b.$$

3) $ec^2=ae.eb-ca.cd$, folglich

$$\frac{cd}{cb}=\frac{ae.eb}{ca.cb}-\frac{ec.ec}{cb.ca},$$

oder

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

4) $bd^2 = be.ba - dc.da$, folglich

$$\frac{be}{bc} = \frac{bd.bd}{ab.bc} + \frac{dc.da}{ab.bc}$$

oder

$$\cos(c-a) = \sin a \sin c + \cos a \cos c.$$

Zur Lehre von der Wurfbewegung.

Von dem Herausgeber.

Da bei der Wurfbewegung im leeren Raume die Aufgabe:

Den Winkel zu finden, unter welchem der schwere Punkt geworfen werden muss, wenn ein gegebener Punkt getroffen werden soll;

nicht immer mit der nöthigen Bestimmtheit und Strenge aufgelöst wird, so will ich für diese Aufgabe hier, als Anhang zu der Abhandlung Thl. XXI. Nr. XXXI., in der Kürze die Auflösung geben.

Wenn der Anfangspunkt der Bewegung als Anfang der Coordinaten angenommen wird und die Coordinaten des gegebenen Punktes durch x, y bezeichnet werden, so haben wir nach Thl. XXI. S. 446. 5) in den dortigen Zeichen die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} x = Vt\cos i, \\ y = (V\sin i - Gt)t; \end{cases}$$

bei denen man zu bemerken hat, dass der positive Theil der Axe der y der constanten Richtung der Kraft $2G$ parallel, aber entgegengesetzt ist, und der Winkel i von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° gezählt wird. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ist nun der Winkel i zu bestimmen, nämlich so, dass derselbe diesen beiden Gleichungen zugleich genügt.

Eliminirt man aus unsern beiden Gleichungen t, so erhält man die Gleichung

$$y = x\tan i - \frac{Gx^2}{V^2\cos i^2},$$

also

$$y = x\tan i - \frac{Gx^2}{V^2}(1 + \tan i^2),$$

folglich

$$\tang i^2 - \frac{V^2}{Gx} \tang i = -\frac{Gx^2 + V^2 y}{Gx^2}.$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf tang i als unbekannte Grösse auf, so erhält man:

$$2)\quad \tang i = \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}}{2Gx},$$

wo nun die folgenden Fälle zu unterscheiden sind, indem wir, was offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, x als positiv annehmen.

Wenn

$$V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y) < 0$$

ist, so ist die Aufgabe unmöglich.

Wenn

$$V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y) = 0$$

ist, so ist

$$\tang i = \frac{V^2}{2Gx},$$

und folglich tang i eine positive Grösse. Daher giebt es für i zwei Werthe, den einen zwischen 0 und 90°, den anderen zwischen 180° und 270°. Wollte man aber i zwischen 180° und 270° nehmen, so wäre cos i negativ, also die erste der beiden zu erfüllenden Gleichungen 1), nämlich die Gleichung

$$x = Vt \cos i,$$

offenbar nicht erfüllt, weil x positiv ist. Daher muss man i zwischen 0 und 90° nehmen, und es giebt also in diesem Falle nur eine in den Ausdrücken

$$3)\quad \tang i = \frac{V^2}{2Gx},\quad 0 < i < 90^0$$

enthaltene Auflösung unserer Aufgabe.

Wenn

$$V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y) > 0$$

ist, so hat man zuvörderst zu bemerken, dass das Product

$$\{V^2 + \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}\}\{V^2 - \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}\}$$
$$= 4G(Gx^2 + V^2 y)$$

ist.

... zuerst $Gx^2 + V^2y < 0$, so haben die beiden Werthe, ... Formel

$$\tang i = \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx}$$

liefert, entgegengesetzte Vorzeichen; und da nun das ...ichen offenbar einen positiven Werth liefert, so liefert ...re Zeichen einen negativen Werth. Setzen wir also

$$\tang i = \frac{V^2 + \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx},$$

zwei Werthe, den einen zwischen 0 und 90°, den an... ...ischen 180° und 270°; wollte man aber den letzteren neh... ... wäre $\cos i$ negativ, da doch $\cos i$ wegen der ersten der ...gen 1) positiv sein muss. Man muss also

$$\tang i = \frac{V^2 + \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx}, \quad 0 < i < 90^\circ$$

Setzen wir ferner

$$\tang i = \frac{V^2 - \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx},$$

... wieder zwei Werthe, den einen zwischen 90° und 180°, ...ren zwischen 270° und 360°; wollte man aber den erste... ...men, so wäre $\cos i$ negativ, da doch $\cos i$ wegen der ersten ...eichungen 1) positiv sein muss. Man muss also

$$\tang i = \frac{V^2 - \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx}, \quad 270^\circ < i < 360^\circ$$

... Daher lässt im vorliegenden Falle unsere Aufgabe zwei ... Ausdrücken:

$$\left\{\begin{array}{l} \tang i = \dfrac{V^2 + \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx}, \quad 0 < i < 90^\circ; \\[2ex] \tang i = \dfrac{V^2 - \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2y)}}{2Gx}, \quad 270^\circ < i < 360^\circ; \end{array}\right.$$

...ltene Auflösungen zu.

...t ferner

$$Gx^2 + V^2y = 0,$$

... nach dem Obigen

$$\tang i = \frac{V^2}{Gx} \text{ oder } \tang i = 0.$$

[illegible]

$$\tang i = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

so hat i zwei Werthe, den einen zwischen 0 und 90°, den anderen zwischen 180° und 270°; da aber für den letzteren cos i negativ [illegible], so muss man

$$\tang i = \frac{[illegible]}{[illegible]}, \quad 0 < i < 90°$$

[illegible] setzt man

$$\tang i = 0,$$

so ist entweder $i = 0$ oder $i = 180°$; da aber für den letzteren Werth cos i negativ ist, so muss man $i = 0$, d. h. $i = 0$ setzen, was mit [illegible] auf Dasselbe hinaus kommt. Also lässt im vorliegenden Falle unsere Aufgabe zwei in den Ausdrücken

$$5) \begin{cases} \tang i = \frac{[illegible]}{[illegible]}, & 0 < i < 90° \\ i = 0 \end{cases}$$

enthaltene Auflösungen zu.

Ist endlich

$$Gx^2 + V^2 y > 0,$$

so haben die beiden Werthe, welche die Formel

$$\tang i = \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}}{2Gx}$$

für tang i liefert, nach dem Obigen gleiche Vorzeichen, und sind also, da das obere Zeichen augenscheinlich einen positiven Werth liefert, beide positiv. Setzt man also

$$\tang i = \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}}{2Gx},$$

so hat i zwei Werthe, den einen zwischen 0 und 90°, den anderen zwischen 180° und 270°; wollte man aber den letzteren nehmen, so wäre cos i negativ, da doch cos i wegen der ersten der Gleichungen 1) positiv sein muss. Man muss also

$$6) \quad \tang i = \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - 4G(Gx^2 + V^2 y)}}{2Gx}, \quad 0 < i < 90°$$

setzen.

In übersichtlicher Darstellung haben wir daher die folgende Auflösung unserer Aufgabe:

$$\text{I.}\quad V^4-4G(Gx^2+V^2y)<0.$$

Die Aufgabe lässt gar keine Auflösung zu.

$$\text{II.}\quad V^4-4G(Gx^2+V^2y)=0.$$

Die Aufgabe lässt eine in den Ausdrücken

$$\tang i=\frac{V^2}{2Gx},\quad 0<i<90^0$$

enthaltene Auflösung zu.

$$\text{III.}\quad V^4-4G(Gx^2+V^2y)>0.$$

$$1.\quad Gx^2+V^2y<0.$$

Die Aufgabe lässt zwei in den Ausdrücken

$$\tang i=\frac{V^2+\sqrt{V^4-4G(Gx^2+V^2y)}}{2Gx},\quad 0<i<90^0;$$

$$\tang i=\frac{V^2-\sqrt{V^4-4G(Gx^2+V^2y)}}{2Gx},\quad 270^0<i<360^0.$$

enthaltene Auflösungen zu.

$$2.\quad Gx^2+V^2y=0.$$

Die Aufgabe lässt zwei in den Ausdrücken

$$\tang i=\frac{V^2}{Gx},\quad 0<i<90^0;$$

$$i=0$$

enthaltene Auflösungen zu.

$$3.\quad Gx^2+V^2y>0.$$

Die Aufgabe lässt zwei in den Ausdrücken

$$\tang i=\frac{V^2+\sqrt{V^4-4G(Gx^2+V^2y)}}{2Gx},\quad 0<i<90^0;$$

$$\tang i=\frac{V^2-\sqrt{V^4-4G(Gx^2+V^2y)}}{2Gx},\quad 0<i<90^0$$

enthaltene Auflösungen zu.

Die Bedingung

$$V^4-4G(Gx^2+V^2y)\lesseqgtr 0$$

kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$V^4 \gtreqless 4G(Gx^2 + V^2 y),$$

$$V^4 + 4G^2y^2 \gtreqless 4G^2(x^2+y^2) + 4GV^2y,$$

$$V^4 - 4GV^2y + 4G^2y^2 \gtreqless 4G^2(x^2+y^2),$$

$$(V^2 - 2Gy)^2 \gtreqless 4G^2(x^2+y^2),$$

$$\left(\frac{V^2}{2G} - y\right)^2 \gtreqless x^2+y^2.$$

Ist nun

$$\frac{V^2}{2G} > y, \quad V^2 > 2Gy;$$

so wird obige Bedingung:

$$\frac{V^2}{2G} - y \gtreqless \sqrt{x^2+y^2},$$

also

$$\frac{V^2}{2G} \gtreqless y + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ist ferner

$$\frac{V^2}{2G} \overset{=}{<} y, \quad V^2 \overset{=}{<} 2Gy;$$

so wird vorstehende Bedingung:

$$y - \frac{V^2}{2G} \gtreqless \sqrt{x^2+y^2},$$

also

$$\frac{V^2}{2G} \lesseqgtr y - \sqrt{x^2+y^2},$$

wobei man aber zu beachten hat, dass, wenn nur x nicht ve schwindet, $y - \sqrt{x^2+y^2}$ immer negativ ist, also nur

$$\frac{V^2}{2G} > y - \sqrt{x^2+y^2}$$

sein kann.

Weitere Betrachtungen hierüber können füglich dem Lese überlassen werden.

Auflösung der Gleichungen

$$x^2+y^2-1=u^2,$$
$$x^2-y^2-1=v^2$$

in rationalen Zahlen. (Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem et Gerono. T. IX. p. 116.)

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, so erhält man die Gleichung

$$2y^2=u^2-v^2.$$

Setzt man nun $y=pq$, so wird

$$u^2-v^2=(u+v)(u-v)=2p^2q^2.$$

Man kann also

$$u+v=2p^2, \quad u-v=q^2$$

setzen. Aus diesen Gleichungen erhält man

$$u=\frac{2p^2+q^2}{2}, \quad v=\frac{2p^2-q^2}{2}.$$

Führen wir nun die Werthe von y, u, v in die erste der beiden aufzulösenden Gleichungen ein, so wird dieselbe:

$$x^2+p^2q^2-1=\left(\frac{2p^2+q^2}{2}\right)^2,$$

woraus sich

$$x^2=\frac{q^4+4p^4+4}{4}$$

ergiebt. Damit nun x^2 ein vollkommenes Quadrat oder x rational werde, muss $4p^4=2.q^2.2=4q^2$, also $q=p^2$ sein, woraus man

$$x^2=\frac{p^8+4p^4+4}{4}=\left(\frac{p^4+2}{2}\right)^2,$$

also

$$x=\frac{p^4+2}{2}=1+\frac{p^4}{2}$$

erhält; und mittelst des Vorhergehenden erhält man nun leicht überhaupt zur Bestimmung von x, y, u, v die folgenden Formeln:

$$x=1+\frac{p^4}{2}, \quad y=p^3, \quad u=p^2+\frac{p^4}{2}, \quad v=p^2-\frac{p^4}{2}.$$

Jeder rationale Werth von p liefert rationale Werthe von x, y, u, v. Wollte man für diese unbekannten Grössen ganze rationale Werthe haben, so müsste man für p nur gerade Zahlen setzen.

Von Herrn Professor Fr. Hofmann zu Bayreuth.

Es ist mir unbekannt, ob folgende Art der Kubikwurzel-Ausziehung, zu der ich durch die Lectüre von Francoeur, cours complet de mathématiques pures veranlasst wurde, weit verbreitet ist?

Es sei $a_1 = a + b$,

$$\begin{aligned} a_1^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b \\ &= a^3 + sb \text{ wenn } s = 3a^2 + 3ab + b^2. \end{aligned}$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + b_1, \\ a_2^3 &= a_1^3 + s_1 b_1 \text{ wenn } s_1 = 3a_1^2 + 3a_1 b_1 + b_1^2. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} 3a_1^2 &= 3a^2 + 6ab + 3b^2 \\ &= (3a^2 + 3ab + b^2) + 3ab + b^2 + b^2 \\ &= s + 3ab + b^2 + b^2 \\ &= 3ab + b^2 + s + b^2. \end{aligned}$$

Daher kann das zur Berechnung des zweiten Theils erforderliche $3a_1^2$ jedesmal durch einfache Addition der vier nach folgendem Schema schon unter einander stehenden Grössen gefunden werden:

$$\begin{array}{l} a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 \\ a + b \end{array}$$

$$\sqrt[3]{677299009990} = 8782$$

$$\begin{array}{rrl} a^3 = & 512 & \\ & 165299 & \\ sb = & 146503 & \\ & 18796009 & \\ s_1 b_1 = & 18333152 & \\ & 462857990 & \\ s_2 b_2 = & 462635768 & \\ & 222222 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} 3a^2 = & 192 & \\ 3ab = & 168 & \text{addirt} \\ b^2 = & 49 & \\ s = & 20929 & \\ b^2 = & 49 & \\ 3a_1^2 = & 22707 & \\ 3a_1 b_1 = & 2088 & \text{addirt} \\ b_1^2 = & 64 & \\ s_1 = & 2291644 & \\ b_1^2 = & 64 & \\ 3a_2^2 = & 2312652 & \\ 3a_2 b_2 = & 5268 & \\ b_2^2 = & 4 & \\ s_2 = & 231317884 & \end{array}$$

XVIII.

Einige geometrische Constructionen zu der Lehre von den elliptischen Functionen.

Von

Herrn *Essen*,

Lehrer am Gymnasium zu Stargard.

---

1) Verhulst hat vorgeschlagen, die elliptischen Functionen durch Sectoren zu versinnlichen, und diese Idee ist wohl im Allgemeinen eine glückliche zu nennen. Jedoch scheint es mir zweckmässiger, statt der von ihm gewählten Form

$$\varrho^2 = \frac{2}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}}$$

lieber die folgende zu nehmen:

$$\varrho^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2 \sin\frac{v^2}{2}}},$$

welche leicht zu construiren ist. Man schlage um C einen Kreis mit dem Radius Eins, ziehe einen beliebigen Durchmesser AB (Taf. IV. Fig. 1.) und nehme dann zwischen B und C den Punkt H so, dass, wenn die Entfernung CH durch a bezeichnet wird, man habe:

$$\frac{4a}{(1+a)^2} = c^2,$$

während $c < 1$ vorgestellt wird. Hieraus folgt

$$a = \frac{1-b}{1+b} \text{ und } b = \frac{1-a}{1+a},$$

indem der Kürze wegen b für $\sqrt{1-c^2}$ gesetzt ist. Zieht man nun durch H eine beliebige Sehne DE und bezeichnet den Bogen AD durch v, so ist

$$\overline{HD}^2 = 1 + a^2 + 2a.\cos v,\quad HD = (1+a)\sqrt{1 - c^2 \sin\frac{v^2}{2}}.$$

Nun aber hat man

$$HD \times HE = AH \times BH = (1+a)(1-a),$$

folglich, wenn man $HE = x$ setzt,

$$x = \frac{1-a}{\sqrt{1 - c^2 \sin\frac{v^2}{2}}},$$

so dass man erhält:

$$\varrho^2 = \frac{x}{1-a} = \frac{1+b}{2b}.x.$$

Sieht man also die in Rede stehende Gleichung als Polargleichung einer Curve, C als den Pol an; so zeigt die vorstehende Gleichung, wie diese Curve mittelst einer Parabel construirt werden kann. Setzt man $v = AD = 2\varphi$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\varrho^2 d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}},$$

$$\text{sector}(AD) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}} = \mathrm{F}(\varphi);$$

während die Bedeutung der Bezeichnung sector(AD) nicht zweifelhaft sein kann. Der Winkel $\frac{v}{2} = \varphi$, welcher dem Winkel DBA gleich ist, heisst die Amplitude.

2) Die Chordale oder Potenzenlinie zweier Kreise hat bekanntlich die Eigenschaft, dass, wenn man von einem Punkte derselben zuerst eine Tangente an den einen Kreis und eine zweite an den andern Kreis zieht, diese beiden Tangenten, vom gegenseitigen Durchschnittspunkt bis zum Berührungspunkt gerechnet, gleiche Länge haben. Sohncke hat in einer Note zu seinen Vorlesungen über analytische Geometrie gezeigt, wie an die Betrachtung dieser Chordale die Theorie der elliptischen Functionen angeschlossen werden kann, und es soll versucht werden, diese

Idee weiter zu verfolgen, in der Hoffnung, zur Veranschaulichung mancher Punkte Etwas beizutragen.

Es sei um C (Taf. IV. Fig. 2.) ein Kreis mit dem Halbmesser Eins beschrieben, darauf in der Verlängerung von AB der Punkt N so genommen, dass man habe:

$$1+D=\frac{2}{c^2},\quad c<1;$$

indem D die Entfernung CN bedeutet. Soll ein zweiter Kreis construirt werden, der eine Secante des gegebenen Kreises PQ tangirt und dabei die durch N senkrecht auf AN gezogene Linie LM mit dem gegebenen Kreise zur Chordale hat: so darf man nur vom Durchschnittspunkt R der ins Unbestimmte verlängerten PQ mit LM die Tangente RF an den gegebenen Kreis ziehen und darauf RF von R aus nach beiden Seiten auf die Gerade PQ bis H und H' auftragen. Errichtet man sodann in H und H' Lothe, so sind die Durchschnittspunkte J und J' mit der Richtung AN Mittelpunkte von Kreisen, welche der Aufgabe genügen. Man sieht, dass es zwei solche Kreise giebt, von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb des gegebenen Kreises liegt. Bezeichnet man die Entfernungen CJ und CJ' bezüglich durch a_1 und a_2, die Radien HJ und $H'J'$ durch r_1 und r_2, die Längen NJ und NJ' durch d_1 und d_2, so hat man wegen der Gleichheit der von N an alle drei Kreise gezogenen Tangenten:

$$d_1^2-r_1^2=d_2^2-r_2^2=D^2-1.$$

Dabei ist $d_1=D-a_1$, $d_2=-(D-a_2)$, folglich wird

$$D=\frac{1+a_1^2-r_1^2}{2a_1}=\frac{1+a_2^2-r_2^2}{2a_2},$$

$$1+D=\frac{2}{c^2}=\frac{(1+a_1)^2-r_1^2}{2a_1}=\frac{(1+a_2)^2-r_2^2}{2a_2},$$

woraus man sieht, dass die Ausdrücke

$$\frac{4a_1}{(1+a_1)^2-r_1^2}=\frac{4a_2}{(1+a_2)^2-r_2^2}$$

einen unveränderlichen Werth $=c^2$ behalten, wie man auch die Secante PQ ziehen mag: nur darf dieselbe nicht mit LM parallel sein.

3) Es seien C und C' (Taf. IV. Fig. 3.) die Mittelpunkte zweier Kreise, die Radien dieser Kreise bezüglich $=$Eins und $=r$, und zwar $1+r<CC'$. Ferner sei die Linie LM, welche die Centrale

CC' in N schneidet, die Chordale beider Kreise, und endlich finde noch, wenn die Entfernung CN durch D, die Centrale CC' durch a bezeichnet wird, die folgende Gleichung Statt:

$$1+D=\frac{(1+a)^2-r^2}{2a}=\frac{2}{c^2}.$$

Werden nun zwei Tangenten an den Kreis um C' gezogen, die zugleich Secanten des Kreises um C sind, so hat man, wenn F den Durchschnittspunkt beider Tangenten, A_0, A_1, A_2, A_3 die Durchschnitte derselben mit der Kreislinie um C bezeichnen, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke FA_2A_3 und FA_0A_1 die nachstehende Proportion:

$$\frac{A_2A_3}{A_0A_1}=\frac{FA_2}{FA_0}.$$

Geht man nun zur Grenze über, indem man sich die Tangente FA_0 mehr und mehr der FA_1 nähern lässt, so hat man, wofern man den Bogen A_0A_1, um ihn von der Sehne zu unterscheiden, durch (A_0A_1) bezeichnet:

$$\text{limes}\left[\frac{(A_0A_1)}{A_0A_1}\right]=1,\quad \text{limes}\left[\frac{(A_2A_3)}{A_2A_3}\right]=1;$$

folglich auch

$$\text{limes}\left[\frac{(A_0A_1)\times A_2A_3}{(A_2A_3)\times A_0A_1}\right]=1,$$

woraus man schliessen kann:

$$\text{limes}\frac{A_0A_1}{A_2A_3}=\text{limes}\frac{(A_0A_1)}{(A_2A_3)}=-\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}.$$

Zu dem letzten Ausdruck gelangt man, indem man (AA_1) und (AA_2) bezüglich $=2\varphi_1$ und $=2\varphi_2$ setzt. Bezeichnet man durch G den Berührungspunkt der Tangente FA_1, so nähert sich augenscheinlich das Verhältniss

$$\frac{FA_0}{FA_2}\text{ immer mehr der Grösse }\frac{GA_1}{GA_2}.$$

Nun aber ist

$$\overline{GA_1}^2=\overline{C'A_1}^2-\overline{GC'}^2$$

$$=\overline{CC'}^2+\overline{A_1C}^2+2CC'.A_1C.\cos 2\varphi_1-\overline{GC'}^2=1+a^2-r^2+2a\cos 2\varphi_1,$$

$$\overline{GA_2}^2=1+a^2-r^2+2a\cos 2\varphi_2;$$

folglich erhält man

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = -\frac{\sqrt{1-c^2\sin\varphi_1^2}}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi_2^2}}, \quad \frac{d\varphi_1}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi_1^2}} = -\frac{d\varphi_2}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi_2^2}}.$$

Dies lässt sich auf folgende Weise in Worte fassen: Die unendlich kleinen Sectoren der durch die Polargleichung

$$\varrho^2 = \frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin\frac{v^2}{2}}}$$

gegebenen Curve, welche zu den Bogen A_0A_1 und A_2A_3 gehören, haben gleichen Flächeninhalt.

Denkt man sich nun die Linien FA_0 und FA_1 nicht mehr unendlich nahe an einander, sondern in beliebige endliche Entfernung von einander gerückt, so behaupte ich dennoch, dass man immer haben werde:

$$\text{sect}(A_0A_1) = \text{sect}(A_2A_3).$$

Denn man darf nur den Bogen A_0A_1 in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilt denken und von allen Theilpunkten Tangenten an den Kreis um C' ziehen. Dann wird der Bogen A_2A_3 in eben so viele unendlich kleine Stücke zerschnitten, und es gehört zu jedem Bogenelement in dem einen und zu dem entsprechenden in dem andern System ein gleicher Sector. Nun aber ist

$$\text{sector}(A_2A_3) = \text{sector}(AA_3) - \text{sector}(AA_2);$$

folglich, wenn man A_0 mit A zusammenfallen lässt,

$$\mathrm{F}(\varphi_3) - \mathrm{F}(\varphi_2) = \mathrm{F}(\varphi_1).$$

Dass sich dasselbe durch Integration der obigen Differentialgleichung nachweisen lässt, darf wohl nicht bemerkt werden. Lässt man die beiden Punkte A_1 und A_3 in einem einzigen A' zusammenfallen, so wird $A'F$ die gemeinsame Tangente beider Kreise; dann ist

$$\text{sect}(A_0A') = \text{sect}(A'A_3),$$

folglich

$$\text{sector}(A_0A_3) = 2\,\text{sector}(A_0A'),$$

und für $\varphi_0 = 0$:

$$\mathrm{F}(\varphi_3) = 2\mathrm{F}(\varphi').$$

Somit ist also das Problem der Halbirung der elliptischen Func-

tionen der ersten Art gelöst, da man immer, wenn die Ampli[illegible] φ_3 gegeben ist, leicht den Hilfskreis um C' construiren k[illegible] Ist ausser φ_3 noch die kleinere Amplitude φ_2 gegeben, so [illegible] man sogleich die Amplitude φ_1 finden können, welche der [illegible] chung

$$F(\varphi_3) - F(\varphi_2) = F(\varphi_1)$$

Genüge leistet. Uebrigens entnimmt man leicht aus der Figur nachstehenden Relationen:

$$A_1 A_2 = A_1 G - A_2 G,$$

woraus man ableitet:

$$\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}}.$$

Ebenso ist dann

$$\frac{\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_3}{\sin(\varphi_3 - \varphi_0)} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}};$$

folglich wird, wenn man $\varphi_0 = 0$ setzt:

$$\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{1 - \Delta\varphi_3}{\sin\varphi_3}.$$

Ferner hat man, wenn CH ein Loth auf GA_1 ist,

$$GH = \frac{GA_1 + GA_2}{2},$$

also

$$\frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{2a}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}},$$

und daher auch

$$\frac{\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_3}{\sin(\varphi_0 + \varphi_3)} = \frac{2a}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}},$$

und für $\varphi_0 = 0$:

$$\frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \frac{1 + \Delta\varphi_3}{\sin\varphi_3}.$$

Endlich ist

$$C'G = CH - CC'.\cos(C'CH),$$

d. h.

$$r = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + a\cos(\varphi_2 + \varphi_1),$$

und ebenso

$$r = \cos(\varphi_3 - \varphi_0) + a\cos(\varphi_3 + \varphi_0),$$

so dass man, indem man $\varphi_0 = 0$ setzt, erhält:

$$\cos\varphi_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \frac{a-1}{a+1}.\sin\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Nun aber ist für $\varphi_0 = 0$:

$$\frac{1+\varDelta\varphi_3}{\sin\varphi_3} = \frac{2a}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}}, \quad \frac{1-\varDelta\varphi_3}{\sin\varphi_3} = \frac{2}{\sqrt{(1+a)^2 - r^2}};$$

also

$$\varDelta\varphi_3 = \frac{a-1}{a+1};$$

und so kommt schliesslich:

$$\cos\varphi_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \varDelta\varphi_3.$$

4) Sind die Amplituden φ_1 und φ_2 gegeben, und soll man dazu φ_3 finden, so dass

$$F(\varphi_3) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$$

wird, so muss man die Sehne AA_2 ziehen und nach §. 2. denjenigen Kreis construiren, der diese Sehne tangirt und innerhalb des Kreises um C liegt. Ich will mich nicht weiter bei diesem Punkte aufhalten und verweise darüber auf Sohncke. Nur denjenigen Fall will ich hier näher in's Auge fassen, wo $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi_3 = 2\varphi_2 = \pi$ wird, wo dann die Sehne AA_2 mit dem Durchmesser AB zusammenfällt. Dann fällt auch (Taf. IV. Fig. 2.) H mit J zusammen und es wird, wenn $CH = a$ gesetzt wird:

$$c^2 = \frac{4a}{(1+a)^2}, \quad a = \frac{1-b}{1+b}.$$

Dabei hat man, wenn man in Taf. IV. Fig. 1. noch die Sehne $D'E'$ zieht, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DHD' und EHE':

$$\frac{DD'}{EE'} = \frac{HD}{HE'},$$

woraus man, indem man Bogen $AD = 2\varphi$ und Bogen $ADE = 2\varphi'$ setzt, leicht folgert:

$$\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = \frac{d\varphi'}{\varDelta\varphi'}, \quad \text{sect}(AD) = \text{sect}(BE),$$

$$F(\varphi') = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F(\varphi).$$

Setzt man Bogen $BE=2\psi$, also $\psi=\varphi'-\frac{\pi}{2}$, so wird die obige Differentialgleichung:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\cos\psi^2}};$$

folglich, wenn man integrirt und bedenkt, dass φ und ψ zugleich der Null gleich werden:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin\varphi^2}}=\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\cos\psi^2}}.$$

Dabei ist, wie leicht erhellt:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\operatorname{tang}\psi}{b}.$$

Denn zieht man die Linien AE und BE, so ist zuerst im Dreieck AEH:

$$AH:EH=\sin E:\sin H=\sin\varphi:\sin\psi,$$

sodann im Dreieck BEH:

$$EH:BH=\sin B:\sin E=\cos\varphi:\cos\psi;$$

folglich

$$AH:BH \text{ oder } (1+a):(1-a)=\operatorname{tang}\varphi:\operatorname{tang}\psi.$$

Schneidet man nun von B aus nach derjenigen Seite hin, auf welcher D liegt, den Bogen $BF=BE$ ab, so hat man, weil die durch die Gleichung

$$\varrho^2=\frac{1}{\sqrt{1-c^2\sin\frac{v^2}{2}}}$$

gegebene Curve in Bezug auf die Axe AB vollkommen symmetrisch ist, offenbar

$$\text{sector}(BF)=\text{sector}(BE)=\text{sector}(AD);$$

folglich, wenn man Bogen $AF=2\vartheta$ setzt:

$$\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{F}(\vartheta)+\mathrm{F}(\varphi),$$

da ja $\text{sector}(BF)=\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\mathrm{F}(\vartheta)$ ist. Die beiden Functionen $\mathrm{F}(\vartheta)$ und $\mathrm{F}(\varphi)$ heissen alsdann bekanntlich Complemente von einander. Wird DE rechtwinklig auf AB, so fallen F und D zusammen und man erhält:

$$F(\varphi)=\tfrac{1}{3}F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Wird c, also auch a, $=0$, so ist $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ und $F(\varphi)=\frac{\pi}{4}$, und man hat alsdann die bekannte Construction, nach welcher die Kreislinie durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche Theile getheilt wird.

Soll $F(\varphi)=\frac{1}{3}F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ werden, so muss man haben:

$$F(\vartheta)=2F(\varphi),\quad F(\varphi)=F(\vartheta)-F(\varphi),$$

also bekanntlich

$$\cos\varphi=\cos\vartheta.\cos\varphi+\sin\vartheta.\sin\varphi.\Delta\varphi.$$

Nun aber ist, wie auch leicht aus der Figur erhellt:

$$\sin\vartheta=\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi};$$

folglich erhält man, wenn man obige Gleichung durch $\Delta\varphi$ dividirt,

$$\sin\vartheta=\cos\vartheta.\sin\vartheta+\sin\vartheta.\sin\varphi,$$

d. h.

$$\sin\varphi+\cos\vartheta=1.$$

Zieht man die Sehnen AD und BE, so ist

$$\frac{AD}{2}=\sin\varphi,\quad \frac{BE}{2}=\sin\psi=\cos\vartheta;$$

also wird

$$AD+BE=2.$$

Gelänge es daher, die Dreiecke ADH und BEH so zu construiren, dass dieser Gleichung Genüge geleistet wird, so würde das Problem der Trisection der Grösse $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ durch Construction gelöst sein. Doch nur in dem einen Falle ist dies leicht auszuführen, wenn $a=0$ sein sollte. Alsdann bestimmt nämlich ein über AC errichtetes gleichseitiges Dreieck die Amplitude φ, wie dies hinreichend aus der Elementargeometrie bekannt ist.

5) Zieht man (Taf. IV. Fig. 1.) CS und CS' bezüglich mit HD und HD' parallel, so hat man, da im Dreiecke HDD'

$$\frac{DD'}{\sin(DHD')}=\frac{HD'}{\sin(D'DH)}$$

ist, und da der Bogen, welcher den Winkel DHD' misst, dem Bogen SS' gleich ist, auch

$$\frac{DD'}{\sin(SS')} = \frac{HD'}{\sin(D'DH)}.$$

Geht man zur Grenze über, so erhält man, indem man Bogen $AD = 2\varphi$, Bogen $AS = \mu$ setzt, leicht

$$\text{limes}\,\frac{DD'}{\sin(SS')} = \text{limes}\,\frac{(DD')}{\sin(SS')} = \frac{2d\varphi}{\sin(d\mu)} = \frac{2d\varphi}{d\mu}.$$

HD' wird gleich $HD = (1+a)\sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}\sin\varphi^2}$; der Winkel $D'DH$ aber wird demjenigen Winkel gleich, welchen die Tangente an D mit DH bildet, der wiederum gleich $\frac{1}{2}DCE$ ist. Das von C auf DH gefällte Loth CG ist $= CH.\sin GHC = a.\sin\mu$, also $\sin\frac{1}{2}DCE = DG = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{CG}^2} = \sqrt{1 - a^2\sin\mu^2}$. Somit wird

$$\frac{2d\varphi}{d\mu} = (1+a)\frac{\sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}\sin\varphi^2}}{\sqrt{1 - a^2\sin\mu^2}}.$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man bedenkt, dass φ und μ gleichzeitig gleich Null werden, so kommt

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - a^2\sin\mu^2}} = \frac{2}{1+a}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}\sin\varphi^2}}.$$

Dabei ist $CG = a.\sin\mu$, andererseits aber auch $= CD.\cos(DCG)$ $= CD.\sin(DCS) = \sin(2\varphi - \mu)$, woraus man folgert:

$$\sin(2\varphi - \mu) = a.\sin\mu.$$

Uebrigens sieht man auf der Stelle, dass, wenn DE senkrecht auf AB, also $F(\varphi) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ wird, der Bogen AS ein Quadrant ist. Ist aber $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder, mit andern Worten, fällt der Punkt D mit B zusammen, so wird $\mu = \pi$.

6) Betrachtet man Taf. IV. Fig. 3., so sieht man sogleich, dass man habe:

$$\Delta FA_0A_1 - \Delta FA_2A_3 = \Delta A_0A_2A_3 + \Delta A_1A_2A_3;$$

folglich

$$FA_0 \times A_0A_1 . \sin(A_1A_0F) - FA_3 \times A_2A_3 . \sin(A_2A_3A_0)$$
$$= A_1A_2 \times A_2A_3 . \sin(A_3A_2F) + A_0A_3 \times A_0A_1 . \sin(A_1A_0A_3).$$

Geht man nach Division durch A_0A_1 wie in §. 3. zur Grenze über, so erhält man unter Benutzung früher gewonnener Resultate:

$$\varDelta\varphi_1 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\varDelta\varphi_2 = -\frac{2\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\sqrt{(1+a)^2-r^2}}\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}-1\right),$$

$$\varDelta\varphi_1 d\varphi_1 + \varDelta\varphi_2 d\varphi_2 = \frac{2d\cos(\varphi_2-\varphi_1)}{\sqrt{(1+a)^2-r^2}}.$$

Nach Integration dieser Gleichung kann man setzen:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\varDelta\varphi d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_2}\varDelta\varphi d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\varDelta\varphi d\varphi - \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\varDelta\varphi d\varphi$$
$$= \frac{2(\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\cos(\varphi_3-\varphi_0))}{\sqrt{(1+a)^2-r^2}} + C,$$

wobei φ_1 und φ_2 als veränderlich, φ_0 und φ_3 als constant angesehen werden. Die unbestimmte Constante C erweist sich sogleich als Null, indem man erwägt, dass, wenn φ_2 in φ_3 übergeht, $\varphi_1 = \varphi_0$ wird. Macht man $\varphi_0 = 0$ und bezeichnet, wie gewöhnlich, $\int_0^{\varphi_1}\varDelta\varphi d\varphi$ durch $\mathrm{E}(\varphi_1)$, so kommt

$$\mathrm{E}(\varphi_3) - \mathrm{E}(\varphi_1) - \mathrm{E}(\varphi_2) = -\frac{2(\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\cos\varphi_3)}{\sqrt{(1+a)^2-r^2}}.$$

Nun aber ist nach §. 3.:

$$\frac{2}{\sqrt{(1+a)^2-r^2}} = \frac{1-\varDelta\varphi_3}{\sin\varphi_3},$$

ferner bekanntlich:

$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1$$

und wiederum nach §. 3.:

$$\cos\varphi_3 = \cos\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_2\sin\varphi_1\varDelta\varphi_3;$$

folglich wird

$$\mathrm{E}(\varphi_3) - \mathrm{E}(\varphi_1) - \mathrm{E}(\varphi_2) = -\frac{(1-\varDelta\varphi_3)(1+\varDelta\varphi_3)}{\sin\varphi_3}\sin\varphi_2 . \sin\varphi_1$$
$$= -c^2\sin\varphi_3 . \sin\varphi_2 . \sin\varphi_1.$$

XIX.

Démonstrations de quelques théorèmes de Géométrie

Par

Nicolas Fuss.

Présenté le 4. Juillet 1799.

Vorerinnerung von dem Herausgeber.

Als ich neulich einige Bände der Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften, die bekanntlich eine wahre Fundgrube wichtiger mathematischer Entdeckungen sind, und nach denen ich immer zu greifen pflege, wenn ich mich wieder einmal nach wahrer mathematischer Eleganz sehne, durchblätterte, stiess ich ganz zufällig im 14. Theile der Nova Acta. p. 139. auf die den obigen Titel tragende Abhandlung von Nicolaus Fuss, einem der trefflichsten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, dessen sämmtliche Arbeiten sich bekanntlich durch ganz besondere Eleganz und Zierlichkeit auszeichnen. Zu meiner Ueberraschung fand ich in dieser Abhandlung, was der ziemlich allgemein gehaltene Titel: Démonstrations de quelques théorèmes de Géométrie, keineswegs vermuthen liess, gleich zu Anfang den Hauptsatz der Lehre von den Transversalen; ferner fand ich den auf diesen Satz gegründeten höchst einfachen Beweis des Satzes, dass die Durchschnittspunkte der, drei Kreise von Aussen berührenden Geraden jederzeit in einer geraden Linie liegen, welchen man jetzt meistens in den geometrischen Lehrbüchern findet, und der gewöhnlich Carnot zugeschrieben wird, welcher ihn in der That auch in seiner Géométrie de Position (Deutsche Uebersetzung von Schumacher. Thl. II. S. 344.) giebt, ohne Fuss's mit einem Worte zu gedenken; und wenn Carnot an dieser Stelle sagt, „dass Monge den Satz aus

bloss geometrischen Betrachtungen, die sich auf die Geometrie dreier Dimensionen beziehen, gefunden habe", so müssen wir jetzt darauf entgegnen, dass unser trefflicher Nicolaus Fuss den Satz auch schon aus Betrachtungen der Geometrie dreier Dimensionen abgeleitet hat *). Sagt aber Carnot in der angeführten Stelle noch, dass Monge den in Rede stehenden Satz aus Betrachtungen der Geometrie dreier Dimensionen „gefunden" habe, was wahrscheinlich auch die Veranlassung gegeben hat, dass die Erfindung des Satzes gegenwärtig wohl allgemein Monge beigelegt wird: so sagt dagegen Fuss in der seiner Abhandlung vorausgeschickten kurzen Einleitung ausdrücklich, dass in Frankreich die Erfindung des Satzes d'Alembert beigelegt werde. Die Abhandlung von Nicolaus Fuss enthält ferner auch noch den, dem so eben besprochenen Satze entsprechenden Satz von den drei Kugeln und ausserdem noch mehrere andere bemerkenswerthe Sätze, überhaupt also schon Vieles von dem, was jetzt unter dem Namen der „neueren Geometrie" zu begreifen gewöhnlich geworden ist, wenigstens Vieles von dem, was zu der neueren Behandlung der Geometrie die nächste Veranlassung gegeben hat. Dass Nicolaus Fuss unter den Bearbeitern der sogenannten neueren Geometrie schon ausdrücklich und in besonders hervorragender Weise genannt worden sei, ist mir nicht bekannt, wenigstens kann ich mich jetzt der Nennung seines Namens nicht erinnern **); dass er aber in hohem Grade verdient, genannt zu werden, beweisen die so eben besprochene Abhandlung und noch manche andere Arbeiten von ihm, auf die ich vielleicht später zurückkommen werde, auf das Deutlichste. Unter allen Bedingungen hat mir die den obigen Titel tragende Abhandlung von Fuss so interessant geschienen, dass ich mich entschlossen habe, sie den Lesern des Archivs im Folgenden vollständig mitzutheilen, was ich mit der Versicherung thue, dass es mir zu besonderer Freude gereichen und besondere Genugthuung gewähren wird, wenn ich dadurch bewirke, dass Nicolaus Fuss, Leonhard Euler's trefflicher Schüler, künftig wenigstens öfter und in hervorragenderer Weise, als dies bis jetzt geschehen zu sein scheint, unter den Bearbeitern und namentlich unter den ersten Begründern der sogenannten neueren Geometrie genannt wird.

---

*) M. s. die folgende Abhandlung. Théorème 2. Scholie 3, indem ich auf die letzten Worte dieser Scholie vorzüglich aufmerksam mache.

**) Die Geschichte der Geometrie von Chasles und einige andere hierher gehörende Schriften stehen mir gerade jetzt nicht gleich zu Gebote.

Il y a déjà plusieurs années qu'un jeune François, employé alors au Corps Impérial des Cadets de Terre, me parla d'un Théorème de Géométrie qui, dans le tems qu'il étoit encore à Paris à l'Ecole Royale militaire, avoit eu quelque célébrité et qu'on avoit prétendu tenir de feu Mr. d'Alembert. Je lui en donnai une démonstration, dont j'ai retrouvé depuis peu le brouillon en fouillant mes papiers. En relisant cette démonstration j'ai vu que la belle propriété qui en fait le sujet, peut conduire à d'autres non moins remarquables. En rassemblant mes idées sur cette matière il en est résulté le petit Mémoire que j'ai l'honneur de présenter ici à l'Académie pour la collection des Mémoires traduits en Russe, qu'elle se propose de publier, ou bien pour les Actes mêmes, si elle le juge digne de cet honneur. Il y fera sans doute plaisir à plus d'un amateur de la Géometrie, et peutêtre même à quelque Géomètre de profession.

Lemme I.

Les trois côtés d'un triangle ABC (Taf. V. Fig. 1.) **étant prolongés jusqu'en** D, E, F, **de manière que** $AD.BE.CF = AF.BD.CE$, **les trois points** D, E, F **seront dans une ligne droite.**

Démonstration.

Tirons les lignes FE et DF, et quelque soit l'angle qu'elles comprennent, si nous nommons l'angle $AFD = \alpha$ et l'angle $AFE = \beta$, nous savons que

$$\sin\alpha : \sin D = AD : AF,$$
$$\sin D : \sin E = BE : BD,$$
$$\sin E : \sin\beta = CF : CE,$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin\alpha : \sin\beta = AD.BE.CF : AF.BD.CE.$$

Mais il y a en vertu du Lemme

$$AD.BE.CF = AF.BD.CE$$

d'où il suit que $\sin\beta = \sin\alpha$, donc $\beta = 180^\circ - \alpha$ et partant DFE une ligne droite.

Théorème I.

Si des trois angles A, B, C (Taf. V. Fig. 2.) **d'un triangle pour centre on décrit, avec des rayons différens,**

trois cercles, en les enfermant, deux-à-deux, entre leurs tangentes, les points d'intersection E, D, F de ces trois paires de tangentes seront situés dans une même ligne droite.

C'est le Théorème dont j'ai parlé dans l'introduction.

Démonstration.

Soyent a, b, c les rayons des trois cercles ayant leurs centres en A, B, C, et il est clair que

$$AD:BD=a:b,$$
$$BE:CE=b:c,$$
$$CF:AF=c:a,$$

d'où l'on tire en composant

$$AD.BE.CF:BD.CE.AF=1:1$$

c'est-à-dire que

$$AD.BE.CF=AF.BD.CE$$

et par conséquent, en vertu du Lemme, les points D, E, F seront dans une même ligne droite.

Théorème 2.

En concevant trois sphères, dont les centres sont dans les trois angles A, B, C (Taf.V.Fig.3.) d'un triangle, enfermées, deux à deux, entre la surface d'un cone qui les touche, les sommets de ces trois cones seront situés dans une même ligne droite.

Démonstration.

Un plan passant par les trois centres A, B, C des sphères données passera par les axes et partant aussi par les sommets E, D, F des cones circonscrits. Un plan touchant les trois sphères A, B, C, en a, b, c, touchera aussi les surfaces des trois cones circonscrits et passera, par conséquent, par leurs sommets E, D, F. Ainsi les sommets E, D, F, se trouvant tant dans le plan passant par les centres des sphères que dans le plan qui les touche, se trouveront nécessairement dans l'intersection de ces deux plans, par conséquent dans une même ligne droite.

Scholie 1.

Il est évident que la même vérité peut aussi être démontrée au moyen du Lemme. Car si par les centres A et B, par A et C et par B et C on conçoit des plans perpendiculaires au plan ABC, et qu'on tire dans ces trois plans les tangentes abD, acF, cbE, et des centres sur ces tangentes les perpendiculaires Aa, Bb; Aa, Cc; Bb, Cc, on aura

$$AD:BD = Aa:Bb,$$
$$BE:CE = Bb:Cc,$$
$$CF:AF = Cc:Aa$$

d'où l'on tire en composant

$$AD.BE.CF:AF.BD.CE = 1:1$$

par conséquent

$$AD.BE.CF = AF.BD.CE$$

donc E, D, F dans une même ligne droite.

Scholie 2.

La même propriété suit aussi immediatement du Théorème 1. Car supposons que chaque paire de cercles se tourne, avec ses tangentes, autour de la ligne tirée par les centres, les cercles engendreront des sphères et les tangentes le cone qui les renferme. L'intersection qui en devient le sommet reste immuable à sa place. Donc les sommets des trois cones seront dans une même ligne droite.

Scholie 3.

Réciproquement le premier Théorème auroit pu être déduit, sans le secours du Lemme, comme corollaire, du second Théorème, où il est évidemment contenu. Car la section des trois sphères, faites par le plan passant par leurs centres, donne les trois cercles du Théorème 1, et la section des trois cones circonscrits, faite par le même plan, donne les trois paires de tangentes du Théorème 1. Aussi est-il très probable que la propriété énoncée dans ce Théorème a été découverte par la voye de cette considération stéréométrique.

Théorème 3.

Quatre cercles A, B, C, D (Taf. V. Fig. 4.), dont les

centres sont dans le même plan, et les rayons de grandeur différente, étant enfermés deux-à-deux entre leurs tangentes, il en résultera six points d'intersection, qui seront situés dans quatre lignes droites, savoir trois-à-trois dans la même.

Démonstration.

Combinant les quatre cercles *ABCD* trois-à-trois, il en résulte quatre combinaisons *ABC*, *ABD*, *ACD*, *BCD*. La prémiere *ABC* admet derechef trois combinaisons de deux-à-deux, savoir *AB*, *AC*, *BC*. En enfermant ces trois paires de cercles entre leurs tangentes, il en résulte trois intersections que nous marquerons chacune par les deux lettres grecques correspondantes aux deux lettres latines indiquant les cercles auxquels l'intersection appartient. Ces trois intersections seront $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, toutes les trois, en vertu du Théorème 1., dans la même ligne droite. La seconde combinaison à trois, *ABD*, fournit trois combinaisons à deux *AB*, *AD*, *BD*; les intersections des tangentes, renfermant ces trois paires de cercles, savoir $\alpha\beta$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$, seront, en vertu du Théorème 1., dans une même ligne droite. La troisième combinaison *ACD* admet les combinaisons *AC*, *AD*, *CD*, qui donnent les intersections $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\gamma\delta$, situées dans une même ligne droite. Enfin la combinaison *BCD* engendre les combinaisons *BC*, *BD*, *CD*, et les intersections $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, placées dans une même ligne droite.

Théorème 4.

Quatre sphères dont les centres sont dans un même plan et les rayons différens, étant enfermées, deux-à-deux, entre la surface d'un même cone, il en résultera six dont les sommets seront situés dans quatre lignes droites, savoir trois-à-trois dans la même.

On voit bien que ce Théorème se démontre de la même maniere que le précédent.

Théorème 5.

Ayant *n* cercles, ou *n* sphères *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, etc. qui ont leurs centres dans le même plan, si on les enferme, deux-à-deux, les cercles entre deux tangentes, ou les

sphères entre un cone, il en résultera $\frac{n(n-1)}{1.2}$ intersections de tangentes, ou $\frac{n(n-1)}{1.2}$ sommets de cone, placés sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ lignes droites différentes, savoir trois-à-trois sur la même ligne; et en désignant chaque intersection des tangentes, ou le sommet de chaque cone, par les deux lettres grecques correspondantes aux deux lettres latines qui indiquent la paire de cercles ou de sphères à laquelle il appartient, les trois intersections ou sommets qui portent les trois mêmes lettres, chacune deux fois, seront sur la même ligne droite.

Démonstration.

On sait par la Théorie des combinaisons que lorsque n lettres $A, B, C, D \ldots N$ sont combinées m à m, le nombre des combinaisons qui auront lieu sera

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-m+1)}{1.2.3.4\ldots m}.$$

Le nombre des intersections des tangentes ou des sommets de cone est égal au nombre des combinaisons de n lettres prises deux-à-deux; ainsi à cause de $m=2$, il sera $=\frac{n(n-1)}{1.2}$. Le nombre des lignes droites, où ces intersections ou sommets seront placés trois-à-trois, est égal au nombre des combinaisons de n lettres prises trois-à-trois; ainsi, à cause de $m=3$, ce nombre sera $=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$. Chaque assemblage ou grouppe de trois cercles, ou d'autant de sphères, combinés deux-à-deux, donne trois lettres, chacune deux fois. Chaque grouppe, en vertu du Théorème 1. et 2., a ses intersections ou sommets sur la même ligne droite. Ainsi les intersections ou sommets qui renferment les mêmes trois lettres, chacune deux fois, seront dans la même ligne droite.

Scholie.

On sera frappé un moment de voir que dès que $n > 5$ le nombre des lignes surpasse celui des intersections ou sommets. Mais en regardant la 4e figure, où chaque intersection se trouve sur deux lignes à la fois, on comprendra aisément que plus que le

mbre n est grand, plus il y aura de lignes où la même intersection se trouvera placée à la fois, et plus le nombre des lignes it surpasser celui des intersections. Car il est facile à voir le nombre de lignes, où la même intersection de tangentes le même sommet de cone se trouve à la fois, sera le quotient i vient en divisant le nombre total des lignes où les sommets trouvent placés trois-à-trois par le tiers du nombre des intersections ou sommets. Il sera donc $= n - 2$.

Lemme II.

Les trois côtés d'un triangle sphérique ABC (Taf. V. Fig. 5.) étant prolongés jusqu'en $D, E, F,$ de manière que $\sin AD . \sin BE . \sin CF = \sin AF . \sin BD . \sin CE$, les trois points D, F, E seront dans un arc de grand cercle.

Démonstration.

Joignons les points D et F, de même que F et E, par les arcs de grand cercle DF et FE, et soit l'angle $DFA = \alpha$ et l'angle $EFA = \beta$; et l'on sçait par la Trigonométrie sphérique que

$$\sin \alpha : \sin D = \sin AD : \sin AF,$$
$$\sin D : \sin E = \sin BE : \sin BD,$$
$$\sin E : \sin \beta = \sin CF : \sin CE,$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin AD . \sin BE . \sin CF : \sin AF . \sin BD . \sin CE.$$

Il y a en vertu du Lemme

$$\sin AD . \sin BE . \sin CF = \sin AF . BD . \sin CE$$

donc $\sin \alpha = \sin \beta$, et partant $\beta = 180^0 - \alpha$, d'où il suit que les arcs DF et FE ne sont qu'un même arc de grand cercle.

Lemme III.

En enfermant deux petits cercles tracès sur la surface d'une sphere des points A et B (Taf. V. Fig. 6.) pour centres, entre deux arcs de grand cercle qui les touchent en a et b, α et β et qui se coupent dans le point O du grand cercle passant par les deux centres A et B, on aura

$$\sin Aa : \sin Bb = \sin AO : \sin BO.$$

Démonstration.

Comme les triangles sphériques AOa et BOb sont rectangles, il est évident que

$$\sin Aa = \sin AOa . \sin AO,$$
$$\sin Bb = \sin BOb . \sin BO$$

et que par conséquent

$$\sin Aa : \sin Bb = \sin AOa . \sin AO : \sin BOb . \sin BO.$$

Mais $\sin AOa = \sin BOb$, partant

$$\sin Aa : \sin Bb = \sin AO : \sin BO.$$

Théorème 6.

Si l'on enferme trois cercles décrits sur la surface d'une sphère, deux-à-deux, entre deux arcs de grand cercle qui les touchent, les intèrsections de ces trois paires de grands cercles seront situés dans un même arc de grand cercle.

Démonstration.

Soyent les trois angles A, B, C (Taf. V. Fig. 5.) du triangle sphérique ABC les centres des cercles, soyent a, b, c leurs rayons (arcs de grand cercle) et les intersections des tangentes, savoir D pour les cercles A et B, F pour A et C, E pour B et C, et nous aurons en vertu du Lemme précédent

$$\sin AD : \sin BD = \sin a : \sin b,$$

$$\sin BE : \sin CE = \sin b : \sin c,$$

$$\sin CF : \sin AF = \sin c : \sin a$$

d'où l'on tire en composant

$$\sin AD . \sin BE . \sin CF : \sin BD . \sin CE . \sin AF = 1 : 1$$

et de là il suit que

$$\sin AD . \sin BE : \sin CF = \sin BD . \sin CE . \sin AF$$

donc, en vertu du Lemme II., les intersections D, F, E seront dans un même arc de grand cercle.

Théorème 7.

Ayant n cercles A, B, C, D, etc. sur la surface de la même sphère, si on les enferme deux-à-deux entre deux tangentes, arcs de grand cercle, il en résultera $\frac{n(n-1)}{1.2}$ points d'intersection de tangentes, situées sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ arcs de grand cercle différens, savoir trois-à-trois sur chacun, et en désignant chaque intersection par les deux lettres grecques correspondantes aux deux latines qui indiquent la paire de cercles à laquelle elle appartient, les trois intersections qui portent les trois mêmes lettres, chacune deux fois, seront placées sur le même arc de grand cercle.

La démonstration est la même que celle du Théorème 5.

Scholie.

La démonstration de presque tous les Théorèmes que nous venons de donner est fondée sur les Lemmes I. et II. (Taf. V. Fig. 1. et 5.) La relation qui fait le sujet de ces deux Lemmes, et qui a servi de base à nos Théorèmes, n'est pas la seule remarquable qui a lieu entre les lignes et les arcs de ces deux figures; il y en a d'autres qui ne sont pas moins intéressantes et qui, quoique hors de connexion avec les Théorèmes que nous avions en vue, méritent d'être rapportées et démontrées ici. Ce sera le sujet des deux Théorèmes suivans et de leurs corollaires.

Théorème 8.

Si entre les jambes CA et CB (Taf. V. Fig. 7.) d'un angle quelconque ACB on tire à volonté deux lignes droites AD et BE qui se coupent en O, il y aura toujours

$$\text{I. } AD.BO.CE = AC.DO.BE,$$

$$\text{II. } BE.AO.CD = BC.EO.AD,$$

$$\text{III. } BC.DO.AE = BD.AO.CE,$$

$$\text{IV. } CD.BO.AE = BD.EO.AC.$$

Démonstration.

1) Le $\triangle ACD$ donne $\sin C : \sin D = AD : AC$,
„ $\triangle BDO$ „ $\sin D : \sin B = BO : DO$,
„ $\triangle CBE$ „ $\sin B : \sin C = CE : BE$,
d'où l'on tire $1:1 = AD.BO.CE : AC.DO.BE$,

et partant

$$\text{I.} \quad AD.BO.CE = AC.DO.BE.$$

2) Le $\triangle CBE$ donne $\sin C : \sin E = BE : BC$,
„ $\triangle AOE$ „ $\sin E : \sin A = AO : EO$,
„ $\triangle ACD$ „ $\sin A : \sin C = CD : AD$,
de là on tire $1:1 = BE.AO.CD : BC.EO.AD$,

ce qui donne

$$\text{II.} \quad BE.AO.CD = BC.EO.AD.$$

3) Le $\triangle CBE$ donne $\sin E : \sin B = BC : CE$,
„ $\triangle BDO$ „ $\sin B : \sin O = DO : BD$,
„ $\triangle AEO$ „ $\sin O : \sin E = AE : AO$,
d'où l'on a $1:1 = BC.DO.AE : BD.AO.CE$,

ce qui nous fournit

$$\text{III.} \quad BC.DO.AE = BD.AO.CE.$$

4) Le $\triangle ACD$ donne $\sin A : \sin D = CD : AC$,
„ $\triangle BDO$ „ $\sin D : \sin O = BO : BD$,
„ $\triangle AEO$ „ $\sin O : \sin A = AE : EO$,
ainsi on a $1:1 = CD.BO.AE : BD.EO.AC$,

et par conséquent:

$$\text{IV.} \quad CD.BO.AE = BD.EO.AC.$$

Corollaire.

Combinons les quatre égalités du Théorème, que nous venons de démontrer, deux-à-deux de la manière suivante: Le produit de I. et II., divisé par $AD.BE$, donne

$$AO.BO.CD.CE = AC.BC.DO.EO$$

d'où l'on déduit cette proportion

$$AO.BO:DO.EO = AC.BC:CD.CE.$$

Le produit de II. et III., divisé par $BC.AO$, donne

$$BE.AE.CD.DO = BD.AD.EO.EC$$

d'où l'on tire la proportion

$$DC.DO:EC.EO = AD.BD:AE.BE.$$

Le produit de III. et I., divisé par $CE.DO$, donne

$$AD.AE.BC.BO = AC.AO.BD.BE$$

ce qui fournit la proportion

$$BC.BO:AC.AO = BD.BE:AD.AE.$$

Théorème 9.

Si entre deux arcs de grand cercle AC et BC (Taf. V. Fig. 8.) d'un angle sphérique quelconque ACB, on décrit deux arcs de grand cercle AD et BE, qui se coupent en O, il y aura

I. $\sin AD.\sin BO.\sin CE = \sin AC.\sin DO.\sin BE,$

II. $\sin BE.\sin AO.\sin CD = \sin BC.\sin EO.\sin AD,$

III. $\sin BC.\sin DO.\sin AE = \sin BD.\sin AO.\sin CE,$

IV. $\sin CD.\sin BO.\sin AE = \sin BD.\sin EO.\sin AC.$

La démonstration de ce Théorème est parfaitement conforme à celle du Théorème précédent. On voit qu'on n'a qu'à écrire au lieu des côtés des triangles rectilignes de la 7me figure les sinus des côtés des triangles sphèriques de la 8me.

Corollaire.

Les opérations du corollaire précédent donnent

$$\sin AO.\sin BO:\sin DO.\sin EO = \sin AC.\sin BC:\sin CD.\sin CE,$$

$$\sin DC.\sin DO:\sin EC.\sin EO = \sin AD.\sin BD:\sin AE.\sin BE,$$

$$\sin BC.\sin BO:\sin AC.\sin AO = \sin BD.\sin BE:\sin AD.\sin AE.$$

XX.

Theorie der abgeleiteten Reihen.

Von

Herrn *Oskar Werner*,

Lehrer der Mathematik zu Dresden.

Da bis jetzt noch keine allgemeine Summationsmethode für Reihen gefunden ist, d. h. eine Methode, nach welcher sich alle Reihen ohne Ausnahme summiren lassen, vielmehr diese Summation nach sehr verschiedenen, oft überaus künstlichen Methoden geschieht, so muss man, um diesen Mangel an wissenschaftlicher Einheit möglichst zu verhüten, sein Augenmerk darauf richten, Reihen, denen gewisse Eigenschaften gemeinsam sind, in einer einzigen von allgemeinerer Form zusammenzufassen, deren Summe angebbar ist. Was nun in dieser Beziehung das Theorem von Maclaurin für Reihen leistet, die nach Potenzen einer und derselben Grösse aufsteigen, dasselbe bewirkt eine Formel der Theorie der höheren Differenzenreihen für solche Reihen, deren Glieder die auf einander folgenden Binomialcoefficienten irgend eines positiven ganzen Exponenten als Factoren in sich schliessen. Die nähere Betrachtung dieser Differenzenreihen und deren fruchtbare Anwendung zu zeigen, bildet den Hauptgegenstand dieser Abhandlung. Dabei habe ich mir nach Möglichkeit angelegen sein lassen, diese Theorie von allgemeineren Gesichtspunkten aus zu betrachten. Hierher gehören namentlich die gleich im Anfange enthaltenen Untersuchungen über die höheren abgeleiteten Reihen, zu deren Aufsuchung mich das Streben geleitet hat, die Formeln der höheren Differenzenreihen aus allgemeineren Formeln in ähnlicher Weise hervorgehen zu lassen, wie den binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten aus der bekannten Entwickelung

eines Productes binomischer Factoren in eine Reihe. In wie weit mir diess gelungen, und was dabei als mein Eigenthum anzusehen ist, überlasse ich dem Urtheil Sachverständiger. Ich enthalte mich daher aller weiteren Erwähnung und komme nun lieber auf den Gegenstand selbst zu sprechen.

§. 1.

Wenn aus der Reihe (**Hauptreihe**)

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\ldots\, a_m\ldots$$

eine andere auf die Weise gebildet wird, dass man die Glieder derselben der Ordnung nach mit den Zahlen $l_0, l_1, l_2, \ldots$ multiplicirt und diese Producte vom zweiten, dritten, vierten Gliede, u. s. w. subtrahirt, so möge diese die **abgeleitete Reihe** jener genannt und ihre Glieder durch $\varDelta a_0$, $\varDelta a_1$, $\varDelta a_2, \ldots$ bezeichnet werden. Wir haben sonach identisch:

$$\varDelta a_0 = a_1 - l_0 a_0,\quad \varDelta a_1 = a_2 - l_1 a_1,\quad \varDelta a_2 = a_3 - l_2 a_2, \ldots,$$

wobei zu bemerken ist, dass man sich hüten muss, das Zeichen $\varDelta$ für einen Factor anzusehen. Das Verfahren nun, welches bei der Hauptreihe gelegentlich der Bildung einer abgeleiteten Reihe angewendet worden ist, lässt sich weiter verfolgen. Offenbar kann nämlich aus der abgeleiteten Reihe heraus wieder eine solche gebildet werden, aus dieser wieder eine andere, u. s. f. Dadurch erhält man eine Anzahl von Reihen, welche die **höheren abgeleiteten Reihen** der Hauptreihe

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\ldots\, a_m,\ldots$$

heissen mögen, und zwar entwickelt man nach der Ordnung, wie dieselben auf die Hauptreihe folgen, eine **erste, zweite, dritte,** u. s. w. **$n$te abgeleitete Reihe.** Sowie man nun die Glieder der ersten abgeleiteten Reihe dadurch bezeichnet, dass man den Gliedern der Hauptreihe das Symbol $\varDelta$ vorsetzt, so müsste man der Consequenz in der Bezeichung wegen die Glieder der zweiten abgeleiteten Reihe durch

$$\varDelta\varDelta a_0,\quad \varDelta\varDelta a_1,\quad \varDelta\varDelta a_2,\ldots$$

bezeichnen; dafür wollen wir aber die kürzere Schreibart

$$\varDelta^2 a_0,\quad \varDelta^2 a_1,\quad \varDelta^2 a_2,\ldots$$

einführen. Aus gleichen Gründen würde man die Glieder der dritten abgeleiteten Reihe durch

$$\Lambda\Lambda\Lambda a_0,\quad \Lambda\Lambda\Lambda a_1,\quad \Lambda\Lambda\Lambda a_2, \dots$$

andeuten, wofür wir uns aber der kürzeren Bezeichnung

$$\Lambda^3 a_0,\quad \Lambda^3 a_1,\quad \Lambda^3 a_2, \dots$$

bedienen wollen. Ueberhaupt entscheiden wir uns bei der $n$ten abgeleiteten Reihe für die Bezeichnung ihrer Glieder durch

$$\Lambda^n a_0,\quad \Lambda^n a_1,\quad \Lambda^n a_2, \dots\dots$$

Die Art und Weise nun, wie die einzelnen abgeleiteten Reihen unter einander verbunden sind, lässt sich jetzt auch durch folgende Gleichung:

$$1)\quad \Lambda^n a_m - l_{m-1}\Lambda^n a_{m-1} = \Lambda^{n+1} a_{m-1}$$

ausdrücken, von welcher in den nachstehenden Untersuchungen mehrfacher Gebrauch gemacht werden wird.

Von ganz besonderem Interesse ist die Spezialisirung

$$l_0 = l_1 = l_2 = \dots = l_{m-1} = 1.$$

In diesem Falle wollen wir stets das Symbol Λ mit Δ vertauschen. Die Formel 1) geht daher über in

$$2)\quad \Delta^n a_m - \Delta^n a_{m-1} = \Delta^{n+1} a_{m-1}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Glieder irgend einer abgeleiteten Reihe dieser Art aus denen der nächstvorhergehenden abgeleiteten Reihe erhalten werden, wenn man von jedem Gliede derselben das benachbarte vorhergehende subtrahirt. Wegen dieser Eigenschaft ist diesen abgeleiteten Reihen der Name **Differenzenreihen** beigelegt worden.

§. 2.

Um nach diesen Erklärungen zu Untersuchungen überzugehen, müssen wir uns erst mit folgenden Bezeichnungen vertraut machen.

Der Ausdruck $\overset{m}{C}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ bezeichnet in der Folge die Summe der Combinationen $m$ter Klasse ohne Wiederholungen aus den Elementen α, β, γ, ..., wobei jede Combination als Product gilt.

So oft im Folgenden ein Ausdruck von der Form $\underset{w}{\overset{m}{C}}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ vorkommt, so soll darunter immer die Summe der Combinationen $m$ter Klasse mit Wiederholungen aus den Elementen α, β, γ, ..., jede Combination als Product aufgefasst, verstanden werden.

Diess vorausgesetzt, wollen wir zunächst

$$R_m = \overset{n-m-1}{C}(l_1, l_2, \ldots l_{n-1})\, \Delta^{m+1} a_0 + \overset{n-m-2}{C}(l_2, l_3, \ldots l_{n-1})\, \Delta^{m+1} a_1 + \ldots$$
$$\ldots + \overset{1}{C}(l_{n-m-1}, \ldots l_{n-1})\, \Delta^{m+1} a_{n-m-2} + \overset{0}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1})\, \Delta^{m+1} a_{n-m-1}$$

setzen; dann haben wir mit Rücksicht auf Gleichung 1):

$$\begin{aligned} R_m = & \overset{n-m-1}{C}(l_1, l_2, \ldots l_{n-1}) . (\Delta^m a_1 - l_0 \Delta^m a_0) \\ & + \overset{n-m-2}{C}(l_2, l_3, \ldots l_{n-1}) . (\Delta^m a_2 - l_1 \Delta^m a_1) + \ldots \\ & \ldots + \overset{1}{C}(l_{n-m-1}, \ldots l_{n-1}) . (\Delta^m a_{n-m-1} - l_{n-m-2} . \Delta^m a_{n-m-2}) \\ & + \overset{0}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1}) . (\Delta^m a_{n-m} - l_{n-m-1} . \Delta^m a_{n-m-1}), \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R_m = & - \overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1})\, \Delta^m a_0 + [\overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) - l_0 \overset{n-m-1}{C}(l_1, \ldots l_{n-1})]\, \Delta^m a_0 \\ & + [\overset{n-m-1}{C}(l_1, \ldots l_{n-1}) - l_1 \overset{n-m-2}{C}(l_2, \ldots l_{n-1})] . \Delta^m a_1 + \ldots \\ & + [\overset{1}{C}(l_{n-m-1}, \ldots l_{n-1}) - l_{n-m-1} \overset{0}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1})]\, \Delta^m a_{n-m-1} \\ & + \overset{0}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1})\, \Delta^m a_{n-m}. \end{aligned}$$

Die eingeklammerten Differenzen lassen sich aber nach dem bekannten Satze der Lehre von den Combinationen:

$$\overset{m}{C}(\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu) - \nu \overset{m-1}{C}(\alpha, \beta, \ldots \mu) = \overset{m}{C}(\alpha, \beta, \ldots \mu)$$

vereinigen. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} R_m = & - \overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_0 + \overset{n-m}{C}(l_1, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_0 + \overset{n-m-1}{C}(l_2, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_1 + \ldots \\ & + \overset{1}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_{n-m-1} + \overset{0}{C}(l_{n-m+1}, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_{n-m}; \end{aligned}$$

oder, weil nach 3), wenn wir $m-1$ für m setzen,

$$\begin{aligned} R_{m-1} = & \overset{n-m}{C}(l_1, \ldots l_{n-1}) \Delta_m a_0 + \overset{n-m-1}{C}(l_2, \ldots l_{n-1}) \Delta_m a_1 + \ldots \\ & + \overset{1}{C}(l_{n-m}, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_{n-m-1} + \overset{0}{C}(l_{n-m+1}, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_{n-m}, \end{aligned}$$

die Relation:

$$R_m = - \overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \Delta^m a_0 + R_{m-1}.$$

Setzen wir in dieser Relation der Reihe nach 1, 2, 3, ... m für m, so entstehen folgende Gleichungen:

$$R_1 = -\overset{n+1}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta a_0 + R_0,$$

$$R_2 = -\overset{n-2}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^2 a_0 + R_1,$$

$$R_3 = -\overset{n-3}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^3 a_0 + R_2,$$

u. s. w.

$$R_{m-1} = -\overset{n-m+1}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^{m-1} a_0 + R_{m-2},$$

$$R_m = -\overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^m a_0 + R_{m-1};$$

aus deren Addition die Gleichung

$$R_m = -[\overset{n-1}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta a_0 + \overset{n-2}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^2 a_0 + \ldots + \overset{n-m+1}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^{m-1} a_0$$
$$+ \overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^m a_0] + R_0$$

entspringt. Setzen wir jetzt im Ausdruck 3) $m=0$ und beachten, dass die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen, wenn die Classenzahl und Elementenzahl gleich sind, dem Producte der Elemente selbst gleich ist, so erhalten wir:

$$R_0 = l_1 l_2 \ldots l_{n-1} \varDelta a_0 + l_2 l_3 \ldots l_{n-1} \varDelta a_1 + \ldots + l_{n-1} \varDelta a_{n-2} + \varDelta a_{n-1}$$
$$= l_1 l_2 \ldots l_{n-1} (a_1 - l_0 a_0) + l_2 l_3 \ldots l_{n-1} (a_2 - l_1 a_1) + \ldots$$
$$+ l_{n-1}(a_{n-1} - l_{n-2} a_{n-2}) + (a_n - l_{n-1} a_{n-1})$$
$$= a_n - l_0 l_1 \ldots l_{n-1} a_0 = a_n - \overset{n}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) a_0.$$

Wir haben also, wie hieraus leicht erhalten wird,

$$4) \quad a_n - l_0 l_1 \ldots l_{n-1} a_0 = l_1 l_2 \ldots l_{n-1} \varDelta a_0 + l_2 l_3 \ldots l_{n-1} \varDelta a_1 + \ldots$$
$$\ldots + l_{n-1} \varDelta a_{n-2} + \varDelta a_{n-1},$$

und, wenn wir den Ausdruck für R_0 in den nächstvorhergehenden für R_m substituiren,

$$R_m = -[\overset{n}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-1}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta a_0 + \ldots + \overset{n-m}{C}(l_0, \ldots l_{n-1}) \varDelta^m a_0] + a_n,$$

oder mit Rücksicht auf den Ausdruck 3):

5)

$$a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{n-m}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^m a_0 + R_m,$$

$$R_m = \overset{n-m-1}{C}(l_1, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_0 + \overset{n-m-2}{C}(l_2, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_1 + \dots$$

$$\dots + \overset{0}{C}(l_{n-m}, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_{n-m-1}.$$

Für $m=n$ resultirt hieraus, da negative Indices nicht vorkommen können,

$$6)\quad a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^n a_0.$$

Diese Formel enthält die Lösung der Aufgabe: irgend ein Glied der Hauptreihe durch die Anfangsglieder der höheren abgeleiteten Reihen auszudrücken.

Weil nach Gleichung 4):

$$a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + l_1 l_2 \dots l_{n-1} \Delta a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} \Delta a_1 + \dots$$

$$\dots + l_{n-1} \Delta a_{n-2} + \Delta a_{n-1},$$

so erhalten wir aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter 6):

$$l_1 l_2 \dots l_{n-1} \Delta a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} \Delta a_1 + \dots + l_{n-1} \Delta a_{n-2} + \Delta a_{n-1}$$

$$= \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \overset{n-2}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^2 a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^n a_0,$$

und ebenso natürlich:

$$7) \left\{ \begin{array}{l} l_1 l_2 \dots l_{n-1} a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} a_1 + \dots + l_{n-1} a_{n-2} + a_{n-1} \\ = \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-2}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^{n-1} a_0. \end{array} \right.$$

Um ferner auch jedes Anfangsglied irgend einer höheren abgeleiteten Reihe durch die Glieder der Hauptreihe auszudrücken, setzen wir zunächst

$$8)\quad S_m = \Delta^{n-m-1} a_{m+1} - \underset{w}{\overset{1}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta^{n-m-2} a_{m+1} + \underset{w}{\overset{2}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta^{n-m-3} a_{m+1}$$

$$- \dots (-1)^{n-m-2} \underset{w}{\overset{n-m-2}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta a_{m+1} + (-1)^{n-m-1} \underset{w}{\overset{n-m-1}{C}}(l_0, \dots l_m) a_{m+1}.$$

Dieser Ausdruck formt sich vermöge der unter 1) gedachten Formel folgendermassen um:

$$S_m = [\Delta^{n-m} a_m + l_m \Delta^{n-m-1} a_m] - \overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)[\Delta^{n-m-1} a_m + l_m \Delta^{n-m-2} a_m]$$
$$+ \overset{2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)[\Delta^{n-m-2} a_m + l_m \Delta^{n-m-3} a_m] - \dots$$
$$(-1)^{n-m-2} \overset{n-m-2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)[\Delta^2 a_m + l_m \Delta a_m]$$
$$+ (-1)^{n-m-1} \overset{n-m-1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)[\Delta a_m + l_m a_m],$$

oder

$$S_m = \Delta^{n-m} a_m - [\overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) - l_m \overset{0}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)] \Delta^{n-m-1} a_m$$
$$+ [\overset{2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) - l_m \overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)] \Delta^{n-m-2} a_m$$
$$- \dots (-1)^{n-m-1} [\overset{n-m-1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) - l_m \overset{n-m-2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)] \Delta a_m$$
$$+ (-1)^{n-m} [\overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) - l_m \overset{n-m-1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m)] a_m + (-1)^{n-m+1} \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) a_m.$$

Die in Parenthesen eingeschlossenen Differenzen lassen sich aber nach dem bekannten Satze der Combinationslehre:

$$\overset{m}{\underset{w}{C}}(\alpha, \beta, \dots \mu, \nu) - \nu \overset{m-1}{\underset{w}{C}}(\alpha, \beta, \dots \mu, \nu) = \overset{m}{\underset{w}{C}}(\alpha, \beta, \dots \mu)$$

vereinigen; dadurch wird

$$S_m = \Delta^{n-m} a_m - \overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) \Delta^{n-m-1} a_m + \overset{2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) \Delta^{n-m-2} a_m$$
$$- \dots (-1)^{n-m-1} \overset{n-m-1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) \Delta a_m + (-1)^{n-m} \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) a_m$$
$$+ (-1)^{n-m+1} \overset{n-m}{C}(l_0, \dots l_m) a_m.$$

Weil nach 8) für $m-1$ anstatt m

$$S_{m-1} = \Delta^{n-m} a_m - \overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) \Delta^{n-m-1} a_m + \overset{2}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) \Delta^{n-m-2} a_m$$
$$- \dots (-1)^{n-m} \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_{m-1}) a_m,$$

so erhalten wir aus den beiden letzten Ausdrücken folgende Relation:

$$S_m = (-1)^{n-m+1} \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_m) a_m + S_{m-1}.$$

5)

$$a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{n-m}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^m a_0 + R_m,$$

$$R_m = \overset{n-m-1}{C}(l_1, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_0 + \overset{n-m-2}{C}(l_2, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_1 + \dots$$
$$\dots + \overset{0}{C}(l_{n-m}, \dots l_{n-1}) \Delta^{m+1} a_{n-m-1}.$$

Für $m=n$ resultirt hieraus, da negative Indices nicht vorkommen können,

$$6) \quad a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^n a_0.$$

Diese Formel enthält die Lösung der Aufgabe: irgend ein Glied der Hauptreihe durch die Anfangsglieder der höheren abgeleiteten Reihen auszudrücken.

Weil nach Gleichung 4):

$$a_n = \overset{n}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + l_1 l_2 \dots l_{n-1} \Delta a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} \Delta a_1 + \dots$$
$$\dots + l_{n-1} \Delta a_{n-2} + \Delta a_{n-1},$$

so erhalten wir aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter 6):

$$l_1 l_2 \dots l_{n-1} \Delta a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} \Delta a_1 + \dots + l_{n-1} \Delta a_{n-2} + \Delta a_{n-1}$$
$$= \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \overset{n-2}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^2 a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^n a_0,$$

und ebenso natürlich:

$$7) \left\{ \begin{array}{l} l_1 l_2 \dots l_{n-1} a_0 + l_2 l_3 \dots l_{n-1} a_1 + \dots + l_{n-1} a_{n-2} + a_{n-1} \\ = \overset{n-1}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) a_0 + \overset{n-2}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta a_0 + \dots + \overset{0}{C}(l_0, \dots l_{n-1}) \Delta^{n-1} a_0. \end{array} \right.$$

Um ferner auch jedes Anfangsglied irgend einer höheren abgeleiteten Reihe durch die Glieder der Hauptreihe auszudrücken, setzen wir zunächst

$$8) \quad S_m = \Delta^{n-m-1} a_{m+1} - \underset{w}{\overset{1}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta^{n-m-2} a_{m+1} + \underset{w}{\overset{2}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta^{n-m-3} a_{m+1}$$
$$- \dots (-1)^{n-m-2} \underset{w}{\overset{n-m-2}{C}}(l_0, \dots l_m) \Delta a_{m+1} + (-1)^{n-m-1} \underset{w}{\overset{n-m-1}{C}}(l_0, \dots l_m) a_{m+1}.$$

Dieser Ausdruck formt sich vermöge der unter 1) gedachten Formel folgendermassen um:

also ist, mit Rücksicht auf Formel 8):

$$
10)\left\{\begin{aligned}
&(-1)^n \Delta^n a_0 = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0)\, a_0 - \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)\, a_1 + \ldots \\
&\qquad\qquad + (-1)^m \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_m)\, a_m + (-1)^n S_m, \\
&S_m = \Delta^{n-m-1} a_{m+1} - \overset{1}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_m)\, \Delta^{n-m-2} a_{m+1} \\
&\quad + \overset{2}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_m)\, \Delta^{n-m-3} a_{m+1} - \ldots (-1)^{n-m-1} \overset{n-m-1}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_m)\, a_{m+1}.
\end{aligned}\right.
$$

Für $m = n$ geht diese Formel über in:

$$
11)\quad (-1)^n \Delta^n a_0 = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0)\, a_0 - \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)\, a_1 + \overset{n-2}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_2)\, a_2 - \ldots (-1)^n \overset{0}{\underset{w}{C}}(l_0, \ldots l_n)\, a_n,
$$

eine Formel, welche jedes Anfangsglied einer höheren abgeleiteten Reihe durch die Glieder der Hauptreihe ausdrückt.

§. 3.

Um nun auch ein paar Anwendungen von der Theorie der höheren abgeleiteten Reihen zu haben, gehen wir zunächst von folgender Hauptreihe aus:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = (x + l_0), \quad a_2 = (x + l_0)(x + l_1), \text{ u. s. w.}$$

Nach Anleitung der Formel 1) entwickeln wir hieraus folgende Reihen:

erste abgeleitete Reihe:

$$\Delta a_0 = x, \quad \Delta a_1 = x(x + l_0), \quad \Delta a_2 = x(x + l_0)(x + l_1), \text{ u. s. w.}$$

zweite abgeleitete Reihe:

$$\Delta^2 a_0 = x^2, \quad \Delta^2 a_1 = x^2(x + l_0), \quad \Delta^2 a_2 = x^2(x + l_0)(x + l_1), \text{ u. s. w.}$$

dritte abgeleitete Reihe:

$$\Delta^3 a_0 = x^3, \quad \Delta^3 a_1 = x^3(x + l_0), \quad \Delta^3 a_2 = x^3(x + l_0)(x + l_1), \text{ u. s. w.}$$

. . . .

$n$te abgeleitete Reihe:

$$\Delta^n a_0 = x^n, \quad \Delta^n a_1 = x^n(x + l_0), \quad \Delta^n a_2 = x^n(x + l_0)(x + l_1), \text{ u. s. w.}$$

Indem wir diese Ausdrücke in den vorher entwickelten allgemeinen Formeln einführen, erhalten wir aus Formel 4):

$$(x+l_0)(x+l_1)\dots(x+l_{n-1})-l_0l_1\dots l_{n-1}=l_1l_2\dots l_{n-1}x+l_2l_3\dots l_{n-1}x(x+l_0)$$
$$+l_3l_4\dots l_{n-1}x(x+l_0)(x+l_1)+\dots+x(x+l_0)(x+l_1)\dots(x+l_{n-2}),$$

oder, wenn wir mit $l_0 l_1 \dots l_{n-1}$ dividiren:

$$\frac{1}{x}\left[\left(\frac{x}{l_0}+1\right)\left(\frac{x}{l_1}+1\right)\dots\left(\frac{x}{l_{n-1}}+1\right)-1\right]=\frac{1}{l_0}+\frac{1}{l_1}\left(\frac{x}{l_0}+1\right)$$
$$+\frac{1}{l_2}\left(\frac{x}{l_0}+1\right)\left(\frac{x}{l_1}+1\right)+\dots+\frac{1}{l_{n-1}}\left(\frac{x}{l_0}+1\right)\left(\frac{x}{l_1}+1\right)\dots\left(\frac{x}{l_{n-2}}+1\right).$$

Die Formel 6) geht über in die bekannte Entwickelung:

$$13)\quad (x+l_0)(x+l_1)\dots(x+l_{n-1})=\overset{n}{C}(l_0,\dots l_{n-1})+\overset{n-1}{C}(l_0,\dots l_{n-1})x$$
$$+\overset{n-2}{C}(l_0,\dots l_{n-1})x^2+\dots+\overset{0}{C}(l_0,\dots l_{n-1})x^n.$$

Ferner erhalten wir aus 9):

$$x^n+(-1)^{n-1}l_0^n=x^{n-1}(x+l_0)-l_0x^{n-2}(x+l_0)+l_0^2x^{n-3}(x+l_0)$$
$$-\dots(-1)^{n-1}l_0^{n-1}(x+l_0),$$

oder

$$\frac{x^n+(-1)^{n-1}l_0^n}{x+l_0}=x^{n-1}-l_0x^{n-2}+l_0^2x^{n-3}-\dots(-1)^{n-1}l_0^{n-1},$$

und endlich aus Formel 11):

$$\left\{\begin{aligned}(-1)^nx^n=&\underset{w}{\overset{n}{C}}(l_0)-\underset{w}{\overset{n-1}{C}}(l_0,l_1)(x+l_0)+\underset{w}{\overset{n-2}{C}}(l_0,l_1,l_2)(x+l_0)(x+l_1)\\&-\dots(-1)^n\underset{w}{\overset{0}{C}}(l_0,\dots l_n)(x+l_0)(x+l_1)\dots(x+l_{n-1}).\end{aligned}\right.$$

Diese Formel ist vorzugsweise geeignet, einen independenten Ausdruck für $\underset{w}{\overset{r}{C}}(l_0,l_1,\dots l_n)$ zu liefern. Für $x=-l_0, -l_1, -l_2, \dots$ ergeben sich nämlich folgende Gleichungen:

$$l_0^n = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0),$$

$$l_1^n = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0) + \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)(l_1 - l_0),$$

$$l_2^n = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0) + \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)(l_2 - l_0) + \overset{n-2}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, l_2)(l_2 - l_0)(l_2 - l_1),$$

$$l_3^n = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0) + \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)(l_3 - l_0) + \overset{n-2}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, l_2)(l_3 - l_0)(l_3 - l_1)$$
$$+ \overset{n-3}{\underset{w}{C}}(l_0, \dots l_3)(l_3 - l_0)(l_3 - l_1)(l_3 - l_2),$$

u. s. w.

$$l_m^n = \overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0) + \overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1)(l_m - l_0) + \overset{n-2}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, l_2)(l_m - l_0)(l_m - l_1) + \dots$$
$$\dots + \overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, \dots l_m)(l_m - l_0)(l_m - l_1) \dots (l_m - l_{m-1}).$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir:

$$\overset{n}{\underset{w}{C}}(l_0) = l_0^n,$$

Die zweite giebt mit Zuziehung dieses Resultates:

$$\overset{n-1}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1) = \frac{l_0^n}{l_0 - l_1} + \frac{l_1^n}{l_1 - l_0};$$

ebenso die dritte mit Berücksichtigung der beiden vorhergehenden Resultate:

$$\overset{n-2}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, l_2) = \frac{l_0^n}{(l_0 - l_1)(l_0 - l_2)} + \frac{l_1^n}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_2)} + \frac{l_2^n}{(l_2 - l_0)(l_2 - l_1)};$$

und die vierte unter Beachtung der drei letzten Ausdrücke:

$$\overset{n-3}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, l_2, l_3) = \frac{l_0^n}{(l_0 - l_1)(l_0 - l_2)(l_0 - l_3)} + \frac{l_1^n}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)}$$
$$+ \frac{l_2^n}{(l_2 - l_0)(l_2 - l_1)(l_2 - l_3)} + \frac{l_3^n}{(l_3 - l_0)(l_3 - l_1)(l_3 - l_2)}.$$

Das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke fortschreiten, lässt sich jetzt mit Bestimmtheit erkennen. Wir entnehmen daraus leicht folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$\overset{n-m}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, \ldots l_m) = \frac{l_0^n}{(l_0-l_1)(l_0-l_2)(l_0-l_3)\ldots(l_0-l_m)}$$
$$+ \frac{l_1^n}{(l_1-l_0)(l_1-l_2)(l_1-l_3)\ldots(l_1-l_m)}$$
$$+ \frac{l_2^n}{(l_2-l_0)(l_2-l_1)(l_2-l_3)\ldots(l_2-l_m)}$$
$$+ \frac{l_3^n}{(l_3-l_0)(l_3-l_1)(l_3-l_2)\ldots(l_3-l_m)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{l_{m-1}^n}{(l_{m-1}-l_0)(l_{m-1}-l_1)\ldots(l_{m-1}-l_{m-2})(l_{m-1}-l_m)}$$
$$+ \frac{l_m^n}{(l_m-l_0)(l_m-l_1)\ldots(l_m-l_{m-2})(l_m-l_{m-1})}.$$

Um zu beweisen, dass dieser Ausdruck, der sich für $m=0$, 1, 2, 3 als richtig gezeigt hat, auch in der Folge richtig bleibt, ist nur zu zeigen, dass, wenn angenommen wird, er sei für m richtig, er auch für $m+1$ gilt. Die Durchführung dieses Schlusses wird mir der Leser gern und um so mehr erlassen, da durchaus keine Schwierigkeiten damit verbunden sind. Vertauschen wir noch n mit m und setzen dann $m=n+r$, so geht obiger Ausdruck in folgenden über:

$$16)\quad \overset{r}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, \ldots l_n) = \frac{l_0^{n+r}}{(l_0-l_1)(l_0-l_2)(l_0-l_3)\ldots(l_0-l_n)}$$
$$+ \frac{l_1^{n+r}}{(l_1-l_0)(l_1-l_2)(l_1-l_3)\ldots(l_1-l_n)}$$
$$+ \frac{l_2^{n+r}}{(l_2-l_0)(l_2-l_1)(l_2-l_3)\ldots(l_2-l_n)}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{l_n^{n+r}}{(l_n-l_0)(l_n-l_1)\ldots\ldots(l_n-l_{n-2})(l_n-l_{n-1})}.$$

Einen ähnlichen Ausdruck für $\overset{r}{C}(l_0, l_1, \ldots l_n)$ zu finden, ist mir bis jetzt nicht gelungen. Vielleicht finden bessere Kräfte in dieser Bemerkung Veranlassung, sich diesem Gegenstande zuzuwenden.

§. 4.

Eine zweite bemerkenswerthe Anwendung von der Theorie der abgeleiteten Reihen gestattet die Betrachtung der Hauptreihen

$$a_0 = \sin r,\quad a_1 = \frac{\sin(r+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},\quad a_2 = \frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_1}, \ldots\ldots,$$
$$a_0 = \cos r,\quad a_1 = \frac{\cos(r+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},\quad a_2 = \frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0 \sin\varphi_1}, \ldots\ldots;$$

aus welchen wir für

$$l_0 = \text{cotg}\,\varphi_0,\quad l_1 = \text{cotg}\,\varphi_1,\quad l_2 = \text{cotg}\,\varphi_2,\ \text{u. s. w.}$$

folgende entsprechende abgeleitete Reihen entwickeln:

erste abgeleitete Reihe:

$$\varDelta a_0 = \sin(r+\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta a_1 = \frac{\sin(r+\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},\quad \varDelta a_2 = \frac{\sin(r+\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1},\ldots$$

$$\varDelta a_0 = \cos(r+\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta a_1 = \frac{\cos(r+\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},\quad \varDelta a_2 = \frac{\cos(r+\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1}$$

zweite abgeleitete Reihe:

$$\varDelta^2 a_0 = \sin(r+2\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta^2 a_1 = \frac{\sin(r+2\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$\varDelta^2 a_2 = \frac{\sin(r+2\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1},\ldots$$

$$\varDelta^2 a_0 = \cos(r+2\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta^2 a_1 = \frac{\cos(r+2\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$\varDelta^2 a_2 = \frac{\cos(r+2\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1},\ldots$$

u. s. w.

$n$te abgeleitete Reihe:

$$\varDelta^n a_0 = \sin(r+n\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta^n a_1 = \frac{\sin(r+n\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$\varDelta^n a_2 = \frac{\sin(r+n\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1},\ldots$$

$$\varDelta^n a_0 = \cos(r+n\tfrac{\pi}{2}),\quad \varDelta^n a_1 = \frac{\cos(r+n\frac{\pi}{2}+\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$\varDelta^n a_2 = \frac{\cos(r+n\frac{\pi}{2}+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1},\ldots$$

Nach Formel 4) erhalten wir demnach, wenn wir $r-\frac{\pi}{2}$ für r setzen und auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch $\cot\varphi_0 \cot\varphi_1 \ldots \cot\varphi_{n-1}$ dividiren:

$$17)\left\{\begin{aligned}
&\cos r - \frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-1}} = \operatorname{tg}\varphi_0 \sin r + \operatorname{tg}\varphi_1 . \frac{\sin(r+\varphi_0)}{\cos\varphi_0} \\
&\quad + \operatorname{tg}\varphi_2 . \frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1} + \ldots + \operatorname{tg}\varphi_{n-1} . \frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-2})}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-2}}, \\
&\sin r - \frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-1}} = \operatorname{tg}\varphi_0 \cos r + \operatorname{tg}\varphi_1 . \frac{\cos(r+\varphi_0)}{\cos\varphi_0} \\
&\quad + \operatorname{tg}\varphi_2 . \frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1} + \ldots + \operatorname{tg}\varphi_{n-1} . \frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-2})}{\cos\varphi_0\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-2}}.
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichung 6) geht in folgende über:

$$18)\left\{\begin{aligned}
\frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-1}} &= \overset{n}{C}(\cot\varphi_0, \cot\varphi_1, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \sin r \\
&+ \overset{n-1}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \sin\left(r+\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \overset{n-2}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \sin\left(r+2\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \overset{0}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \sin\left(r+n\frac{\pi}{2}\right), \\
\frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-1}} &= \overset{n}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \cos r \\
&+ \overset{n-1}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \cos\left(r+\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \overset{n-2}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \cos\left(r+2\frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \overset{0}{C}(\cot\varphi_0, \ldots \cot\varphi_{n-1}) \cos\left(r+n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Ferner ergiebt sich aus Gleichung 9) bei umgekehrter Anordnung der Reihe und Vertauschung von $r-\varphi_0$ mit r nach leichter Rechnung:

$$
19)\left\{\begin{aligned}
&[(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\varphi_0^{\,n-1}\sin(r-\varphi_0+n\tfrac{\pi}{2})+\sin(r-\varphi_0)]\sin\varphi_0\\
&\qquad=\sin r-\operatorname{tg}\varphi_0\sin(r+\tfrac{\pi}{2})+\operatorname{tg}\varphi_0^{\,2}\sin(r+2\tfrac{\pi}{2})\\
&\qquad-\ldots(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\varphi_0^{\,n-1}\sin(r+\overline{n-1}\,\tfrac{\pi}{2}),\\
&[(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\varphi_0^{\,n-1}\cos(r-\varphi_0+n\tfrac{\pi}{2})+\cos(r-\varphi_0)]\sin\varphi_0\\
&\qquad=\cos r-\operatorname{tg}\varphi_0\cos(r+\tfrac{\pi}{2})+\operatorname{tg}\varphi_0^{\,2}\cos(r+2\tfrac{\pi}{2})\\
&\qquad-\ldots(-1)^{n-1}\operatorname{tg}\varphi_0^{\,n-1}\cos(r+\overline{n-1}\,\tfrac{\pi}{2});
\end{aligned}\right.
$$

endlich erhalten wir nach Gleichung 11):

$$
20)\left\{\begin{aligned}
&(-1)^n\sin(r+n\tfrac{\pi}{2})=\overset{n}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0)\sin r-\overset{n-1}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\cot\varphi_1)\frac{\sin(r+\varphi_0)}{\sin\varphi_0}\\
&\qquad+\overset{n-2}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\ldots\cot\varphi_2).\frac{\sin(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1}\\
&\qquad-\ldots(-1)^n\overset{0}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\ldots\cot\varphi_n).\frac{\sin(r+\varphi_0+\ldots+\varphi_{n-1})}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-1}},\\
&(-1)^n\cos(r+n\tfrac{\pi}{2})=\overset{n}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0)\cos r-\overset{n-1}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\cot\varphi_1).\frac{\cos(r+\varphi_0)}{\sin\varphi_0}\\
&\qquad+\overset{n-2}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\ldots\cot\varphi_2).\frac{\cos(r+\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1}\\
&\qquad+\ldots(-1)^n\overset{0}{\underset{w}{C}}(\cot\varphi_0,\ldots\cot\varphi_n).\frac{\cos(r+\varphi_0+\ldots+\varphi_{n-1})}{\sin\varphi_0\sin\varphi_1\ldots\sin\varphi_{n-1}}.
\end{aligned}\right.
$$

Andere Anwendungen von der Theorie der abgeleiteten Reihen behalte ich einer späteren Abhandlung vor, da die Betrachtung der Differenzenreihen das Hauptthema dieser Arbeit sein sollte.

§. 5.

Ehe wir die Formeln der vorhergehenden Paragraphen auf die Differenzenreihen anwenden, müssen wir folgende Bemerkungen voraussenden.

Das Zeichen μ_n sei definirt durch die Gleichungen

$$\mu_n=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

und

$$\mu_0 = 1.$$

Um aber dem Falle einer möglichen Verwechselung gleich vom Anfange herein vorzubeugen, bemerken wir hier, dass diese specielle Bedeutung des Index n von der allgemeinern des Index von a wohl zu unterscheiden ist, indem die in gegenwärtiger Abhandlung vorkommenden Symbole a_0, a_1, a_2, ... a_n ganz allgemeine Grössen bezeichnen.

Für $l_0 = l_1 = l_2 = \dots = l_n = 1$ ist, wie schon früher erwähnt, das Zeichen $\varLambda$ mit $\varDelta$ zu vertauschen, und nach bekannten Combinationssätzen:

$$\overset{m}{C}(l_0, l_1, \dots l_{n-1}) = n_m,$$

$$\overset{m}{\underset{w}{C}}(l_0, l_1, \dots l_{n-1}) = (n+m-1)_m$$

zu setzen.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen gehen die Formeln 4), 5), 6), 7), 9) und 10) unter Anwendung der leicht zu verificirenden Relation $n_m = n_{n-m}$ in die nachstehenden über:

$$21) \quad a_n - a_0 = \varDelta a_0 + \varDelta a_1 + \varDelta a_2 + \dots + \varDelta a_{n-1},$$

$$22) \begin{cases} a_n = n_0 a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + \dots + n_m \varDelta^m a_0 + R_m, \\ R_m = (n-1)_m \varDelta^{m+1} a_0 + (n-2)_m \varDelta^{m+1} a_1 + (n-3)_m \varDelta^{m+1} a_2 \\ \qquad + \dots + m_m \varDelta^{m+1} a_{n-m-1}, \end{cases}$$

$$23) \quad a_n = n_0 a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + \dots + n_n \varDelta^n a_0,$$

$$24) \quad a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = n_1 a_0 + n_2 \varDelta a_0 + \dots + n_n \varDelta^{n-1} a_0,$$

$$25) \quad (-1)^{n-1} \varDelta^n a_0 + a_0 = a_1 - \varDelta a_1 + \varDelta^2 a_1 - \dots (-1)^{n-1} \varDelta^{n-1} a_1,$$

$$26) \begin{cases} (-1)^n \varDelta^n a_0 = n_0 a_0 - n_1 a_1 + n_2 a_2 - \dots (-1)^m n_m a_m + S_m, \\ (-1)^{m+1} S_m = (n-1)_m a_{m+1} - (n-2)_m \varDelta a_{m+1} + (n-3)_m \varDelta^2 a_{m+1} \\ \qquad - \dots (-1)^{n-1} m_m \varDelta^{n-m-1} a_{m+1}, \end{cases}$$

$$27) \quad (-1)^n \varDelta^n a_0 = n_0 a_0 - n_1 a_1 + n_2 a_2 - \dots (-1)^n n_n a_n.$$

Ferner erhalten wir aus den Gleichungen 25) und 27) auf ein- e Weise:

$$\dots_1 - \varDelta a_1 + \varDelta^2 a_1 - \dots (-1)^{n-1} \varDelta^{n-1} a_1 = n_1 a_1 - n_2 a_2 + \dots (-1)^{n-1} n_n a_n$$

Ebenso ist natürlich auch:

28) $a_0 - \varDelta a_0 + \varDelta^2 a_0 - \ldots (-1)^{n-1} \varDelta^{n-1} a_0 = n_1 a_0 - n_2 a_1 + \ldots (-1)^{n-1} n_n a_{n-1}$.

Von diesen Formeln können wir uns noch zu anderen, zum Theil allgemeineren erheben, die jedenfalls noch nicht bekannt sein dürften.

Eine solche Formel erhalten wir, wenn wir den Ausdruck

$$a_n - n_2 \cdot \frac{2_1}{\mu_1} \varDelta a_{n-2} + n_4 \cdot \frac{4_2}{\mu_2} \varDelta^2 a_{n-4} - n_6 \cdot \frac{6_3}{\mu_3} \varDelta^3 a_{n-6} + \ldots$$

dergestalt transformiren, dass wir auf jedes Glied die Formel 23) bei einfacher Vertauschung der Indices anwenden. Dadurch wandelt sich derselbe in diesen um:

$$\begin{array}{ll} n_0 \{ & a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta^2 a_0 + n_3 \varDelta^3 a_0 + \ldots\ldots \} \\ - n_2 \cdot \frac{2_1}{\mu_1} \{ & \varDelta a_0 + (n-2)_1 \varDelta^2 a_0 + (n-2)_2 \varDelta^3 a_0 + \ldots \} \\ + n_4 \cdot \frac{4_2}{\mu_2} \{ & \varDelta^2 a_0 + (n-4)_1 \varDelta^3 a_0 + \ldots \} \\ - n_6 \cdot \frac{6_3}{\mu_3} \{ & \varDelta^3 a_0 + \ldots \} \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots , \end{array}$$

welcher im Allgemeinen von folgender Form ist:

$$a_0 + C_1 \varDelta a_0 + C_2 \varDelta^2 a_0 + C_3 \varDelta^3 a_0 + \ldots ,$$

wenn wir nämlich zur Abkürzung

$$C_1 = n_1 - n_2 \cdot \frac{2_1}{\mu_1},$$

$$C_2 = n_2 - n_2 (n-2)_1 \cdot \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 (n-4)_0 \cdot \frac{4_2}{\mu_2},$$

$$C_3 = n_3 - n_2 . (n-2)_2 \cdot \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 . (n-4)_1 \cdot \frac{4_2}{\mu_2} - n_6 . (n-6)_0 \cdot \frac{6_3}{\mu_3},$$

u. s. w.,

überhaupt allgemein

$$C_m = n_0 n_m - n_2 (n-2)_{m-1} \cdot \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 (n-4)_{m-2} \cdot \frac{4_2}{\mu_2} - \ldots (-1)^m n_{2m} . (n-2m)_0 \cdot \frac{(2m)_m}{\mu_m}$$

setzen. Die vorstehende $(m+1)$gliederige Reihe ist summirbar. Um diese Summation auszuführen, gehen wir von der Hauptreihe

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{(n-m)_1}{\mu_1}, \quad a_2 = \frac{(n-m)_2}{\mu_2}, \ldots.$$

aus, deren Differenzenreihen folgende sind:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0 = -\frac{(\mu+m-n)_1}{\mu_1}, \quad \Delta a_1 = -\frac{(\mu+m-n)_1}{\mu_1} \cdot \frac{(n-m)_1}{(\mu-1)_1}, \ldots.$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = \frac{(\mu+m-n)_2}{\mu_2}, \quad \Delta^2 a_1 = \frac{(\mu+m-n)_2}{\mu_2} \cdot \frac{(n-m)_1}{(\mu-2)_1}, \ldots.$$

u. s. w.

*m*te Differenzenreihe:

$$\Delta^m a_0 = (-1)^m \frac{(\mu+m-n)_m}{\mu_m}, \quad \Delta^m a_1 = (-1)^m \frac{(\mu+m-n)_m}{\mu_m} \cdot \frac{(n-m)_1}{(\mu-m)_1}, \ldots.$$

Wenden wir also die Formel 27) für $n = m$ auf diese Differenzenreihen an, so erhalten wir:

$$\frac{(\mu+m-n)_m}{\mu_m} = m_0 - m_1 \frac{(n-m)_1}{\mu_1} + m_2 \frac{(n-m)_2}{\mu_2} - \ldots (-1)^m m_m \frac{(n-m)_m}{\mu_m},$$

oder, wenn wir mit n_m multipliciren,

$$n_m \cdot \frac{(\mu+m-n)_m}{\mu_m} = n_0 n_m - n_2 \cdot (n-2)_{m-1} \cdot \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 \cdot (n-4)_{m-2} \cdot \frac{4_2}{\mu_2}$$
$$- \ldots (-1)^m n_{2m} (n-2m)_0 \cdot \frac{(2m)_m}{\mu_m};$$

daher

$$C_m = n_m \cdot \frac{(\mu+m-n)_m}{\mu_m},$$

und endlich, wenn wir wieder auf den Anfang unserer Entwickelung zurückgehen und das letzte Resultat beachten:

$$29) \begin{cases} a_0 + n_1 \cdot \frac{(\mu-n+1)_1}{\mu_1} \Delta a_0 + n_2 \cdot \frac{(\mu-n+2)_2}{\mu_2} \Delta^2 a_0 + \ldots + n_n \cdot \frac{\mu_n}{\mu_n} \Delta^n a_0 = \\ a_n - n_2 \cdot \frac{2_1}{\mu_1} \Delta a_{n-2} + n_4 \cdot \frac{4_2}{\mu_2} \Delta^2 a_{n-4} - n_6 \cdot \frac{6_3}{\mu_3} \Delta^3 a_{n-6} + \ldots \end{cases}$$

Diese Formel ist wegen ihrer Allgemeinheit sehr bemerkenswerth. Wie aus ihrer Entwickelung hervorgeht, bezeichnet μ

irgend welche Grösse. Die Formel 23) erscheint sofort als eine Spezialisirung der vorhergehenden, wenn wir die Zahl μ über jede angebbare, noch so grosse Zahl wachsen lassen. Für $\mu = n$ geht aus 29) hervor:

$$30) \quad a_0 + \Delta a_0 + \Delta^2 a_0 + \dots + \Delta^n a_0$$
$$= a_n - (n-1)_1 \Delta a_{n-2} + (n-2)_2 \Delta^2 a_{n-4} + \dots$$

Eine andere Spezialität der Gleichung 29) erhalten wir, wenn $\mu = n - 1$ gesetzt wird. In diesem Falle annulliren sich die Glieder der rechten Seite mit Ausnahme des ersten und letzten; weil, vorausgesetzt, dass r und n positive ganze Zahlen sind, $r_n = 0$ für $n > r$. Wir haben sonach

$$31) \quad a_0 + \Delta^n a_0 = a_n - n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1} \Delta a_{n-2} + n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2} \Delta^2 a_{n-4} - \dots,$$

eine Formel, welche sich leicht in anderer Form darstellen lässt, sobald wir auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n eingehen. Wir haben nämlich nach Formel 31):

$$a_0 + \Delta^{2n} a_0 = a_{2n} - (2n)_2 \cdot \frac{2_1}{(2n-1)_1} \Delta a_{2n-2} + (2n)_4 \cdot \frac{4_2}{(2n-1)_2} \Delta^2 a_{2n-4}$$
$$- \dots (-1)^n (2n)_{2n} \cdot \frac{(2n)_n}{(2n-1)_n} \Delta^n a_0.$$

Das allgemeine $(r+1)$ste Glied dieser Reihe ist:

$$(-1)^r (2n)_{2r} \cdot \frac{(2r)_r}{(2n-1)_r} \Delta^r a_{2n-2r}$$

oder

$$(-1)^r \cdot \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2r+1)}{1.2\dots 2r} \cdot \frac{2r(2r-1)\dots(r+1)}{(2n-1)(2n-2)\dots(2n-r)} \Delta^r a_{2n-2r},$$

oder

$$(-1)^r \cdot \frac{2n.(2n-r-1)(2n-r-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots(r+2)(r+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots (2n-2r)} \Delta^r a_{2n-2r};$$

daher erhalten wir, wenn wir das vordere n mit dem mittlern n zu n^2 verbinden und die vom mittleren n gleichweit abstehenden Factoren mit Hülfe der Formel $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ vereinigen,

$$(-1)^r (2n)_{2r} \cdot \frac{(2r)_r}{(2n-1)_r} \Delta^r a_{2n-2r}$$

$$= (-1)^r . 2 \cdot \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-\overline{n-r-1}^2)}{1.2.3\dots(2n-2r)} \Delta^r a_{2n-2r},$$

also nach dem Obigen:

$$a_0 + \Delta^{2n} a_0 = 2 . \frac{n^2(n^2-1^2) \ldots (n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3 \ldots 2n} a_{2n}$$

$$-2 . \frac{n^2(n^2-1^2) \ldots (n^2-\overline{n-2}^2)}{1.2.3 \ldots (2n-2)} \Delta a_{2n-2}$$

$$+ \ldots (-1)^{n-1} . 2 . \frac{n^2}{1.2} \Delta^{n-1} a_2 + (-1)^n . 2 \Delta^n a_0,$$

oder, wenn wir diese Reihe in umgekehrter Ordnung aufschreiben und durchgängig mit $\frac{(-1)^n}{2}$ multipliciren:

$$32)\quad (-1)^n . \frac{a_0 + \Delta^{2n} a_0}{2} = \Delta^n a_0 - \frac{n^2}{1.2} \Delta^{n-1} a_2 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4} \Delta^{n-2} a_4$$

$$- \ldots (-1)^n . \frac{n^2(n^2-1^2) \ldots (n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3 \ldots 2n} a_{2n}.$$

Setzen wir ferner in Formel 31) $2n+1$ an die Stelle von n, so haben wir:

$$a_0 + \Delta^{2n+1} a_0 = a_{2n+1} - (2n+1)_2 . \frac{2_1}{(2n)_1} \Delta a_{2n-1} + (2n+1)_4 . \frac{4_2}{(2n)_2} \Delta^2 a_{2n-3}$$

$$- \ldots (-1)^n (2n+1)_{2n} . \frac{(2n)_n}{(2n)_n} \Delta^n a_1 .$$

Das allgemeine $(r+1)$ste Glied dieser Reihe ist:

$$(-1)^r (2n+1)_{2r} . \frac{(2r)_r}{(2n)_r} \Delta^r a_{2n-2r+1},$$

oder

$$(-1)^r . \frac{(2n+1)2n \ldots (2n-2r+2)}{1.2 \ldots 2r} . \frac{2r(2r-1) \ldots (r+1)}{2n(2n-1) \ldots (2n-r+1)} \Delta^r a_{2n-2r+1},$$

oder, wie man durch einfache Rechnung findet:

$$(-1)^r . \frac{2n+1}{n} . (2n-r) . \frac{(2n-r-1)(2n-r-2)\ldots(n+1)n^2(n-1)\ldots(r+2)(r+1)}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots (2n-2r+1)} \Delta^r a_{2n-2r+1}.$$

Vereinigen wir endlich noch je zwei vom mittleren n^2 gleichweit abstehende Factoren mittels der Formel $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, so erhalten wir:

$$[illegible] \Delta^r a_{2n-2r+1} = (-1)^r . \frac{2n+1}{n} . (2n-r) . \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-r}\,.1^2)}{1.2.3\ldots(2n-2r+1)} \Delta^r a_{2n-2r+1};$$

also ergiebt sich aus der Formel, welche auf die durch (2) bezeichnete folgt:

$$[illegible] \frac{2n+1}{n} . 2n \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-[illegible]\,1^2)}{1.2.3\ldots(2n+1)} [illegible] \frac{2n+1}{n} . (2n-1) . \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-2}^2)}{1.2.3\ldots(2n-1)} \Delta a_{2n-1}$$

$$[illegible] \frac{2n+1}{n} (n+1) \frac{n^2}{1.2.3} [illegible] (-1)^n . \frac{2n+1}{n} . [illegible]$$

und, wenn wir diese Reihe in umgekehrter Ordnung schreiben, sowie beiderseits des Gleichheitszeichens mit $(-1)^n \frac{n}{2n+1}$ multipliciren,

$$(A1) \begin{cases} [illegible] \frac{1}{3}(n+1) . \frac{n^2}{1.2} [illegible] \frac{1}{5}(n+2) . \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4} [illegible] - \ldots \\ [illegible] \frac{1}{2n+1} . 2n \frac{n^2(n^2-1^2) \ldots (n^2-n-1^2)}{1.2.3 \ldots 2n} [illegible] \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt die Formeln 21) bis 28) einigermassen mit Aufmerksamkeit, so werden wir bemerken, dass sich immer je zwei dieser Formeln entsprechen, nämlich 21) und 25), 22) und 26), 23) und 27), 24) und 28). Es ist daher zu vermuthen, dass es auch ähnliche, den Formeln 29) bis 33) entsprechende Formeln geben wird. Diese Formeln zu finden, dahin möge jetzt unser Streben gerichtet sein.

Wir gehen zunächst von dem Ausdrucke

$$(-1)^n \{ \Delta^n a_0 + n_2 . \frac{2_1}{\mu_1} \Delta^{n-2} a_1 + n_4 . \frac{4_2}{\mu_2} \Delta^{n-4} a_2 + n_6 . \frac{6_3}{\mu_3} \Delta^{n-6} a_3 + \dots \}$$

aus und unterwerfen ihn auf ähnliche Weise, wie bei der Herleitung der Formel 29), einer derartigen Transformation, dass wir auf jedes Glied desselben die Formel 27) anwenden. Dadurch geht unser Ausdruck in den folgenden über:

$$\begin{aligned}
&n_0 \{ a_0 - n_1 a_1 + n_2 a_2 - n_3 a_3 + \dots\dots\dots \} \\
&+ n_2 . \frac{2_1}{\mu_1} \{ a_1 - (n-2)_1 a_2 + (n-2)_2 a_3 - \dots \} \\
&+ n_4 . \frac{4_2}{\mu_2} \{ a_2 - (n-4)_1 a_3 + \dots \} \\
&+ n_6 . \frac{6_3}{\mu_3} \{ a_3 - \dots \} \\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,
\end{aligned}$$

daher haben wir

$$\begin{aligned}
(-1)^n \{ \Delta^n a_0 + n_2 . \frac{2_1}{\mu_1} \Delta^{n-2} a_1 + n_4 . \frac{4_2}{\mu_2} \Delta^{n-4} a_2 + n_6 . \frac{6_3}{\mu_3} \Delta^{n-6} a_3 + \dots \} \\
= a_0 - K_1 a_1 + K_2 a_2 - K_3 a_3 + \dots
\end{aligned}$$

wenn nämlich der Kürze wegen

$$K_1 = n_0 n_1 - n_2 (n-2)_0 . \frac{2_1}{\mu_1},$$

$$K_2 = n_0 n_2 - n_2 (n-2)_1 . \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 . (n-4)_0 . \frac{4_2}{\mu_2},$$

$$K_3 = n_0 n_3 - n_2 (n-2)_2 . \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 . (n-4)_1 . \frac{4_2}{\mu_2} - n_6 . (n-6)_0 . \frac{6_3}{\mu_3},$$

u. s. w.,

überhaupt allgemein

$$K_m = n_0 n_m - n_2 (n-2)_{m-1} . \frac{2_1}{\mu_1} + n_4 (n-4)_{m-2} . \frac{4_2}{\mu_2}$$

$$- \dots (-1)^m n_{2m} . (n-2m)_0 . \frac{(2m)_m}{\mu_m}$$

gesetzt wird. Die Summe dieser Reihe haben wir aber bereits bei Gelegenheit der Entwickelung der Formel 29) gefunden. Es ist nämlich:

$$K_m = C_m = n_m . \frac{(\mu + m - n)_m}{\mu_m};$$

folglich erhalten wir, wenn wir auf das Nächstvorhergehende zurückblicken, die bemerkenswerthe, für jedes μ geltende Formel:

$$34)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 - n_1 . \frac{(\mu - n + 1)_1}{\mu_1} a_1 + n_2 . \frac{(\mu - n + 2)_2}{\mu_2} a_2 - \dots (-1)^n n_n . \frac{\mu_n}{\mu_n} a_n \\ \qquad = (-1)^n \{ \varDelta^n a_0 + n_2 . \frac{2_1}{\mu_1} \varDelta^{n-2} a_1 + n_4 . \frac{4_2}{\mu_2} \varDelta^{n-4} a_2 + \dots \}. \end{array} \right.$$

Für $\mu = n$ folgt aus ihr:

$$35)\quad a_0 - a_1 + a_2 - \dots (-1)^n a_n$$
$$= (-1)^n \{ \varDelta^n a_0 + (n-1)_1 \varDelta^{n-2} a_1 + (n-2)_2 \varDelta^{n-4} a_2 + \dots \}.$$

Wird in Formel 34) $\mu = n - 1$ gesetzt, so verschwinden die Glieder der rechten Seite, ausgenommen das erste und letzte, weil unter der Voraussetzung, dass r und n positive ganze Zahlen bezeichnen, $r_n = 0$ für $n > r$, und es bleibt stehen, wenn wir noch mit $(-1)^n$ multipliciren:

$$36)\quad (-1)^n a_0 + a_n = \varDelta^n a_0 + n_2 . \frac{2_1}{(n-1)_1} \varDelta^{n-2} a_1 + n_4 . \frac{4_2}{(n-1)_2} \varDelta^{n-4} a_2 + \dots$$

Diese Formel hat dieselben Coefficienten, wie die durch 31) bezeichnete. Nun ergaben sich aber aus letzterer die Formeln 32) und 33), indem wir gerade und ungerade n unterschieden, die Coefficienten in anderer Form darstellten und endlich noch eine Umkehrung der Reihe vornahmen. Auf ganz dieselbe Weise erhalten wir aus 36) die folgenden Formeln:

$$37)\quad \frac{a_0 + a_{2n}}{2} = a_n + \frac{n^2}{1.2} \varDelta^2 a_{n-1} + \frac{n^2(n^2 - 1^2)}{1.2.3.4} \varDelta^4 a_{n-2}$$
$$+ \dots + \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - \overline{n-1}^2)}{1.2.3 \dots 2n} \varDelta^{2n} a_0$$

und

$$38)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n(a_{2n+1} - a_0)}{2n+1} = n \varDelta^1 a_n + \frac{1}{3}(n+1) . \frac{n^2}{1.2} \varDelta^3 a_{n-1} \\ \qquad + \frac{1}{5}(n+2) \frac{n^2(n^2 - 1^2)}{1.2.3.4} \varDelta^5 a_{n-2} \\ \qquad + \dots + \frac{1}{2n+1} . 2n . \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - \overline{n-1}^2)}{1.2.3 \dots 2n} \varDelta^{2n+1} a_0. \end{array} \right.$$

Ein paar andere, der Theorie der höheren Differenzenreihen angehörende Formeln erhalten wir durch folgendes Verfahren.

Ausgehend von der Reihe

$$A_0 = a_0 + \Delta^r a_0, \quad A_1 = a_1 + \Delta^{r-1} a_1, \quad A_2 = a_2 + \Delta^{r-2} a_2, \ldots$$

als einer Hauptreihe, entwickeln wir nachstehende Differenzenreihen:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta A_0 = \Delta a_0 + \Delta^{r-1} a_0, \ \Delta A_1 = \Delta a_1 + \Delta^{r-2} a_1, \ \Delta A_2 = \Delta a_2 + \Delta^{r-3} a_2, \ldots$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 A_0 = \Delta^2 a_0 + \Delta^{r-2} a_0, \ \Delta^2 A_1 = \Delta^2 a_1 + \Delta^{r-3} a_1, \ \Delta^2 A_2 = \Delta^2 a_2 + \Delta^{r-4} a_2, \ldots$$

u. s. w.

*n*te Differenzenreihe:

$$\Delta^n A_0 = \Delta^n a_0 + \Delta^{r-n} a_0, \quad \Delta^n A_1 = \Delta^n a_1 + \Delta^{r-n-1} a_1,$$
$$\Delta^n A_2 = \Delta^n a_2 + \Delta^{r-n-2} a_2, \ldots$$

Weil nun nach Gleichung 22)

$$A_k = k_0 A_0 + k_1 \Delta A_0 + k_2 \Delta^2 A_0 + \ldots + k_n \Delta^n A_0$$
$$+ (k-1)_n \Delta^{n+1} A_0 + (k-2)_n \Delta^{n+1} A_1 + (k-3)_n \Delta^{n+1} A_2 + \ldots + n_n \Delta^{n+1} A_{k-n-1},$$

so erhalten wir durch einfache Substitution der vorhergehenden Ausdrücke in diese Gleichung:

$$a_k + \Delta^{r-k} a_k = k_0 (a_0 + \Delta^r a_0) + k_1 (\Delta a_0 + \Delta^{r-1} a_0) + k_2 (\Delta^2 a_0 + \Delta^{r-2} a_0)$$
$$+ \ldots + k_n (\Delta^n a_0 + \Delta^{r-n} a_0) + (k-1)_n (\Delta^{n+1} a_0 + \Delta^{r-n-1} a_0)$$
$$+ (k-2)_n (\Delta^{n+1} a_1 + \Delta^{r-n-2} a_1) + (k-3)_n (\Delta^{n+1} a_2 + \Delta^{r-n-3} a_2)$$
$$+ \ldots + n_n (\Delta^{n+1} a_{k-n-1} + \Delta^{r-k} a_{k-n-1}).$$

Für $k = r = 2n$ entsteht hieraus:

$$a_{2n} + a_{2n} = (2n)_0 (a_0 + \Delta^{2n} a_0) + (2n)_1 (\Delta a_0 + \Delta^{2n-1} a_0)$$
$$+ (2n)_2 (\Delta^2 a_0 + \Delta^{2n-2} a_0) + \ldots + (2n)_n (\Delta^n a_0 + \Delta^n a_0)$$
$$+ (2n-1)_n (\Delta^{n+1} a_0 + \Delta^{n-1} a_0) + (2n-2)_n (\Delta^{n+1} a_1 + \Delta^{n-2} a_1)$$
$$+ (2n-3)_n (\Delta^{n+1} a_2 + \Delta^{n-3} a_2) + \ldots + n_n (\Delta^{n+1} a_{n-1} + a_{n-1}).$$

Diese Gleichung ist noch einer ziemlichen Vereinfachung fähig. Nach Formel 23) ist nämlich:

$$a_{2n}=a_0+(2n)_1\Delta a_0+(2n)_2\Delta^2 a_0$$
$$+\ldots+(2n)_{2n-1}\Delta^{2n-1}a_0+(2n)_{2n}\Delta^{2n}a_0;$$

also erhalten wir, wenn wir in dieser Gleichung das erste Glied mit dem letzten, das zweite mit dem vorletzten, u. s. w. verbinden und dabei die Relation $r_m=r_{r-m}$ zu Hülfe nehmen,

$$a_{2n}=(a_0+\Delta^{2n}a_0)+(2n)_1(\Delta a_0+\Delta^{2n-1}a_0)+(2n)_2(\Delta^2a_0+\Delta^{2n-2}a_0)$$
$$+\ldots+(2n)_{n-1}(\Delta^{n-1}a_0+\Delta^{n+1}a_0)+(2n)_n\Delta^n a_0,$$

und, wenn wir endlich diese Gleichung von der drittletzten subtrahiren,

$$39)\left\{\begin{aligned}a_{2n}&=(2n)_n\Delta^n a_0+(2n-1)_n(\Delta^{n+1}a_0+\Delta^{n-1}a_0)\\&+(2n-2)_n(\Delta^{n+1}a_1+\Delta^{n-2}a_1)+(2n-3)_n(\Delta^{n+1}a_2+\Delta^{n-3}a_2)\\&+\ldots+n_n(\Delta^{n+1}a_{n-1}+a_{n-1}).\end{aligned}\right.$$

Noch eine Formel erhalten wir durch die Betrachtung der Hauptreihe

$$A_0=a_0+(-1)^r a_r,\quad A_1=a_1+(-1)^r a_{r-1},\quad A_2=a_2+(-1)^r a_{r-2},\ldots,$$

aus welcher folgende Reihen entspringen:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta A_0=\Delta a_0+(-1)^{r-1}\Delta a_{r-1},\quad \Delta A_1=\Delta a_1+(-1)^{r-1}\Delta a_{r-2},$$
$$\Delta A_2=\Delta a_2+(-1)^{r-1}\Delta a_{r-3},\ldots,$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 A_0=\Delta^2 a_0+(-1)^{r-2}\Delta^2 a_{r-2},\quad \Delta^2 A_1=\Delta^2 a_1+(-1)^{r-2}\Delta^2 a_{r-3},$$
$$\Delta^2 A_2=\Delta^2 a_2+(-1)^{r-2}\Delta^2 a_{r-4},\ldots,$$

u. s. w.

$n$te Differenzenreihe:

$$\Delta^n A_0=\Delta^n a_0+(-1)^{r-n}\Delta^n a_{r-n},\quad \Delta^n A_1=\Delta^n a_1+(-1)^{r-n}\Delta^n a_{r-n-1},$$
$$\Delta^n A_2=\Delta^n a_2+(-1)^{r-n}\Delta^n a_{r-n-2},\ldots$$

Weil nun nach Formel 26)

$$(-1)^k\Delta^k A_0=k_0A_0-k_1A_1+k_2A_2-\ldots(-1)^n k_n A_n$$
$$+(-1)^{n+1}\{(k-1)_n A_{n+1}-(k-2)_n\Delta A_{n+1}+(k-3)_n\Delta^2 A_{n+1}$$
$$-\ldots(-1)^{k-1}n_n\Delta^{k-n-1}A_{n+1}\},$$

so sind wir berechtigt,

ls der Formeln 23), 30), 31), 32), 33)
leicht folgende Ergebnisse:

$$+ n_1\alpha^{n-1}\beta f(r+\varphi) + n_2\alpha^{n-2}\beta^2 f(r+2\varphi)$$
$$+ n_n\beta^n f(r+n\varphi),$$

$$+ \ldots + \beta^n f(r+n\varphi)$$
$$n\psi) - (n-1)_1(\alpha\beta)\gamma^{n-2} f(r+\varphi+\overline{n-2}\psi)$$
$$_2(\alpha\beta)^2\gamma^{n-4} f(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi) - \ldots,$$

$$+n\psi) - n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}(\alpha\beta)\gamma^{n-2} f(r+\varphi+\overline{n-2}\psi)$$
$$\frac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha\beta)^2\gamma^{n-4} f(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi) - \ldots,$$

$$\frac{+2n\varphi)}{} = (\alpha\beta)^n f(r+n\varphi)$$

$$+\overline{n-1}\varphi+2\psi)$$

$$^{-2}\gamma^4 f(r+\overline{n-2}\varphi+4\psi)$$

$$\frac{1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(n-1)^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\gamma^{2n} f(r+2n\psi),$$

$$\frac{^{+1}f(r+2\overline{n+1}\varphi)}{+1} = \frac{n}{1}\cdot(\alpha\beta)^n\gamma f(r+n\varphi+\psi)$$

$$^3 f(r+\overline{n-1}\varphi+3\psi)$$

$$(\alpha\beta)^{n-2}\gamma^5 f(r+\overline{n-2}\varphi+5\psi)$$

$$\frac{(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\gamma^{2n+1} f(r+2\overline{n+1}\psi).$$

$$\alpha\beta)^n f(r+n\varphi)$$
$$[\beta^2 f(r+\overline{n+1}\varphi) + \alpha^2 f(r+\overline{n-1}\varphi)]$$
$$[\beta^3 f(r+\overline{n+1}\varphi+\psi) + \alpha^3 f(r+\overline{n-2}\varphi+\psi)]$$
$$f(r+\overline{n+1}\varphi+\overline{n-1}\psi) + \alpha^{n+1} f(r+\overline{n-1}\psi)].$$

eren Betrachtungen sehen wir uns jetzt
n, welche wirklich die unter $\mathfrak{E}$ namhaft
en. Die einfachste Function dieser Art


20*

§. 6.

Indem wir voraussetzen wollen, dass α, β, γ, φ und ψ von unabhängige Grössen bedeuten und die Function $f(r)$ von r an d Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{S}.\ \alpha f(r) + \beta f(r+\varphi) = \gamma f(r+\psi)$$

gebunden ist, nehmen wir folgende Hauptreihe an:

$$a_0 = \alpha^n f(r),\ a_1 = \alpha^{n-1}\gamma f(r+\psi),\ a_2 = \alpha^{n-2}\gamma^2 f(r+2\psi), \text{ u. s. w.}$$

Die successiven Differenzenreihen dieser Hauptreihe, die natürli mit steter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung unter $\mathfrak{S}$ e halten werden, sind:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0 = \alpha^{n-1}\beta f(r+\varphi),\ \Delta a_1 = \alpha^{n-2}\beta\gamma f(r+\varphi+\psi),$$
$$\Delta a_2 = \alpha^{n-3}\beta\gamma^2 f(r+\varphi+2\psi), \text{ u. s. w.}$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = \alpha^{n-2}\beta^2 f(r+2\varphi),\ \Delta^2 a_1 = \alpha^{n-3}\beta^2\gamma f(r+2\varphi+\psi),$$
$$\Delta^2 a_2 = \alpha^{n-4}\beta^2\gamma^2 f(r+2\varphi+2\psi), \text{ u. s. w.}$$

. . . .

$m$te Differenzenreihe:

$$\Delta^m a_0 = \alpha^{n-m}\beta^m f(r+m\varphi),\ \Delta^m a_1 = \alpha^{n-m-1}\beta^m\gamma f(r+m\varphi+\psi),$$
$$\Delta^m a_2 = \alpha^{n-m-2}\beta^m\gamma^2 f(r+m\varphi+2\psi), \text{ u. s. w.};$$

überhaupt ist:

$$\Delta^m a_s = \alpha^{n-m-s}\beta^m\gamma^s f(r+m\varphi+s\psi).$$

Durch Anwendung der Formel 21) erhalten wir hieraus fol gende Gleichung:

$$\gamma^n f(r+n\psi) - \alpha^n f(r) = \alpha^{n-1}\beta f(r+\varphi) + \alpha^{n-2}\beta\gamma f(r+\varphi+\psi)$$
$$+ \dots + \beta\gamma^{n-1} f(r+\varphi+\overline{n-1}\psi),$$

oder, wenn wir $r-\varphi$ für r setzen und beiderseits durch β divi diren:

$$41)\quad \frac{\gamma^n f(r+n\psi-\varphi) - \alpha^n f(r-\varphi)}{\beta} = \alpha^{n-1} f(r) + \alpha^{n-2}\gamma f(r+\psi)$$
$$+ \dots + \gamma^{n-1} f(r+\overline{n-1}\psi);$$

ferner erhalten wir vermittels der Formeln 23), 30), 31), 32), 33) und 39) nach dem Obigen leicht folgende Ergebnisse:

$$42)\quad \gamma^n f(r+n\psi) = \alpha^n f(r) + n_1\alpha^{n-1}\beta f(r+\varphi) + n_2\alpha^{n-2}\beta^2 f(r+2\varphi) + \dots + n_n\beta^n f(r+n\varphi),$$

$$43)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^n f(r) + \alpha^{n-1}\beta f(r+\varphi) + \dots + \beta^n f(r+n\varphi) \\ &\qquad = \gamma^n f(r+n\psi) - (n-1)_1 (\alpha\beta)\gamma^{n-2} f(r+\varphi+\overline{n-2}\psi) \\ &\qquad + (n-2)_2 (\alpha\beta)^2\gamma^{n-4} f(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi) - \dots, \end{aligned}\right.$$

$$44)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^n f(r)+\beta^n f(r+n\varphi) = \gamma^n f(r+n\psi) - n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}(\alpha\beta)\gamma^{n-2} f(r+\varphi+\overline{n-2}\psi) \\ &\qquad + n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha\beta)^2\gamma^{n-4} f(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi) - \dots, \end{aligned}\right.$$

$$45)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^n\cdot\frac{\alpha^{2n} f(r) + \beta^{2n} f(r+2n\varphi)}{2} = (\alpha\beta)^n f(r+n\varphi) \\ &- \frac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}\gamma^2 f(r+\overline{n-1}\varphi+2\psi) \\ &+ \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}\gamma^4 f(r+\overline{n-2}\varphi+4\psi) \\ &- \dots (-1)^n\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots(n^2-(n-1)^2)}{1.2.3.4\dots 2n}\gamma^{2n} f(r+2n\psi), \end{aligned}\right.$$

$$46)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^n\cdot n\cdot\frac{\alpha^{2n+1} f(r) + \beta^{2n+1} f(r+\overline{2n+1}\varphi)}{2n+1} = \frac{n}{1}\cdot(\alpha\beta)^n\gamma f(r+n\varphi+\psi) \\ &- \frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}\gamma^3 f(r+\overline{n-1}\varphi+3\psi) \\ &+ \frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}\gamma^5 f(r+\overline{n-2}\varphi+5\psi) \\ &\mp \dots (-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\dots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\dots 2n}\gamma^{2n+1} f(r+\overline{2n+1}\psi), \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma^{2n} f(r+2n\psi) = (2n)_n(\alpha\beta)^n f(r+n\varphi) \\ &+ (2n-1)_n(\alpha\beta)^{n-1}[\beta^2 f(r+\overline{n+1}\varphi) + \alpha^2 f(r+\overline{n-1}\varphi)] \\ &+ (2n-2)_n(\alpha\beta)^{n-2}\gamma[\beta^3 f(r+\overline{n+1}\varphi+\psi) + \alpha^3 f(r+\overline{n-2}\varphi+\psi)] \\ &+ \dots + n_n\gamma^{n-1}[\beta^{n+1} f(r+\overline{n+1}\varphi+\overline{n-1}\psi) + \alpha^{n+1} f(r+\overline{n-1}\psi)]. \end{aligned}\right.$$

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen sehen wir uns jetzt solchen Functionen um, welche wirklich die unter E namhaft ...te Bedingung erfüllen. Die einfachste Function dieser Art

ist $f(r)=r$. Dass diese Function in der That der Bedingung $\mathfrak{E}$ genügt, übersehen wir sofort aus der leicht zu verificirenden Gleichung

$$\alpha r+\beta[r+(\alpha+\beta)\varrho]=(\alpha+\beta)(r+\beta\varrho).$$

Um nun das, was sich für die allgemeinere Function $f(r)$ in dem Vorhergehenden ergeben hat, auf die speziellere $f(r)=r$ anwenden zu können, müssen wir also $\gamma=\alpha+\beta$, $\varphi=(\alpha+\beta)\varrho$ und $\psi=\beta\varrho$ setzen. Wir erhalten dann vermöge der Formeln 41), 42), 44), 45), 46), 47) durch einfache Substitution:

$$84)\ \begin{cases} \dfrac{(\alpha+\beta)^n[r+n\beta\varrho-(\alpha+\beta)\varrho]-\alpha^n[r-(\alpha+\beta)\varrho]}{\beta} \\ \quad =\alpha^{n-1}r+\alpha^{n-2}(\alpha+\beta)(r+\beta\varrho)+\alpha^{n-3}(\alpha+\beta)^2(r+2\beta\varrho) \\ \quad +\ldots.+(\alpha+\beta)^{n-1}(r+\overline{n-1}\,\beta\varrho), \end{cases}$$

$$49)\ (\alpha+\beta)^n(r+n\beta\varrho)=\alpha^n r+n_1\alpha^{n-1}\beta[r+(\alpha+\beta)\varrho] \\ +n_2\alpha^{n-2}\beta^2[r+2(\alpha+\beta)\varrho]+\ldots.+n_n\beta^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho],$$

$$50)\ \begin{cases} \alpha^n r+\beta^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho]=(\alpha+\beta)^n(r+n\beta\varrho) \\ \quad -n_2\cdot\dfrac{2_1}{(n-1)_1}\alpha\beta(\alpha+\beta)^{n-2}[r+(\alpha+\beta)\varrho+(n-2)\beta\varrho] \\ \quad +n_4\cdot\dfrac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)^{n-4}[r+2(\alpha+\beta)\varrho+(n-4)\beta\varrho]-\ldots., \end{cases}$$

$$51)\ \begin{cases} (-1)^n\cdot\dfrac{\alpha^{2n}r+\beta^{2n}[r+2n(\alpha+\beta)\varrho]}{2}=(\alpha\beta)^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho] \\ \quad -\dfrac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha+\beta)^2[r+(n-1)(\alpha+\beta)\varrho+2\beta\varrho] \\ \quad +\dfrac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)^4[r+(n-2)(\alpha+\beta)\varrho+4\beta\varrho] \\ \quad -\ldots.(-1)^n\dfrac{n^2(n^2-1^2)\ldots.(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}(\alpha+\beta)^{2n}[r+2n\beta\varrho], \end{cases}$$

$$52)\ \begin{cases} (-1)^n\cdot n\cdot\dfrac{\alpha^{2n+1}r+\beta^{2n+1}[r+(2n+1)(\alpha+\beta)\varrho]}{2n+1} \\ =\dfrac{n}{1}(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)[r+n(\alpha+\beta)\varrho+\beta\varrho] \\ -\dfrac{n+1}{3}\cdot\dfrac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha+\beta)^3[r+(n-1)(\alpha+\beta)\varrho+3\beta\varrho] \\ +\dfrac{n+2}{5}\cdot\dfrac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)^5[r+(n-2)(\alpha+\beta)\varrho+5\beta\varrho] \\ -\ldots.(-1)^n\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\dfrac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}(\alpha+\beta)^{2n+1}[r+(2n+1)\beta\varrho], \end{cases}$$

$$53)\begin{cases}(\alpha+\beta)^{2n}(r+2n\beta\varrho)=(2n)_n(\alpha\beta)^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho]\\ \quad+(2n-1)_n(\alpha\beta)^{n-1}[\beta^2[r+(n+1)(\alpha+\beta)\varrho]+\alpha^2[r+(n-1)(\alpha+\beta)\varrho]]\\ \quad+(2n-2)_n(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)[\beta^3[r+(n+1)(\alpha+\beta)\varrho+\beta\varrho]\\ \qquad\qquad+\alpha^3[r+(n-2)(\alpha+\beta)\varrho+\beta\varrho]]\\ \quad+\ldots+n_n(\alpha+\beta)^{n-1}[\beta^{n+1}[r+(n+1)(\alpha+\beta)\varrho+(n-1)\beta\varrho]\\ \qquad\qquad+\alpha^{n+1}[r+(n-1)\beta\varrho]],\end{cases}$$

und mittels der Formel 43):

$$\begin{aligned}&\alpha^n r+\alpha^{n-1}\beta[r+(\alpha+\beta)\varrho]+\ldots+\beta^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho]\\ &\quad=(\alpha+\beta)^n(r+n\beta\varrho)-(n-1)_1(\alpha\beta)(\alpha+\beta)^{n-2}[r+(\alpha+\beta)\varrho+(n-2)\beta\varrho]\\ &\quad+(n-2)_2(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)^{n-4}[r+2(\alpha+\beta)\varrho+(n-4)\beta\varrho]-\ldots\end{aligned}$$

Diese Formel ist noch einer bedeutenden Vereinfachung fähig, da die Reihe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens summirbar ist. Diese Summation findet folgendermaassen ihre Erledigung.

Es sei

$$S=\alpha^n r+\alpha^{n-1}\beta[r+(\alpha+\beta)\varrho]+\alpha^{n-2}\beta^2[r+2(\alpha+\beta)\varrho]+\ldots+\beta^n[r+n(\alpha+\beta)\varrho];$$

so ist

$$\begin{aligned}S&=(\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots+\beta^n)r\\ &+(\alpha+\beta)\varrho\beta[\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}\\ &\qquad+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}\\ &\qquad\qquad+\alpha^{n-3}\beta^2+\ldots+\beta^{n-1}\\ &\qquad\qquad\quad\cdots\cdots\\ &\qquad\qquad\qquad+\beta^{n-1}].\end{aligned}$$

Führen wir jetzt in Formel 48) die Substitutionen

$$\beta=x-y,\quad \alpha=y,\quad r=1 \text{ und } \varrho=0$$

ein und vertauschen gleichzeitig $n-1$ mit n, so erhalten wir

$$54)\quad \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}=x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots+y^n.$$

Durch Anwendung dieser Formel vereinfacht sich unser Ausdruck für S zunächst in folgenden:

$$S = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} r$$

$$+ (\alpha+\beta)\varrho\beta \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \beta . \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \beta^2 . \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\alpha - \beta} \right.$$

$$\left. + \ldots \beta^{n-1} . \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} + \beta^n . \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta}\right]$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} . r + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta\varrho[\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \beta^n - (n+1)\beta^n]$$

und, wenn die Formel 54) noch einmal benutzt wird, in

$$S = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} r + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta\varrho . \left[\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - (n+1)\beta^n\right]$$

$$= \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\left(r + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta\varrho\right) - (n+1)\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta^{n+1}\varrho.$$

Wir haben demnach nach dem Obigen:

$$55) \quad \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\left[r + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta\varrho\right] - (n+1)\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta^{n+1}\varrho$$

$$= \alpha^n r + \alpha^{n-1}\beta[r + (\alpha+\beta)\varrho] + \alpha^{n-2}\beta^2[r + 2(\alpha+\beta)\varrho]$$

$$+ \ldots + \beta^n[r + n(\alpha+\beta)\varrho];$$

also mit Rücksicht auf die Formel, welche unmittelbar auf die durch 53) bezeichnete folgt,

$$56) \quad \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\left[r + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta\varrho\right] - (n+1)\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\beta^{n+1}\varrho$$

$$= (\alpha+\beta)^n(r + n\beta\varrho) - (n-1)_1(\alpha\beta)(\alpha+\beta)^{n-2}[r + (\alpha + \overline{n-1}\beta)\varrho]$$

$$+ (n-2)_2(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)^{n-4}[r + (2\alpha + \overline{n-2}\beta)\varrho] - \ldots$$

Wird in Gleichung 49) $r=1$ und $\varrho=0$ gesetzt, so ergiebt sich die allbekannte Formel

$$57) \quad (\alpha+\beta)^n = \alpha^n + n_1\alpha^{n-1}\beta + n_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + n_n\beta^n,$$

welche das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten ausspricht und zugleich den Grund enthält, weswegen die Grössenform

$$n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

der $k$te Binomialcoefficient für den Exponenten n genannt wird.

Für $\alpha=\beta=1$ erhalten wir hieraus folgende Eigenschaft der binomischen Coefficienten:

$$58)\quad 2^n=1+n_1+n_2+\ldots.+n_n,$$

und für $\alpha=1$ und $\beta=-1$:

$$59)\quad 0=1-n_1+n_2-\ldots.(-1)^n n_n.$$

Setzen wir ferner in den Formeln 50) bis 53) und in der Formel 56) $r=1$ und $\varrho=0$, so gewinnen wir nachstehende Resultate:

$$60)\quad \alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)^n-n_2.\frac{2_1}{(n-1)_1}(\alpha\beta)(\alpha+\beta)^{n-2}$$

$$+n_4.\frac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)^{n-4}-\ldots.,$$

$$61)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n.\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}=(\alpha\beta)^n-\frac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha+\beta)^2\\&+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)^4\\&-\ldots.(-1)^n\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots.(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}(\alpha+\beta)^{2n},\end{aligned}\right.$$

$$62)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n.n.\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2n+1}=\frac{n}{1}.(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)-\frac{n+1}{3}.\frac{n^2}{1.2}(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha+\beta)^3\\&+\frac{n+2}{5}.\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)^5\\&-\ldots.(-1)^n.\frac{2n}{2n+1}.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}(\alpha+\beta)^{2n+1},\end{aligned}\right.$$

$$63)\quad (\alpha+\beta)^{2n}=(2n)_n(\alpha\beta)^n+(2n-1)_n(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2+\beta^2)$$

$$+(2n-2)_n(\alpha\beta)^{n-2}(\alpha+\beta)(\alpha^3+\beta^3)+\ldots.+n_n(\alpha+\beta)^{n-1}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

und

$$64)\quad \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=(\alpha+\beta)^n-(n-1)_1(\alpha\beta)(\alpha+\beta)^{n-2}$$

$$+(n-2)_2(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)^{n-4}-\ldots.$$

Die speziellere Annahme $\alpha=\beta=1$ in den Formeln 60) bis 64) liefert uns, wenn wir zugleich berücksichtigen, dass nach Gleich. 54):

$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}=n+1 \quad \text{für} \quad \alpha=\beta=1,$$

die Ergebnisse:

$$65)\quad 1=2^{n-1}-n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}2^{n-3}+n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}\cdot 2^{n-5}-\ldots,$$

$$66)\quad (-1)^n=1-\frac{n^2}{1.2}.2^2+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}.2^4$$

$$-\ldots(-1)^n.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}.2^{2n},$$

$$67)\quad (-1)^n.\frac{n}{2n+1}=\frac{n}{1}-\frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}.2^2+\frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}.2^4$$

$$-\ldots(-1)^n.\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}.2^{2n},$$

$$68)\quad 2^{2n}=(2n)_n+(2n-1)_n.2+(2n-2)_n.2^2+\ldots+n_n.2^n,$$

$$69)\quad n+1=2^n-(n-1)_1 2^{n-2}+(n-2)_2 2^{n-4}-\ldots$$

Zwei andere Functionen, welche die im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Bedingungsgleichung unter ϵ befriedigen, sind $f(r)=\sin r$ und $f(r)=\cos r$; denn es ist einerseits

$$\sin(\varphi-\psi)\sin r+\sin\psi\sin(r+\varphi)=(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi)\sin r$$

$$+\sin\psi(\sin r\cos\varphi+\cos r\sin\varphi)=\sin\varphi(\cos\psi\sin r+\sin\psi\cos r),$$

also

$$\sin(\varphi-\psi)\sin r+\sin\psi\sin(r+\varphi)=\sin\varphi\sin(r+\psi),$$

und andererseits:

$$\sin(\varphi-\psi)\cos r+\sin\psi\cos(r+\varphi)=(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi)\cos r$$

$$+\sin\psi(\cos r\cos\varphi-\sin r\sin\varphi)=\sin\varphi(\cos\psi\cos r-\sin\psi\sin r),$$

also

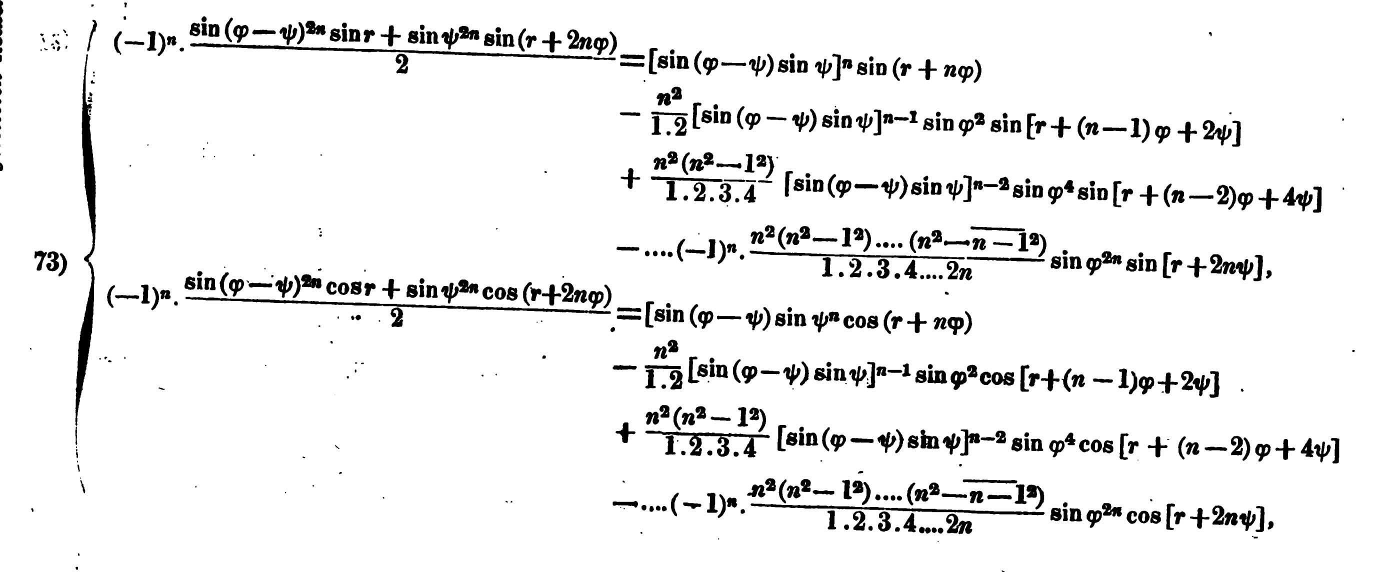
$$\sin(\varphi-\psi)\cos r+\sin\psi\cos(r+\varphi)=\sin\varphi\cos(r+\psi).$$

Um daher die Gleichungen 41) bis 47) auf die Functionen $f(r)=\sin r$ und $f(r)=\cos r$ anwendbar zu machen, müssen wir für beide Functionen $\alpha=\sin(\varphi-\psi)$, $\beta=\sin\psi$ und $\gamma=\sin\varphi$ setzen. Wir erhalten alsdann vermöge der Formeln 41), 42), 44), 45), 46) und 47):

$$70)\begin{cases} \dfrac{\sin\varphi^n \sin(r+n\psi-\varphi)-\sin(\varphi-\psi)^n\sin(r-\varphi)}{\sin\psi}=\sin(\varphi-\psi)^{n-1}\sin r+\sin(\varphi-\psi)^{n-2}\sin\varphi\sin(r+\psi) \\ \qquad +\ldots+\sin\varphi^{n-1}\sin(r+\overline{n-1}\,\psi), \\ \dfrac{\sin\varphi^n \cos(r+n\psi-\varphi)-\sin(\varphi-\psi)^n\cos(r-\varphi)}{\sin\psi}=\sin(\varphi-\psi)^{n-1}\cos r+\sin(\varphi-\psi)^{n-2}\sin\varphi\cos(r+\psi) \\ \qquad +\ldots+\sin\varphi^{n-1}\cos(r+\overline{n-1}\,\psi), \end{cases}$$

$$71)\begin{cases} \sin\varphi^n\sin(r+n\psi)=\sin(\varphi-\psi)^n\sin r+n_1\sin(\varphi-\psi)^{n-1}\sin\psi\sin(r+\varphi)+n_2\sin(\varphi-\psi)^{n-2}\sin\psi^2\sin(r+2\varphi) \\ \qquad +\ldots+n_n\sin\psi^n\sin(r+n\varphi), \\ \sin\varphi^n\cos(r+n\psi)=\sin(\varphi-\psi)^n\cos r+n_1\sin(\varphi-\psi)^{n-1}\sin\psi\cos(r+\varphi)+n_2\sin(\varphi-\psi)^{n-2}\sin\psi^2\cos(r+2\varphi) \\ \qquad +\ldots+n_n\sin\psi^n\cos(r+n\varphi), \end{cases}$$

$$72)\begin{cases} \sin(\varphi-\psi)^n\sin r+\sin\psi^n\sin(r+n\varphi)=\sin\varphi^n\sin(r+n\psi)-n_2\cdot\dfrac{2_1}{(n-1)_1}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]\sin\varphi^{n-2}\sin[r+\varphi+(n-2)\psi] \\ \qquad +n_4\cdot\dfrac{4_2}{(n-1)_2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^2\sin\varphi^{n-4}\sin[r+2\varphi+(n-4)\psi]-\ldots, \\ \sin(\varphi-\psi)^n\cos r+\sin\psi^n\cos(r+n\varphi)=\sin\varphi^n\cos(r+n\psi)-n_2\cdot\dfrac{2_1}{(n-1)_1}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]\sin\varphi^{n-2}\cos[r+\varphi+(n-2)\psi] \\ \qquad +n_4\cdot\dfrac{4_2}{(n-1)_2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^2\sin\varphi^{n-4}\cos[r+2\varphi+(n-4)\psi]-\ldots, \end{cases}$$



$$
73)\left\{\begin{aligned}
&(-1)^n.\frac{\sin(\varphi-\psi)^{2n}\sin r+\sin\psi^{2n}\sin(r+2n\varphi)}{2}=[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^n\sin(r+n\varphi)\\
&\quad-\frac{n^2}{1.2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}\sin\varphi^2\sin[r+(n-1)\varphi+2\psi]\\
&\quad+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi^4\sin[r+(n-2)\varphi+4\psi]\\
&\quad-\ldots.(-1)^n.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots.(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}\sin\varphi^{2n}\sin[r+2n\psi],\\
&(-1)^n.\frac{\sin(\varphi-\psi)^{2n}\cos r+\sin\psi^{2n}\cos(r+2n\varphi)}{2}=[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi^n\cos(r+n\varphi)\\
&\quad-\frac{n^2}{1.2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}\sin\varphi^2\cos[r+(n-1)\varphi+2\psi]\\
&\quad+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi^4\cos[r+(n-2)\varphi+4\psi]\\
&\quad-\ldots.(-1)^n.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots.(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots.2n}\sin\varphi^{2n}\cos[r+2n\psi],
\end{aligned}\right.
$$

$$
74)\left\{\begin{aligned}
&(-1)^n . n . \frac{\sin(\varphi-\psi)^{2n+1}\sin r+\sin\psi^{2n+1}\sin[r+(2n+1)\varphi]}{2n+1}=\frac{n}{1}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^n\sin\varphi\sin[r+n\varphi+\psi]\\
&\qquad-\frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}\sin\varphi^3\sin[r+(n-1)\varphi+3\psi]\\
&\qquad+\frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi^5\sin[r+(n-2)\varphi+5\psi]\\
&\qquad-\ldots(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots\ldots 2n}\sin\varphi^{2n+1}\sin[r+(2n+1)\psi],\\
&(-1)^n . n . \frac{\sin(\varphi-\psi)^{2n+1}\cos r+\sin\psi^{2n+1}\cos[r+(2n+1)\varphi]}{2n+1}=\frac{n}{1}.[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^n\sin\varphi\cos[r+n\varphi+\psi]\\
&\qquad-\frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}\sin\varphi^3\cos[r+(n-1)\varphi+3\psi]\\
&\qquad+\frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi^5\cos[r+(n-2)\varphi+5\psi]\\
&\qquad-\ldots(-1)^n\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots\ldots 2n}\sin\varphi^{2n+1}\cos[r+(2n+1)\psi],
\end{aligned}\right.
$$

$$75)\quad \begin{cases} \sin\varphi^{2n}\sin(r+2n\psi) = (2n)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^n\sin(r+n\varphi) \\ \quad + (2n-1)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}[\sin\psi^2\sin(r+\overline{n+1}\varphi)+\sin(\varphi-\psi)^2\sin(r+\overline{n-1}\varphi)] \\ \quad + (2n-2)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi[\sin\psi^3\sin(r+\overline{n+1}\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)^3\sin(r+\overline{n-2}\varphi+\psi)] \\ \quad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad + n_n\sin\varphi^{n-1}[\sin\psi^{n+1}\sin(r+\overline{n+1}\varphi+\overline{n-1}\psi)+\sin(\varphi-\psi)^{n+1}\sin(r+\overline{n-1}\psi)], \\ \sin\varphi^{2n}\cos(r+2n\psi) = (2n)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^n\cos(r+n\varphi) \\ \quad + (2n-1)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-1}[\sin\psi^2\cos(r+\overline{n+1}\varphi)+\sin(\varphi-\psi)^2\cos(r+\overline{n-1})\varphi)] \\ \quad + (2n-2)_n[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^{n-2}\sin\varphi[\sin\psi^3\cos(r+\overline{n+1}\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi)^3\cos(r+\overline{n-2}\varphi+\psi)] \\ \quad +\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad + n_n\sin\varphi^{n-1}[\sin\psi^{n+1}\cos(r+\overline{n+1}\varphi+\overline{n-1}\psi)+\sin(\varphi-\psi)^{n+1}\cos(r+\overline{n-1}\psi)]. \end{cases}$$

Die Formeln 70) und 71) sind noch einer bemerkenswerthen Transformation fähig. In dieser Beziehung setzen wir:

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi} \text{ oder } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi};$$

dann ist, wenn wir zugleich der Kürze wegen $\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta\cos\psi+\beta^2}=q$ setzen,

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}} = \frac{\beta\sin\psi}{q} \text{ und } \cos\varphi = \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\alpha+\beta\cos\psi}{q}, \text{ und } \sin(\psi-\varphi) = \sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi = \frac{\alpha\sin\psi}{q}.$$

Durch die Substitution dieser Werthe gehen die Formeln unter 70) nach einigen Abkürzungen über in:

$$\frac{\alpha^n \sin\left(r - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi}\right) + (-1)^{n-1}\beta^n \sin\left(r+n\psi - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi}\right)}{q} = \alpha^{n-1}\sin r - \alpha^{n-2}\beta\sin(r+\psi) + \alpha^{n-3}\beta^2\sin(r+2\psi)$$

$$- \ldots (-1)^{n-1}\beta^{n-1}\sin(r+\overline{n-1}\,\psi) = P$$

und

$$\frac{\alpha^n \cos\left(r - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi}\right) + (-1)^{n-1}\beta^n \cos\left(r+n\psi - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi}\right)}{q} = \alpha^{n-1}\cos r - \alpha^{n-2}\beta\cos(r+\psi) + \alpha^{n-3}\beta^2\cos(r+2\psi)$$

$$- \ldots (-1)^{n-1}\beta^{n-1}\cos(r+\overline{n-1}\,\psi) = Q.$$

Berücksichtigen wir ferner, dass

$$\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\psi}{\alpha+\beta\cos\psi} = \arcsin\frac{\beta\sin\psi}{q} = \arccos\frac{\alpha+\beta\cos\psi}{q},$$

so erhalten wir aus den beiden letzten Gleichungen, unter Anwendung der bekannten Ausdrücke für den Sinus und Cosinus der Summe zweier Winkel:

$$\frac{\alpha^n\left[\sin r.\dfrac{\alpha+\beta\cos\psi}{q} - \cos r.\dfrac{\beta\sin\psi}{q}\right] + (-1)^{n-1}\beta^n\left[\sin(r+n\psi).\dfrac{\alpha+\beta\cos\psi}{q} - \cos(r+n\psi).\dfrac{\beta\sin\psi}{q}\right]}{q} = P,$$

und

$$\frac{\alpha^n\left[\cos r.\dfrac{\alpha+\beta\cos\psi}{q} + \sin r.\dfrac{\beta\sin\psi}{q}\right] + (-1)^{n-1}\beta^n\left[\cos(r+n\psi).\dfrac{\alpha+\beta\cos\psi}{q} + \sin(r+n\psi).\dfrac{\beta\sin\psi}{q}\right]}{q} = Q;$$

und endlich, wenn wir die beiden letzten Resultate mit den beiden vorhergehenden vergleichen:

$$78)\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin(\varphi-\psi)^{n+2}\sin r-\sin(\varphi-\psi)^{n+1}\sin\psi\sin(r-\varphi)-\sin(\varphi-\psi)\sin\psi^{n+1}\sin(r+\overline{n+1}\varphi)+\sin\psi^{n+2}\sin(r+n\varphi)}{\sin(\varphi-\psi)^2-2\sin(\varphi-\psi)\sin\psi\cos\varphi+\sin\psi^2}\\&\quad=\sin\varphi^n\sin(r+n\psi)-(n-1)_1[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]\sin\varphi^{n-2}\sin(r+\varphi+\overline{n-2}\psi)\\&\quad+(n-2)_2[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^2\sin\varphi^{n-4}\sin(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi)-\ldots,\\&\frac{\sin(\varphi-\psi)^{n+2}\cos r-\sin(\varphi-\psi)^{n+1}\sin\psi\cos(r-\varphi)-\sin(\varphi-\psi)\sin\psi^{n+1}\cos(r+\overline{n+1}\varphi)+\sin\psi^{n+2}\cos(r+n\varphi)}{\sin(\varphi-\psi)^2-2\sin(\varphi-\psi)\sin\psi\cos\varphi+\sin\psi^2}\\&\quad=\sin\varphi^n\cos(r+n\psi)-(n-1)_1[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]\sin\varphi^{n-2}\cos(r+\varphi+\overline{n-2}\psi)\\&\quad+(n-2)_2[\sin(\varphi-\psi)\sin\psi]^2\sin\varphi^{n-4}\cos(r+2\varphi+\overline{n-4}\psi)-\ldots\end{aligned}\right.$$

Die Formeln 70) bis 78) sind wegen ihrer Allgemeinheit sehr bemerkenswerth. Einige Spezialitäten derselben mögen nun noch folgen.

Es sei zuerst $\varphi=2\psi$. Wir erhalten dann aus den Formeln 70) bis 75) nach ganz einfachen goniometrischen Reductionen:

$$79)\left\{\begin{aligned}&2^n\cos\psi^n\sin(r+\overline{n-2}\psi)-\sin(r-2\psi)=\sin r+2\cos\psi\sin(r+\psi)+\ldots+2^{n-1}\cos\psi^{n-1}\sin(r+\overline{n-1}\psi),\\&2^n\cos\psi^n\cos(r+\overline{n-2}\psi)-\cos(r-2\psi)=\cos r+2\cos\psi\cos(r+\psi)+\ldots+2^{n-1}\cos\psi^{n-1}\cos(r+\overline{n-1}\psi);\end{aligned}\right.$$

$$80)\left\{\begin{aligned}&2^n\cos\psi^n\sin(r+n\psi)=\sin r+n_1\sin(r+2\psi)+n_2\sin(r+4\psi)+\ldots+n_n\sin(r+2n\psi),\\&2^n\cos\psi^n\cos(r+n\psi)=\cos r+n_1\cos(r+2\psi)+n_2\cos(r+4\psi)+\ldots+n_n\cos(r+2n\psi);\end{aligned}\right.$$

$$81)\quad \cos n\psi$$

$$=2^{n-1}\cos\psi^n - n_2 . \frac{2_1}{(n-1)_1} 2^{n-3}\cos\psi^{n-2} + n_4 . \frac{4_2}{(n-1)_2} 2^{n-5}\cos\psi^{n-4} - ..,$$

welche Formel den Cosinus eines vielfachen Bogens in den Potenzen des Cosinus vom einfachen Bogen ausdrückt.

$$82)\left\{\begin{array}{l} (-1)^n\cos 2n\psi = 1 - \frac{2^2n^2}{1.2}\cos\psi^2 + 2^4 . \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}\cos\psi^4 \\ \qquad - ....(-1)^n . 2^{2n} . \frac{n^2(n^2-1^2)....(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4....2n}\cos\psi^{2n}, \end{array}\right.$$

$$83)\left\{\begin{array}{l} (-1)^n . \frac{n}{2n+1}\cos(2n+1)\psi = 2 . \frac{n}{1}\cos\psi - 2^3 . \frac{n+1}{3} . \frac{n^2}{1.2}\cos\psi^3 \\ + 2^5 . \frac{n+2}{5} . \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}\cos\psi^5 - .... \\ .... (-1)^n . 2^{2n+1} . \frac{2n}{2n+1} . \frac{n^2(n^2-1^2)....(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4....2n}\cos\psi^{2n+1}, \end{array}\right.$$

und

$$84)\left\{\begin{array}{l} 2^{2n}\cos\psi^{2n} = (2n)_n + (2n-1)_n . 2\cos 2\psi + (2n-2)_n 2^2\cos\psi\cos 3\psi \\ + (2n-3)_n 2^3\cos\psi^2\cos 4\psi + ... + n_n . 2^n\cos\psi^{n-1}\cos(n+1)\psi. \end{array}\right.$$

Was endlich die Formel 78) betrifft, so geht dieselbe für $\varphi = 2\psi$ in folgende über:

$$85)\quad \frac{\sin(n+1)\psi}{\sin\psi} = 2^n\cos\psi^n - (n-1)_1 2^{n-2}\cos\psi^{n-2} + (n-2)_2 2^{n-4}\cos\psi^{n-4} - ....$$

Lassen wir in den Formeln unter 80) ψ in $\psi + \frac{\pi}{2}$ übergehen, so folgern wir aus ihnen mit Leichtigkeit:

$$86)\left\{\begin{array}{l} (-1)^n 2^n\sin\psi^n\sin[r + n(\psi+\frac{\pi}{2})] = \sin r - n_1\sin(r+2\psi) \\ \qquad + n_2\sin(r+4\psi) - ....(-1)^n n_n\sin(r+2n\psi), \\ (-1)^n 2^n\sin\psi^n\cos[r + n(\psi+\frac{\pi}{2})] = \cos r - n_1\cos(r+2\psi) \\ \qquad + n_2\cos(r+4\psi) - ....(-1)^n n_n\cos(r+2n\psi). \end{array}\right.$$

In der zweiten der durch 80) bezeichneten Gleichungen wollen wir jetzt $r + n\psi = 0$, also $r = -n\psi$ setzen; wir erhalten dann:

$$2^n \cos\psi^n = \cos n\psi + n_1 \cos(n-2)\psi + n_2 \cos(n-4)\psi$$
$$+ \ldots + n_{n-1} \cos(n-2)\psi + n_n \cos n\psi,$$

und hieraus, wenn wir die Cosinus der Gleichvielfachen des Bogens ψ vereinigen und die Relation $n_m = n_{n-m}$ beachten, für ein gerades n:

87a) $$2^{n-1} \cos\psi^n = \cos n\psi + n_1 \cos(n-2)\psi + n_2 \cos(n-4)\psi + \ldots + \tfrac{1}{2} n_{\frac{1}{2}n},$$

sowie für ein ungerades n:

87b) $$2^{n-1} \cos\psi^n = \cos n\psi + n_1 \cos(n-2)\psi + n_2 \cos(n-4)\psi$$
$$+ \ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)} \cos\psi.$$

Wenn wir ferner in der zweiten der durch 86) bezeichneten Formeln $r + n(\psi + \frac{\pi}{2}) = 0$, also $r = -n(\psi + \frac{\pi}{2})$ setzen, so erhalten wir durch ein ähnliches Verfahren wie vorher für ein gerades n:

88a) $$(-1)^n 2^{n-1} \sin\psi^n = \cos n\psi - n_1 \cos(n-2)\psi + n_2 \cos(n-4)\psi$$
$$- \ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \tfrac{1}{2} n_{\frac{1}{2}n},$$

und für ein ungerades n:

88b) $$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} 2^{n-1} \sin\psi^n = \sin n\psi - n_1 \sin(n-2)\psi + n_2 \sin(n-4)\psi$$
$$- \ldots (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n_{\frac{1}{2}(n-1)} \sin\psi.$$

Vermittels der vier letzten Formeln kann jede Cosinus- oder Sinus-Potenz eines positiven ganzen Exponenten durch die Cosinus oder Sinus der Vielfachen des Bogens ausgedrückt werden.

Es liesse sich leicht noch eine grosse Anzahl von Spezialitäten aus den allgemeinen Formeln 70) bis 78) ableiten, von denen jedoch hier nur folgende Platz finden mögen, da die übrigen diesen an Eleganz der Form nachstehen.

Die Substitution $\psi = 2\varphi$ in den Formeln 70), 71), 72), 73), 74) und 78) führt uns in dieser Beziehung nach einfacher Rechnung sogleich auf die Resultate:

89) $$\begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin(r + \overline{2n-1}\varphi) + \sin(r-\varphi)}{2\cos\varphi} = \sin r - \sin(r+2\varphi) \\ \qquad + \sin(r+4\varphi) - \ldots (-1)^{n-1} \sin(r + \overline{2n-2}\varphi), \\ \dfrac{(-1)^{n-1}\cos(r + \overline{2n-1}\varphi) + \cos(r-\varphi)}{2\cos\varphi} = \cos r - \cos(r+2\varphi) \\ \qquad + \cos(r+4\varphi) - \ldots (-1)^{n-1} \cos(r + \overline{2n-2}\varphi), \end{cases}$$

$$90)\quad \begin{cases} (-1)^n \sin(r+2n\varphi) = \sin r - 2n_1 \cos\varphi \sin(r+\varphi) + 2^2 n_2 \cos\varphi^2 \sin(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n 2^n n_n \cos\varphi^n \sin(r+n\varphi), \\ (-1)^n \cos(r+2n\varphi) = \cos r - 2n_1 \cos\varphi \cos(r+\varphi) + 2^2 n_2 \cos\varphi^2 \cos(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n 2^n n_n \cos\varphi^n \cos(r+n\varphi); \end{cases}$$

$$91)\quad \begin{cases} (-1)^n \sin r + 2^n \cos\varphi^n \sin(r+n\varphi) = \sin(r+2n\varphi) + n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1}(2\cos\varphi)\sin(r+\overline{2n-3}\,\varphi) \\ \qquad + n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2}(2\cos\varphi)^2 \sin(r+\overline{2n-6}\varphi) + \ldots, \\ (-1)^n \cos r + 2^n \cos\varphi^n \cos(r+n\varphi) = \cos(r+2n\varphi) + n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1}(2\cos\varphi)\cos(r+\overline{2n-3}\varphi) \\ \qquad + n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2}(2\cos\varphi)^2 \cos(r+\overline{2n-6}\varphi) + \ldots; \end{cases}$$

$$92)\quad \begin{cases} \frac{(2\cos\varphi)^{2n}\sin(r+2n\varphi)+\sin r}{2} = (2\cos\varphi)^n \sin(r+n\varphi) + \frac{n^2}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-1}\sin(r+\overline{n+3}\varphi) \\ \qquad + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(2\cos\varphi)^{n-2}\sin(r+\overline{n+6}\varphi) + \ldots + \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\sin(r+4n\varphi), \\ \frac{(2\cos\varphi)^{2n}\cos(r+2n\varphi)+\cos r}{2} = (2\cos\varphi)^n \cos(r+n\varphi) + \frac{n^2}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-1}\cos(r+\overline{n+3}\varphi) \\ \qquad + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(2\cos\varphi)^{n-2}\cos(r+\overline{n+6}\varphi) + \ldots + \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\cos(r+4n\varphi); \end{cases}$$

$$93)\begin{cases}\frac{n}{2n+1}\cdot\left[(2\cos\varphi)^{2n+1}\sin(r+\overline{2n+1}\varphi)-\sin r\right]=\frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n}\sin(r+\overline{n+2}\varphi)+\frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-1}\sin(r+\overline{n+5})\varphi\\ \qquad+\frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(2\cos\varphi)^{n-2}\sin(r+\overline{n+8}\varphi)+\ldots+\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots2n}\sin(r+\overline{4n+2}\varphi),\\ \frac{n}{2n+1}\cdot\left[(2\cos\varphi)^{2n+1}\cos(r+\overline{2n+1}\varphi)-\cos r\right]=\frac{n}{1}(2\cos\varphi)^{n}\cos(r+\overline{n+2}\varphi)+\frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}(2\cos\varphi)^{n-1}\cos(r+\overline{n+5})\varphi\\ \qquad+\frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(2\cos\varphi)^{n-2}\cos(r+\overline{n+8}\varphi)+\ldots+\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots2n}\cos(r+\overline{4n+2}\varphi);\end{cases}$$

und

$$94)\begin{cases}\frac{(-1)^n\left[\sin r+2\cos\varphi\sin(r-\varphi)\right]+(2\cos\varphi)^{n+1}\left[\sin(r+\overline{n+1}\varphi)+2\cos\varphi\sin(r+n\varphi)\right]}{1+2^3\cos\varphi^2}\\ \qquad=\sin(r+2n\varphi)+(n-1)_1(2\cos\varphi)\sin(r+\overline{2n-3}\varphi)+(n-2)_2(2\cos\varphi)^2\sin(r+\overline{2n-6}\varphi)+\ldots,\\ \frac{(-1)^n\left[\cos r+2\cos\varphi\cos(r-\varphi)\right]+(2\cos\varphi)^{n+1}\left[\cos(r+\overline{n+1}\varphi)+2\cos\varphi\cos(r+n\varphi)\right]}{1+2^3\cos\varphi^2}\\ \qquad=\cos(r+2n\varphi)+(n-1)_1(2\cos\varphi)\cos(r+\overline{2n-3}\varphi)+(n-2)_2(2\cos\varphi)^2\cos(r+\overline{2n-6}\varphi)+\ldots\end{cases}$$

Die Ausdrücke auf der linken Seite in den Formeln 89) gestatten eine Vereinfachung, sobald wir uns auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n einlassen; somit erhalten wir für ein gerades n:

$$95^a)\quad \begin{cases} -\dfrac{\cos(r+\overline{n-1}\varphi)\sin n\varphi}{\cos\varphi}=\sin r-\sin(r+2\varphi)+\sin(r+4\varphi)-\ldots-\sin(r+\overline{2n-2}\varphi), \\ \dfrac{\sin(r+\overline{n-1}\varphi)\sin n\varphi}{\cos\varphi}=\cos r-\cos(r+2\varphi)+\cos(r+4\varphi)-\ldots-\cos(r+\overline{2n-2}\varphi); \end{cases}$$

und für ein ungerades n:

$$95^b)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(r+\overline{n-1}\varphi)\cos n\varphi}{\cos\varphi}=\sin r-\sin(r+2\varphi)+\sin(r+4\varphi)-\ldots+\sin(r+\overline{2n-2}\varphi), \\ \dfrac{\cos(r+\overline{n-1}\varphi)\cos n\varphi}{\cos\varphi}=\cos r-\cos(r+2\varphi)+\cos(r+4\varphi)-\ldots+\cos(r+\overline{2n-2}\varphi). \end{cases}$$

Setzen wir ferner in den Formeln 70) und 71) $\varphi=\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir:

$$96)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\psi^n\cos r-\cos(r+n\psi)}{\sin\psi}=\cos\psi^{n-1}\sin r+\cos\psi^{n-2}\sin(r+\psi)+\cos\psi^{n-3}\sin(r+2\psi)+\ldots+\sin(r+\overline{n-1}\psi), \\ \dfrac{\sin(r+n\psi)-\cos\psi^n\sin r}{\sin\psi}=\cos\psi^{n-1}\cos r+\cos\psi^{n-2}\cos(r+\psi)+\cos\psi^{n-3}\cos(r+2\psi)+\ldots+\cos(r+\overline{n-1}\psi); \end{cases}$$

$$97)\quad \begin{cases} \sin(r+n\psi)=\cos\psi^n\sin r+n_1\cos\psi^{n-1}\sin\psi\sin\left(r+\frac{\pi}{2}\right)+n_2\cos\psi^{n-2}\sin\psi^2\sin\left(r+2\frac{\pi}{2}\right)+\ldots+n_n\sin\psi^n\sin\left(r+n\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

und, wenn wir in den letzten zwei Gleichungen noch $r=0$ setzen, die bekannten Formeln:

$$98)\ \begin{cases} \sin n\psi = n_1 \cos\psi^{n-1}\sin\psi - n_3\cos\psi^{n-3}\sin\psi^3 + n_5\cos\psi^{n-5}\sin\psi^5 - \ldots, \\ \cos n\psi = \cos\psi^n - n_2\cos\psi^{n-2}\sin\psi^2 + n_4\cos\psi^{n-4}\sin\psi^4 - \ldots; \end{cases}$$

welche den Sinus und Cosinus eines vielfachen Bogens in den Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Bogen ausdrücken.

Die spezielle Annahme $\psi=\frac{\pi}{2}$ in Gleichung 71) und $\varphi=\frac{\psi}{2}+\frac{\pi}{2}$ in Gleichung 70) giebt uns endlich die Formeln:

$$99)\ \begin{cases} (-1)^n\sin\varphi^n\sin(r+n\frac{\pi}{2}) = \cos\varphi^n\sin r - n_1\cos\varphi^{n-1}\sin(r+\varphi) \\ \qquad + n_2\cos\varphi^{n-2}\sin(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n n_n\sin(r+n\varphi), \\ (-1)^n\sin\varphi^n\cos(r+n\frac{\pi}{2}) = \cos\varphi^n\cos r - n_1\cos\varphi^{n-1}\cos(r+\varphi) \\ \qquad + n_2\cos\varphi^{n-2}\cos(r+2\varphi) - \ldots (-1)^n n_n\cos(r+n\varphi); \end{cases}$$

und

$$100)\ \begin{cases} \dfrac{\sin(r+\overline{n-1}\frac{\psi}{2})\sin\frac{1}{2}n\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi} = \sin r + \sin(r+\psi) + \sin(r+2\psi) \\ \qquad + \ldots + \sin(r+\overline{n-1}\psi), \\ \dfrac{\cos(r+\overline{n-1}\frac{\psi}{2})\sin\frac{1}{2}n\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi} = \cos r + \cos(r+\psi) + \cos(r+2\psi) \\ \qquad + \ldots + \cos(r+\overline{n-1}\psi). \end{cases}$$

Die letzten zwei Formeln lehren, Sinus- und Cosinus-Summen von Bögen zu berechnen, die in einer arithmetischen Progression unter einander stehen.

Einige Worte noch mögen diese goniometrischen Untersuchungen beschliessen. Die meisten der im Vorhergehenden enthaltenen bekannteren Formeln der Goniometrie werden gewöhnlich durch Vermittelung des Imaginären nachgewiesen. So elegant auch derartige Beweise sind, so ist doch nicht in Abrede zu stellen, dass die Einführung der imaginären Grössen der Natur des Gegenstandes, mit dem wir es hier zu thun haben, gänzlich fremdartig ist. Die Goniometrie bedarf nicht der Theorie der imaginären Grössen, wohl aber die letztere der ersteren. Ueberdiess ist zu bemerken, dass die Beweise mit Hülfe des Imaginären keineswegs

elementar genannt werden können, da der Anfänger wohl ohne Schwierigkeit mit imaginären Grössen rechnen kann, aber über ihre eigentliche Bedeutung sich noch im Unklaren befindet. Frei von diesen Mängeln ist die Darstellungsmethode, die wir im Vorhergehenden in Anwendung gebracht haben, und dürfte zur Einführung der im Vorhergehenden entwickelten Formeln in die Elemente der Goniometrie Veranlassung geben.

§. 7.

Zwischen den Facultäten, das heisst Grössen von der Form $\alpha(\alpha+k)(\alpha+2k)\ldots(\alpha+\overline{n-1}k)$ existirt eine grosse Anzahl interessanter Relationen, auf deren Entwickelung, wie wir sogleich sehen werden, die Theorie der höheren Differenzenreihen mit dem besten Erfolge angewendet werden kann. Um der Darstellung dieser Relationen die möglichste Kürze zu verleihen, schliessen wir uns der üblichen Bezeichnung der Facultäten an und setzen mit Crelle:

$$\alpha(\alpha+k)(\alpha+2k)\ldots(\alpha+\overline{n-1}k)=(\alpha,k)^n$$

und

$$(\alpha,k)^0=1.$$

Dass durch diese Grössenform auch die Binomialcoefficienten dargestellt werden können, geht sogleich aus der Gleichung

$$\mu_n=\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n}=\frac{(\mu,-1)^n}{(1,1)^n}$$

hervor. Diess vorausgesetzt, entwickeln wir jetzt mittels der leicht zu beweisenden Formel:

$$(\alpha,k)^{m+1}(\beta,k)^{r-1}(\alpha+\beta+\overline{m+r}k,k)^x+(\alpha,k)^m(\beta,k)^r(\alpha+\beta+\overline{m+r}k,k)^x$$
$$=(\alpha,k)^m(\beta,k)^{r-1}(\alpha+\beta+\overline{m+r-1}k,k)^{x+1}$$

aus der Reihe:

$$a_0=(\alpha,k)^\nu,\quad a_1=(\alpha,k)^{\nu-1}(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k,k)^1,$$
$$a_2=(\alpha,k)^{\nu-2}(\alpha+\beta+\overline{\nu-2}k,k)^2,\ \text{u. s. w.,}$$

als einer Hauptreihe, die successiven Differenzenreihen, nämlich:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0=(\alpha,k)^{\nu-1}(\beta,k)^1,\quad \Delta a_1=(\alpha,k)^{\nu-2}(\beta,k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k,k)^1,$$
$$\Delta a_2=(\alpha,k)^{\nu-3}(\beta,k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-2}k,k)^2,\ \text{u. s. w.}$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = (\alpha, k)^{\nu-2}(\beta, k)^2, \quad \Delta^2 a_1 = (\alpha, k)^{\nu-3}(\beta, k)^2(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k, k)^1,$$
$$\Delta^2 a_2 = (\alpha, k)^{\nu-4}(\beta, k)^2(\alpha+\beta+\overline{\nu-2}k, k)^2, \text{ u. s. w.}$$

. . . .

*m*te Differenzenreihe:

$$\Delta^m a_0 = (\alpha, k)^{\nu-m}(\beta, k)^m, \quad \Delta^m a_1 = (\alpha, k)^{\nu-m-1}(\beta, k)^m(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k, k)^1,$$
$$\Delta^m a_2 = (\alpha, k)^{\nu-m-2}(\beta, k)^m(\alpha+\beta+\overline{\nu-2}k, k)^2, \text{ u. s. w.}$$

überhaupt ist allgemein:

$$\Delta^m a_r = (\alpha, k)^{\nu-m-r}(\beta, k)^m(\alpha+\beta+\overline{\nu-r}k, k)^r$$

zu setzen; daher erhalten wir mittels Formel 21):

$$(\alpha, k)^{\nu-n}(\alpha+\beta+\overline{\nu-n}k, k)^n - (\alpha, k)^\nu = (\alpha, k)^{\nu-1}(\beta, k)^1$$
$$+ (\alpha, k)^{\nu-2}(\beta, k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k, k)^1$$
$$+ \ldots + (\alpha, k)^{\nu-n}(\beta, k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-n+1}k, k)^{n-1},$$

oder, wenn wir beiderseits durch $(\beta, k)^1 = \beta$ dividiren und dann $\beta - \alpha$ für β schreiben:

$$101)\quad \frac{(\alpha, k)^\nu - (\alpha, k)^{\nu-n}(\beta+\overline{\nu-n}k, k)^n}{\alpha-\beta} = (\alpha, k)^{\nu-1}$$
$$+ (\alpha, k)^{\nu-2}(\beta+\overline{\nu-1}k, k)^1 + \ldots + (\alpha. k)^{\nu-n}(\beta+\overline{\nu-n+1}k, k)^{n-1}.$$

Ferner ergeben sich aus den Formeln 23), 30), 31), 32), 33):

$$102)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha, k)^{\nu-n}(\alpha+\beta+\overline{\nu-n}k, k)^n = (\alpha, k)^\nu + n_1(\alpha, k)^{\nu-1}(\beta, k)^1 \\ &\qquad + n_2(\alpha, k)^{\nu-2}(\beta, k)^2 + \ldots + n_n(\alpha, k)^{\nu-n}(\beta, k)^n, \end{aligned} \right.$$

$$103)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha, k)^\nu + (\alpha, k)^{\nu-1}(\beta, k)^1 + (\alpha, k)^{\nu-2}(\beta, k)^2 + \ldots + (\alpha, k)^{\nu-n}(\beta, k)^n \\ &= (\alpha, k)^{\nu-n}(\alpha+\beta+\overline{\nu-n}k, k)^n \\ &- (n-1)_1(\alpha, k)^{\nu-n+1}(\beta, k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-n+2}k, k)^{n-2} \\ &+ (n-2)_2(\alpha, k)^{\nu-n+2}(\beta, k)^2(\alpha+\beta+\overline{\nu-n+4}k, k)^{n-4} - \ldots, \end{aligned} \right.$$

$$104)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha, k)^\nu + (\alpha, k)^{\nu-n}(\beta, k)^n = (\alpha, k)^{\nu-n}(\alpha+\beta+\overline{\nu-n}k, k)^n \\ &- n_2 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1}(\alpha, k)^{\nu-n+1}(\beta, k)^1(\alpha+\beta+\overline{\nu-n+2}k, k)^{n-2} \\ &+ n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2}(\alpha, k)^{\nu-n+2}(\beta, k)^2(\alpha+\beta+\overline{\nu-n+4}k, k)^{n-4} - \ldots \end{aligned} \right.$$

$$105)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^n.\frac{(\alpha,k)^\nu+(\alpha,k)^{\nu-2n}(\beta,k)^{2n}}{2} &= (\alpha,k)^{\nu-n}(\beta,k)^n-\frac{n^2}{1.2}(\alpha,k)^{\nu-n-1}(\beta,k)^{n-1}(\alpha+\beta+\overline{\nu-2}k,k)^2\\ &+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha,k)^{\nu-n-2}(\beta,k)^{n-2}(\alpha+\beta+\overline{\nu-4}k,k)^4\\ &-\ldots(-1)^n.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}(\alpha,k)^{\nu-2n}(\alpha+\beta+\overline{\nu-2n}k,k)^{2n},\end{aligned}\right.$$

$$106)\quad \left\{\begin{aligned} (-1)^n.\frac{n}{2n+1}.[(\alpha,k)^\nu+(\alpha,k)^{\nu-2n-1}(\beta,k)^{2n+1}] &= \frac{n}{1}.(\alpha,k)^{\nu-n-1}(\beta,k)^n(\alpha+\beta+\overline{\nu-1}k,k)^1\\ &-\frac{n+1}{3}.\frac{n^2}{1.2}(\alpha,k)^{\nu-n-2}(\beta,k)^{n-1}(\alpha+\beta+\overline{\nu-3}k,k)^3\\ &+\frac{n+2}{5}.\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}(\alpha,k)^{\nu-n-3}(\beta,k)^{n-2}(\alpha+\beta+\overline{\nu-5}k,k)^5\\ &-\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\\ &(-1)^n.\frac{2n}{2n+1}.\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}(\alpha,k)^{\nu-2n-1}(\alpha+\beta+\overline{\nu-2n-1}k,k)^{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Wird in 102) noch $\nu=n$ gesetzt, so erscheint die bekannte und wichtige Relation:

$$107)\quad (\alpha+\beta,k)^n=(\alpha,k)^n+n_1(\alpha,k)^{n-1}(\beta,k)^1+n_2(\alpha,k)^{n-2}(\beta,k)^2+\ldots+n_n(\beta,k)^n,$$

welche in der Theorie der Facultäten denselben Rang einnimmt, wie der binomische Lehrsatz in der Lehre von den Potenzen. Weil der letztere für $k=0$ aus vorstehender Relation folgt, so ist die Formel 107) als eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung des Binomialtheorems zu betrachten.

Führen wir die Bezeichnung

$$\overset{k}{x}_n = \frac{x(x+k)(x+2k)\ldots(x+\overline{n-1}k)}{1.2.3\ldots n}, \quad \overset{k}{x}_0 = 1$$

ein, so erhalten wir mittels Division der Formeln 101) bis 107) durch $1.2.3\ldots\nu$ die folgenden Ergebnisse:

$$108)\quad \frac{\nu}{\alpha-\beta}\left(\overset{k}{\alpha}_\nu - \frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}(\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n}k})_n}{\nu_n}\right) = \overset{k}{\alpha}_{\nu-1} + \overset{k}{\alpha}_{\nu-2}\cdot\frac{(\beta+\overset{k}{\overline{\nu-1}k})_1}{(\nu-1)_1} + \overset{k}{\alpha}_{\nu-3}\cdot\frac{(\beta+\overset{k}{\overline{\nu-2}k})_2}{(\nu-1)_2} + \ldots + \overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\cdot\frac{(\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n+1}k})_{n-1}}{(\nu-1)_{n-1}},$$

$$109)\quad \frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n}k})_n}{\nu_n} = \overset{k}{\alpha}_\nu + n_1\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-1}\cdot\overset{k}{\beta}_1}{\nu_1} + n_2\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-2}\,\overset{k}{\beta}_2}{\nu_2} + \ldots + n_n\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\cdot\overset{k}{\beta}_n}{\nu_n},$$

$$110)\quad \left\{\begin{aligned} &\overset{k}{\alpha}_\nu + \frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-1}\cdot\overset{k}{\beta}_1}{\nu_1} + \frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-2}\,\overset{k}{\beta}_2}{\nu_2} + \ldots + \frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\,\overset{k}{\beta}_n}{\nu_n} = \overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n}k})_n}{\nu_n} - \overset{k}{\alpha}_{\nu-n+1}\,\overset{k}{\beta}_1\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n+2}k})_{n-2}}{\nu_{n-1}} \\ &\qquad + \overset{k}{\alpha}_{\nu-n+2}\,\overset{k}{\beta}_2\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n+4}k})_{n-4}}{\nu_{n-2}} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$111)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{n}\left(\overset{k}{\alpha}_\nu + \overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\nu_n}\right) = \frac{1}{n}\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n}k})_n}{\nu_n} - \frac{1}{n-1}\overset{k}{\alpha}_{\nu-n+1}\,\overset{k}{\beta}_1\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n+2}k})}{\nu_{n-1}} \\ &\qquad + \frac{1}{n-2}\cdot\overset{k}{\alpha}_{\nu-n+2}\cdot\overset{k}{\beta}_2\cdot\frac{(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-n+4}k})_{n-4}}{\nu_{n-2}} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$112)\quad \left\{\begin{aligned}&(-1)^n\frac{1}{2n}\Big(\overset{k}{\alpha}_{\nu}+\overset{k}{\alpha}_{\nu-2n}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_{2n}}{\nu_{2n}}\Big)=\frac{1}{n}\,\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n}\overset{k}{\beta}_{n}}{\nu_n}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n-1}\overset{k}{\beta}_{n-1}\,(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-2}}k)_2}{\nu_{n+1}}+\frac{1}{n+2}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n-2}\overset{k}{\beta}_{n-2}(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-4}}k)_4}{\nu_{n+2}}\\&\qquad-\ldots(-1)^n\frac{1}{2n}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-2n}(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-2n}}k)_{2n}}{\nu_{2n}},\end{aligned}\right.$$

$$113)\quad \left\{\begin{aligned}&(-1)^n\frac{1}{2n+1}\Big(\overset{k}{\alpha}_{\nu}+\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-2n-1}\overset{k}{\beta}_{2n+1}}{\nu_{2n+1}}\Big)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n-1}\overset{k}{\beta}_{n}(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-1}}k)_1}{\nu_{n+1}}-\frac{1}{n+2}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n-2}\overset{k}{\beta}_{n-1}\,(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-3}}k)_3}{\nu_{n+2}}\\&\qquad+\frac{1}{n+3}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-n-3}\overset{k}{\beta}_{k-2}(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-5}}k)_5}{\nu_{n+3}}-\ldots(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-2n-1}\,(\alpha+\beta+\overset{k}{\overline{\nu-2n-1}}k)_{2n+1}}{\nu_{2n+1}},\end{aligned}\right.$$

und, wenn wir die Gleichung 107) durch $1.2.3\ldots n$ dividiren:

$$114)\quad (\alpha\overset{k}{+}\beta)_n=\overset{k}{\alpha}_n\overset{k}{\beta}_0+\overset{k}{\alpha}_{n-1}\overset{k}{\beta}_1+\overset{k}{\alpha}_{n-2}\overset{k}{\beta}_2+\ldots+\overset{k}{\alpha}_0\overset{k}{\beta}_n.$$

Dividiren wir ferner Gleichung 108) durch $\overset{k}{\alpha}_{\nu-1}$ und schreiben nach geschehener Division $\beta-nk$ für β, sowie gleichzeitig $\alpha-\overline{\nu-1}k$ für α, so resultirt:

$$115)\quad \frac{\alpha}{\alpha-\beta+k}\Big(1-\frac{(\beta\overset{k}{-}nk)_n}{(\alpha\overset{k}{-}\overline{n-1}k)_n}\Big)=1+\frac{(\beta\overset{k}{-}k)_1}{(\alpha\overset{k}{-}k)_1}+\frac{(\beta\overset{k}{-}2k)_2}{(\alpha\overset{k}{-}2k)_2}+\ldots+\frac{(\beta\overset{k}{-}\overline{n-1}k)_{n-1}}{(\alpha\overset{k}{-}\overline{n-1}k)_{n-1}}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir, sobald wir die Formeln 109) bis 113) beiderseits des Gleichheitszeichens durch $\overset{k}{\alpha}_{\nu}$ dividiren und uns dabei der leicht zu beweisenden Relation:

$$\frac{\overset{k}{\alpha}_{\nu-r}}{\nu_r \,.\, \overset{k}{\alpha}_\nu} = \frac{1}{(\alpha + \overline{\nu - r}\overset{k}{k})_r}$$

bedienen, zuletzt aber α anstatt $\alpha + \nu k$ schreiben:

$$116)\quad \frac{(\alpha+\beta-n\overset{k}{k})_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n} = 1 + n_1 \,.\, \frac{\overset{k}{\beta}_1}{(\alpha-\overset{k}{k})_1} + n_2 \,.\, \frac{\overset{k}{\beta}_2}{(\alpha-2\overset{k}{k})_2} + \ldots + n_n \frac{\overset{k}{\beta}_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n},$$

$$117)\quad 1 + \frac{\overset{k}{\beta}_1}{(\alpha-\overset{k}{k})_1} + \frac{\overset{k}{\beta}_2}{(\alpha-2\overset{k}{k})_2} + \ldots + \frac{\overset{k}{\beta}_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n} = \frac{(\alpha+\beta-n\overset{k}{k})_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n} - \overset{k}{\beta}_1 \,.\, \frac{(\alpha+\beta-\overline{n-2}\overset{k}{k})_{n-2}}{(\alpha-\overline{n-1}\overset{k}{k})_{n-1}} + \overset{k}{\beta}_2 \,.\, \frac{(\alpha+\beta-\overline{n-4}\overset{k}{k})_{n-4}}{(\alpha-\overline{n-2}\overset{k}{k})_{n-2}} - \ldots,$$

$$118)\quad \frac{1}{n}\Big[1 + \frac{\overset{k}{\beta}_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n}\Big] = \frac{1}{n} \cdot \frac{(\alpha+\beta-n\overset{k}{k})_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n} - \frac{1}{n-1}\overset{k}{\beta}_1 \,.\, \frac{(\alpha+\beta-\overline{n-2}\overset{k}{k})_{n-2}}{(\alpha-\overline{n-1}\overset{k}{k})_{n-1}} + \frac{1}{n-2}\overset{k}{\beta}_2 \,.\, \frac{(\alpha+\beta-\overline{n-4}\overset{k}{k})}{(\alpha-\overline{n-2}\overset{k}{k})_{n-2}} - \ldots,$$

$$119)\quad \frac{(-1)^n}{2n}\Big[1 + \frac{\overset{k}{\beta}_{2n}}{(\alpha-2n\overset{k}{k})_{2n}}\Big] = \frac{1}{n} \cdot \frac{\overset{k}{\beta}_n}{(\alpha-n\overset{k}{k})_n} - \frac{1}{n+1}\overset{k}{\beta}_{n-1} \cdot \frac{(\alpha+\beta-2\overset{k}{k})_2}{(\alpha-\overline{n+1}\overset{k}{k})_{n+1}} + \frac{1}{n+2}\overset{k}{\beta}_{n-2} \cdot \frac{(\alpha+\beta-4\overset{k}{k})_4}{(\alpha-\overline{n+2}\overset{k}{k})_{n+2}} - \ldots \frac{(-1)^n}{2n} \cdot \frac{(\alpha+\beta-2n\overset{k}{k})_{2n}}{(\alpha-2n\overset{k}{k})_{2n}},$$

$$120)\quad \frac{(-1)^n}{2n+1}\Big[1 + \frac{\overset{k}{\beta}_{2n+1}}{(\alpha-\overline{2n+1}\overset{k}{k})_{2n+1}}\Big] = \frac{1}{n+1}\overset{k}{\beta}_n \,.\, \frac{(\alpha+\beta-\overset{k}{k})_1}{(\alpha-\overline{n+1}\overset{k}{k})_{n+1}} - \frac{1}{n+2}\overset{k}{\beta}_{n-1} \cdot \frac{(\alpha+\beta-3\overset{k}{k})_3}{(\alpha-\overline{n+2}\overset{k}{k})_{n+2}} + \frac{1}{n+3}\overset{k}{\beta}_{n-2} \cdot \frac{(\alpha+\beta-5\overset{k}{k})_5}{(\alpha-\overline{n+3}\overset{k}{k})_{n+3}} - \ldots \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{(\alpha+\beta-\overline{2n+1}\overset{k}{k})_{2n+1}}{(\alpha-\overline{2n+1}\overset{k}{k})_{2n+1}}.$$

Diesen Formeln können wir noch eine elegantere Gestalt geben durch Vertauschung von β mit $-\beta+k$ und α mit $-\alpha+k$ in 115) und von α mit $-\alpha+k$ in den übrigen Formeln unter Anwendung des Satzes:

$$\overset{k}{(-\alpha)}_r = (-1)^r \overset{k}{(\alpha-\overline{r-1}k)}_r.$$

Dadurch ergeben sich die Resultate:

$$121)\quad \frac{\alpha-k}{\alpha-\beta-k}\left(1-\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{(\alpha-k)}_n}\right)=1+\frac{\overset{k}{\beta}_1}{\overset{k}{\alpha}_1}+\frac{\overset{k}{\beta}_2}{\overset{k}{\alpha}_2}+\dots+\frac{\overset{k}{\beta}_{n-1}}{\overset{k}{\alpha}_{n-1}},$$

$$122)\quad \frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}=1-n_1\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_1}{\overset{k}{\alpha}_1}+n_2\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_2}{\overset{k}{\alpha}_2}-\dots(-1)^n\cdot n_n\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n},$$

$$123)\quad 1-\frac{\overset{k}{\beta}_1}{\overset{k}{\alpha}_1}+\frac{\overset{k}{\beta}_2}{\overset{k}{\alpha}_2}-\dots(-1)^n\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}=\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}+\overset{k}{\beta}_1\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{n-2}}{\overset{k}{\alpha}_{n-1}}$$
$$+\overset{k}{\beta}_2\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{n-4}}{\overset{k}{\alpha}_{n-2}}-\dots,$$

$$124)\quad \frac{1}{n}\left(1+(-1)^n\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}+\frac{1}{n-1}\overset{k}{\beta}_1\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{n-2}}{\overset{k}{\alpha}_{n-1}}$$
$$+\frac{1}{n-2}\overset{k}{\beta}_2\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{n-4}}{\overset{k}{\alpha}_{n-2}}+\dots,$$

$$125)\quad \frac{1}{2n}\left(1+\frac{\overset{k}{\beta}_{2n}}{\overset{k}{\alpha}_{2n}}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{k}{\beta}_n}{\overset{k}{\alpha}_n}+\frac{1}{n+1}\cdot\overset{k}{\beta}_{n-1}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_2}{\overset{k}{\alpha}_{n+1}}+\frac{1}{n+2}\overset{k}{\beta}_{n-2}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_4}{\overset{k}{\alpha}_{n+2}}$$
$$+\dots+\frac{1}{2n}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{2n}}{\overset{k}{\alpha}_{2n}},$$

$$126)\quad \frac{1}{2n+1}\left(1-\frac{\overset{k}{\beta}_{2n+1}}{\overset{k}{\alpha}_{2n+1}}\right)=\frac{1}{n+1}\overset{k}{\beta}_n\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_1}{\overset{k}{\alpha}_{n+1}}+\frac{1}{n+2}\overset{k}{\beta}_{n-1}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_3}{\overset{k}{\alpha}_{n+2}}$$
$$+\frac{1}{n+3}\overset{k}{\beta}_{n-2}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_5}{\overset{k}{\alpha}_{n+3}}+\dots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha-\beta)}_{2n+1}}{\overset{k}{\alpha}_{2n+1}},$$

und, wenn wir hierin $k=-1$ setzen, die folgenden Beziehungen der Binomialfactoren:

$$127)\quad \frac{\alpha+1}{\alpha-\beta+1}\left(1-\frac{\beta_n}{(\alpha+1)_n}\right)=1+\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}+\dots+\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}},$$

$$128)\quad \frac{(\alpha-\beta)_n}{\alpha_n} = 1 - n_1\frac{\beta_1}{\alpha_1} + n_2\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \dots (-1)^n n_n \frac{\beta_n}{\alpha_n},$$

$$129)\quad 1 - \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} - \dots (-1)^n \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{(\alpha-\beta)_n}{\alpha_n} + \beta_1 \frac{(\alpha-\beta)_{n-2}}{\alpha_{n-1}} + \beta_2 \frac{(\alpha-\beta)_{n-4}}{\alpha_{n-2}} + \dots,$$

$$130)\quad \frac{1}{n}\left(1 + (-1)^n \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{(\alpha-\beta)_n}{\alpha_n} + \frac{1}{n-1}\beta_1 \frac{(\alpha-\beta)_{n-2}}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{n-2}\beta_2\frac{(\alpha-\beta)_{n-4}}{\alpha_{n-2}} + \dots,$$

$$131)\quad \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}}\right) = \frac{1}{n}\frac{\beta_n}{\alpha_n} + \frac{1}{n+1}\beta_{n-1}\frac{(\alpha-\beta)_2}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{n+2}\beta_{n-2}\frac{(\alpha-\beta)_4}{\alpha_{n+2}} + \dots + \frac{1}{2n}\frac{(\alpha-\beta)_{2n}}{\alpha_{2n}},$$

$$132)\quad \frac{1}{2n+1}\left(1 - \frac{\beta_{2n+1}}{\alpha_{2n+1}}\right) = \frac{1}{n+1}\beta_n \frac{(\alpha-\beta)_1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{n+2}\beta_{n-1}\frac{(\alpha-\beta)_3}{\alpha_{n+2}} + \frac{1}{n+3}\beta_{n-2}\frac{(\alpha-\beta)_5}{\alpha_{n+3}} + \dots + \frac{1}{2n+1}\frac{(\alpha-\beta)_{2n+1}}{\alpha_{2n+1}}.$$

Setzen wir ebenso in 108) bis 114) $k = -1$, so erhalten wir:

$$133)\quad \frac{\nu}{\alpha-\beta}\left\{\alpha_\nu - \frac{\alpha_{\nu-n}(\beta-\nu+n)_n}{\nu_n}\right\} = \alpha_{\nu-1} + \frac{(\beta-\nu+1)_1}{(\nu-1)_1}\alpha_{\nu-2} + \frac{(\beta-\nu+2)_2}{(\nu-1)_2}\alpha_{\nu-3} + \dots + \frac{(\beta-\nu+n-1)_{n-1}}{(\nu-1)_{n-1}}\alpha_{\nu-n},$$

$$134)\quad \frac{\alpha_{\nu-n}(\alpha+\beta-\nu+n)_n}{\nu_n} = \alpha_\nu + n_1\frac{\alpha_{\nu-1}\beta_1}{\nu_1} + n_2\frac{\alpha_{\nu-2}\beta_2}{\nu_2} + \dots + n_n\frac{\alpha_{\nu-n}\beta_n}{\nu_n},$$

$$135)\quad \alpha_\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}\beta_1}{\nu_1} + \frac{\alpha_{\nu-2}\beta_2}{\nu_2} + \dots + \frac{\alpha_{\nu-n}\beta_n}{\nu_n} = \alpha_{\nu-n}\frac{(\alpha+\beta-\nu+n)_n}{\nu_n} - \alpha_{\nu-n+1}\beta_1\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+n-2)_{n-2}}{\nu_{n-1}} + \alpha_{\nu-n+2}\beta_2\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+n-4)_{n-4}}{\nu_{n-2}} - \dots,$$

$$136)\quad \frac{1}{n}\left[\alpha_\nu + \alpha_{\nu-n}\cdot\frac{\beta_n}{\nu_n}\right] = \frac{1}{n}\alpha_{\nu-n}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+n)_n}{\nu_n} - \frac{1}{n-1}\alpha_{\nu-n+1}\beta_1\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+n-2)_{n-2}}{\nu_{n-1}} + \frac{1}{n-2}\alpha_{\nu-n+2}\beta_2\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+n-4)_{n-4}}{\nu_{n-2}} - \dots,$$

$$137)\quad \begin{cases} (-1)^n\frac{1}{2n}\left[\alpha_\nu + \alpha_{\nu-2n}\frac{\beta_{2n}}{\nu_{2n}}\right] = \frac{1}{n}\frac{\alpha_{\nu-n}\beta_n}{\nu_n} - \frac{1}{n+1}\alpha_{\nu-n-1}\beta_{n-1}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+2)_2}{\nu_{n+1}} + \frac{1}{n+2}\alpha_{\nu-n-2}\beta_{n-2}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+4)_4}{\nu_{n+2}} \\ \qquad - \dots (-1)^n\cdot\frac{1}{2n}\cdot\alpha_{\nu-2n}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+2n)_{2n}}{\nu_{2n}}, \end{cases}$$

$$138)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n\frac{1}{2n+1}\left[\alpha_\nu+\alpha_{\nu-2n-1}\cdot\frac{\beta_{2n+1}}{\nu_{2n+1}}\right]=\frac{1}{n+1}\alpha_{\nu-n-1}\beta_n\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+1)_1}{\nu_{n+1}}\\&-\frac{1}{n+2}\alpha_{\nu-n-2}\beta_{n-1}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+3)_3}{\nu_{n+2}}+\frac{1}{n+3}\alpha_{\nu-n-3}\beta_{n-2}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+5)_5}{\nu_{n+3}}\\&-\ldots(-1)^n\frac{1}{2n+1}\alpha_{\nu-2n-1}\cdot\frac{(\alpha+\beta-\nu+2n+1)_{2n+1}}{\nu_{2n+1}}\end{aligned}\right.$$

und

$$139)\quad(\alpha+\beta)_n=\alpha_n\beta_0+\alpha_{n-1}\beta_1+\alpha_{n-2}\beta_2+\ldots+\alpha_0\beta_n.$$

Die vorstehenden Beziehungen zwischen den binomischen Coefficienten lassen sich auf mannichfache Weise noch weiter spezialisiren. Einige dieser Spezialitäten mögen im Folgenden noch Platz finden.

Es sei in 128) $\beta=n$; dann ist

$$140)\quad\frac{(\alpha-n)_n}{\alpha_n}=1-\frac{n_1^2}{\alpha_1}+\frac{n_2^2}{\alpha_2}-\ldots(-1)^n\cdot\frac{n_n^2}{\alpha_n},$$

woraus für $\alpha=-1$ der bekannte und leicht in Worten ausdrückbare Satz

$$141)\quad(2n)_n=n_0^2+n_1^2+n_2^2+\ldots+n_n^2,$$

und für $\alpha=-2$ die Relation

$$142)\quad\frac{1}{n+1}\cdot(2n+1)_n=n_0^2+\frac{1}{2}n_1^2+\frac{1}{3}n_2^2+\ldots+\frac{1}{n+1}n_n^2$$

entspringt. Für $\alpha=n$ erhalten wir ferner aus 128)

$$143)\quad(-1)^n(\beta-1)_n=1-\beta_1+\beta_2-\ldots(-1)^n\beta_n,$$

und für $\beta=-n$ aus derselben Formel mittels des Satzes

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2:$$

$$144)\quad\frac{(\alpha+n)_n}{\alpha_n}=1+\frac{n^2}{1^2}\cdot\frac{1}{\alpha_1}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}\cdot\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n}.$$

Die Gleichung 127) liefert uns für $\beta=-1$

$$145)\quad\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\left(1-(-1)^n\frac{1}{(\alpha+1)_n}\right)=1-\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha_{n-1}},$$

die Gleichung 128) dagegen für dieselbe Substitution

$$146)\quad\frac{\alpha+1}{\alpha-n+1}=1+\frac{n_1}{\alpha_1}+\frac{n_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{n_n}{\alpha_n},$$

aus welcher, wenn $\alpha = -2$ gesetzt wird, das Resultat

$$147)\quad \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{3}n_2 - \ldots (-1)^n \frac{1}{n+1} n_n$$

erhalten wird.

Was endlich die Formel 129) betrifft, so erhalten wir mittels der Substitution $\alpha = -1$ und $\beta = n$ unter Anwendung der Formel 58)

$$148)\quad 2^n = n_0(2n)_n - n_1(2n-2)_{n-2} + n_2(2n-4)_{n-4} - \ldots$$

Es würde sich leicht noch eine grosse Anzahl netter Relationen zwischen den Binomialcoefficienten vermittels der vorhergehenden allgemeineren Resultate ableiten lassen, was wir aber der Beschränktheit des Raumes wegen dem Leser überlassen.

Am Schlusse dieses Paragraphen sei es mir noch verstattet, eine Anwendung der allgemeinen Formel 22) zu geben. Kann man nämlich eine Hauptreihe $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ so wählen, dass sich nicht nur die einzelnen Glieder der höheren Differenzenreihen, sondern auch die Summe

$$n_0 a_0 + n_1 \varDelta a_0 + n_2 \varDelta a_2 + \ldots + n_m \varDelta^m a_0$$

unter der Form eines einfachen Ausdruckes darstellen lassen, so tritt auch R_m als einfacher Ausdruck auf, wodurch wir dann eine Summation der Reihe

$$(n-1)_m \varDelta^{m+1} a_0 + (n-2)_m \varDelta^{m+1} a_1 + (n-3)_m \varDelta^{m+1} a_2 + \ldots + m_m \varDelta^{m+1} a_{n-m-1}$$

gewonnen haben. Eine Hauptreihe von dieser Eigenschaft ist die folgende:

$$a_0 = \frac{1}{\mu_0},\ a_1 = \frac{(\mu+1)_1}{\mu_1},\ a_2 = \frac{(\mu+1)_2}{\mu_2},\ a_3 = \frac{(\mu+1)_3}{\mu_3},\ \ldots,$$

welche jetzt zur Anwendung des soeben erörterten Principes dienen möge.

Ihre Differenzenreihen sind:

erste Differenzenreihe:

$$\varDelta a_0 = \frac{1}{\mu_1},\ \varDelta a_1 = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-1)_1},\ \varDelta a_2 = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-1)_2},\ \varDelta a_3 = \frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{(\mu+1)_3}{(\mu-1)_3},\ \ldots$$

zweite Differenzenreihe:

$$\varDelta^2 a_0 = \frac{1}{\mu_2},\ \varDelta^2 a_1 = \frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-2)_1},\ \varDelta^2 a_2 = \frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-2)_2},\ \varDelta^2 a_3 = \frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{(\mu+1)_3}{(\mu-2)_3},\ \ldots$$

dritte Differenzenreihe:

$$\Delta^3 a_0 = \frac{1}{\mu_3}, \Delta^3 a_1 = \frac{1}{\mu_3}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-3)_1}, \Delta^3 a_2 = \frac{1}{\mu_3}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-3)_2}, \Delta^3 a_3 = \frac{1}{\mu_3}\cdot\frac{(\mu+1)_3}{(\mu-3)_3}, \ldots.$$

u. s. w.

$r$te Differenzenreihe:

$$\Delta^r a_0 = \frac{1}{\mu_r}, \Delta^r a_1 = \frac{1}{\mu_r}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-r)_1}, \Delta^r a_2 = \frac{1}{\mu_r}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-r)_2}, \ldots. \Delta^r a_x = \frac{1}{\mu_x}\cdot\frac{(\mu+1)_x}{(\mu-r)_x}, \ldots;$$

mithin erhalten wir nach Formel 22):

$$\frac{(\mu+1)_n}{\mu_n} = \frac{n_0}{\mu_0} + \frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{n_m}{\mu_m} + \frac{(n-1)_m}{\mu_{m+1}} + \frac{(n-2)_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-m-1)_1}$$
$$+ \frac{(n-3)_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-m-1)_2} + \ldots + \frac{m_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_{n-m-1}}{(\mu-m-1)_{n-m-1}}.$$

Nach 127) ist aber, wenn $n = m+1$, $\beta = n$ und $\alpha = \mu$ gesetzt wird,

$$\frac{\mu+1}{\mu-n+1}\left(1 - \frac{n_{m+1}}{(\mu+1)_{m+1}}\right) = \frac{n_0}{\mu_0} + \frac{n_1}{\mu_1} + \frac{n_2}{\mu_2} + \ldots + \frac{n_m}{\mu_m};$$

daher geht unser Ausdruck über in:

$$\frac{(\mu+1)_n}{\mu_n} = \frac{\mu+1}{\mu-n+1}\left(1 - \frac{n_{m+1}}{(\mu+1)_{m+1}}\right) + \frac{(n-1)_m}{\mu_{m+1}} + \frac{(n-2)_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-m-1)_1}$$
$$+ \frac{(n-3)_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-m-1)_2} + \ldots + \frac{m_m}{\mu_{m+1}}\cdot\frac{(\mu+1)_{n-m-1}}{(\mu-m-1)_{n-m-1}},$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $\frac{(\mu+1)_n}{\mu_n} = \frac{\mu+1}{\mu-n+1}$, und mit μ_{m+1} multiplicirt, in

$$\frac{\mu+1}{\mu-n+1}\cdot\frac{\mu_{m+1}n_{m+1}}{(\mu+1)_{m+1}} = (n-1)_m + (n-2)_m\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-m-1)_1}$$
$$+ (n-3)_m\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-m-1)_2} + \ldots + m_m\cdot\frac{(\mu+1)_{n-m-1}}{(\mu-m-1)_{n-m-1}},$$

oder auch:

$$149)\quad \frac{\mu-m}{\mu-n+1}\cdot n_{m+1} = (n-1)_m + (n-2)_m\cdot\frac{(\mu+1)_1}{(\mu-m-1)_1}$$
$$+ (n-3)_m\cdot\frac{(\mu+1)_2}{(\mu-m-1)_2} + \ldots + m_m\cdot\frac{(\mu+1)_{n-m-1}}{(\mu-m-1)_{n-m-1}}.$$

§. 8.

Die Theorie der höheren Differenzenreihen lässt sich auch mit Erfolg auf die Differenzial- und Integralrechnung anwenden,

wie wir sogleich in diesem und dem folgenden Paragraphen sehen werden. Wir wählen in dieser Beziehung die Reihe

$$a_0 = \frac{d^n F(x)}{dx^n} \cdot f(x), \quad a_1 = \frac{d\left[\frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}} \cdot f(x)\right]}{dx},$$

$$a_2 = \frac{d^2\left[\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}} \cdot f(x)\right]}{dx^2}, \ldots$$

als Hauptreihe, und gewinnen derselben unter beständiger Anwendung der bekannten Formel:

$$\frac{d[F(x).f(x)]}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot F(x)$$

folgende Differenzenreihen ab:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0 = \frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}} \cdot \frac{df(x)}{dx}, \quad \Delta a_1 = \frac{d\left[\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right]}{dx},$$

$$\Delta a_2 = \frac{d^2\left[\frac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}} \cdot \frac{df(x)}{dx}\right]}{dx^2}, \ldots$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = \frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \Delta^2 a_1 = \frac{d\left[\frac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]}{dx},$$

$$\Delta^2 a_2 = \frac{d^2\left[\frac{d^{n-4}F(x)}{dx^{n-4}} \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]}{dx^2}, \ldots$$

u. s. w.

$m$te Differenzenreihe:

$$\Delta^m a_0 = \frac{d^{n-m}F(x)}{dx^{n-m}} \cdot \frac{d^m f(x)}{dx^m}, \quad \Delta^m a_1 = \frac{d\left[\frac{d^{n-m-1}F(x)}{dx^{n-m-1}} \cdot \frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]}{dx},$$

$$\Delta^m a_2 = \frac{d^2\left[\frac{d^{n-m-2}F(x)}{dx^{n-m-2}} \cdot \frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]}{dx^2}, \ldots$$

allgemein:

$$\Delta^m a_r = \frac{d^r\left[\frac{d^{n-m-r}F(x)}{dx^{n-m-r}} \cdot \frac{d^m f(x)}{dx^m}\right]}{dx^r}.$$

Mit Hülfe dieser Ergebnisse leiten wir daher leicht ab aus Formel 21)

$$\text{150)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n} - \dfrac{d^nF(x)}{dx^n}.f(x) = \dfrac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}.\dfrac{df(x)}{dx} \\ \qquad + \dfrac{d\left[\dfrac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}.\dfrac{df(x)}{dx}\right]}{dx} + \dfrac{d^2\left[\dfrac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}}.\dfrac{df(x)}{dx}\right]}{dx^2} \\ \qquad + \dots + \dfrac{d^{n-1}\left[F(x).\dfrac{df(x)}{dx}\right]}{dx^{n-1}}, \end{cases}$$

aus 23)

$$\text{151)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n} = \dfrac{d^nF(x)}{dx^n}.f(x) + n_1.\dfrac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}.\dfrac{df(x)}{dx} \\ \qquad + n_2.\dfrac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}.\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} + \dots + n_n.F(x).\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}, \end{cases}$$

aus 25)

$$\text{152)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^nF(x)}{dx^n}.f(x) + (-1)^{n-1}\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}.F(x) = \dfrac{d\left[\dfrac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}.f(x)\right]}{dx} \\ \qquad - \dfrac{d\left[\dfrac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}.\dfrac{df(x)}{dx}\right]}{dx} + \dfrac{d\left[\dfrac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}}.\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\right]}{dx} \\ \qquad - \dots (-1)^{n-1}\dfrac{d\left[F(x).\dfrac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right]}{dx}, \end{cases}$$

aus 27)

$$\text{153)}\quad \begin{cases} (-1)^nF(x).\dfrac{d^nf(x)}{dx^n} = \dfrac{d^nF(x)}{dx^n}.f(x) - n_1\dfrac{d\left[\dfrac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}.f(x)\right]}{dx} \\ + n_2\dfrac{d^2\left[\dfrac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}.f(x)\right]}{dx^2} - \dots (-1)^n n_n\dfrac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n}, \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Ergebnisse leiten wir daher leicht ab aus 21)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n}-\frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x)=\frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\\+\frac{d\left[\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx}+\frac{d^2\left[\frac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx^2}\\+\ldots+\frac{d^{n-1}\left[F(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx^{n-1}},\end{aligned}\right.$$

23)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n}=\frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x)+n_1\cdot\frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\\+n_2\cdot\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\ldots+n_n\cdot F(x)\cdot\frac{d^nf(x)}{dx^n},\end{aligned}\right.$$

25)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x)+(-1)^{n-1}\frac{d^nf(x)}{dx^n}\cdot F(x)=\frac{d\left[\frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}\cdot f(x)\right]}{dx}\\-\frac{d\left[\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx}+\frac{d\left[\frac{d^{n-3}F(x)}{dx^{n-3}}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]}{dx}\\-\ldots(-1)^{n-1}\frac{d\left[F(x)\cdot\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right]}{dx},\end{aligned}\right.$$

27)

$$\left\{\begin{aligned}(-1)^nF(x)\cdot\frac{d^nf(x)}{dx^n}=\frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x)-n_1\frac{d\left[\frac{d^{n-1}F(x)}{dx^{n-1}}\cdot f(x)\right]}{dx}\\+n_2\frac{d^2\left[\frac{d^{n-2}F(x)}{dx^{n-2}}\cdot f(x)\right]}{dx^2}-\ldots(-1)^nn_n\frac{d^n[F(x).f(x)]}{dx^n},\end{aligned}\right.$$

aus 37) für m anstatt n

$$
160) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x) + \frac{d^{2m}\left[\frac{d^{n-2m}F(x)}{dx^{n-2m}}\cdot f(x)\right]}{dx^{2m}} = \frac{d^m\left[\frac{d^{n-m}F(x)}{dx^{n-m}}\cdot f(x)\right]}{dx^m} + \frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{d^{m-1}\left[\frac{d^{n-m-1}F(x)}{dx^{n-m-1}}\cdot\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]}{dx^{m-1}} \\ & + \frac{m^2(m^2-1^2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^{m-2}\left[\frac{d^{n-m-2}F(x)}{dx^{n-m-2}}\cdot\frac{d^4f(x)}{dx^4}\right]}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2m}\cdot\frac{d^{n-2m}F(x)}{dx^{n-2m}}\cdot\frac{d^{2m}f(x)}{dx^{2m}}, \end{aligned} \right.
$$

und aus 38), wenn m für n gesetzt wird:

$$
161) \left\{ \begin{aligned} & \frac{m}{2m+1}\left[\frac{d^{2m+1}\left[\frac{d^{n-2m-1}F(x)}{dx^{n-2m-1}}\cdot f(x)\right]}{dx^{2m+1}} - \frac{d^nF(x)}{dx^n}\cdot f(x)\right] = \frac{m}{1}\cdot\frac{d^m\left[\frac{d^{n-m-1}F(x)}{dx^{n-m-1}}\cdot\frac{df(x)}{dx}\right]}{dx^m} \\ & \qquad + \frac{m+1}{3}\cdot\frac{m^2}{1.2}\cdot\frac{d^{m-1}\left[\frac{d^{n-m-2}F(x)}{dx^{n-m-2}}\cdot\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]}{dx^{m-1}} + \frac{m+2}{5}\cdot\frac{m^2(m^2-1^2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{d^{m-2}\left[\frac{d^{n-m-3}F(x)}{dx^{n-m-3}}\cdot\frac{d^5f(x)}{dx^5}\right]}{dx^{m-2}} \\ & \qquad + \ldots + \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2m}\cdot\frac{d^{n-2m-1}F(x)}{dx^{n-2m-1}}\cdot\frac{d^{2m+1}f(x)}{dx^{2m+1}}. \end{aligned} \right.
$$

§. 9.

Setzen wir in der bekannten Integralformel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$dv = Xdx$, also $v = \int Xdx$, und $u = x$, so erhalten wir

a) $$\int Xxdx = x\int Xdx - \overset{2}{\int} Xdx^2,$$

und durch wiederholte Anwendung der letzteren:

b) $$\overset{2}{\int} Xxdx^2 = \int dx \int Xxdx = \int dx\left(x\int Xdx - \overset{2}{\int} Xdx^2\right)$$
$$= \int xdx \int Xdx - \overset{3}{\int} Xdx^3 = x\overset{2}{\int} Xdx^2 - \overset{3}{\int} Xdx^3$$
$$- \overset{3}{\int} Xdx^3 = x\overset{2}{\int} Xdx^2 - 2\overset{3}{\int} Xdx^3.$$

c) $$\overset{3}{\int} Xxdx^3 = \int dx \overset{2}{\int} Xxdx^2 = \int dx\left(x\overset{2}{\int} Xdx^2 - 2\overset{3}{\int} Xdx^3\right)$$
$$= \int xdx \overset{2}{\int} Xxdx^2 - 2\overset{4}{\int} Xdx^4 = x\overset{3}{\int} Xdx^3 - \overset{4}{\int} Xdx^4$$
$$- 2\overset{4}{\int} Xdx^4 = x\overset{3}{\int} Xdx^3 - 3\overset{4}{\int} Xdx^4.$$

Wie wir auf diese Weise weiter fortschreiten können, unterliegt keinem Zweifel. Betrachten wir aber die Ausdrücke unter a), b), c) nur einigermassen mit Aufmerksamkeit, so erkennen wir leicht das allgemeine Gesetz, unter welchem dieselben stehen. Es ist nämlich

$$\overset{n}{\int} Xxdx^n = x\overset{n}{\int} Xdx^n - n\overset{n+1}{\int} Xdx^{n+1}.$$

Den vollständigen Beweis dieser Formel kann sich der Leser leicht durch den bekannten Schluss von n auf $n+1$ verschaffen.

Die Anwendung dieser Relation auf die Hauptreihe

$$a_0 = x^n \overset{m}{\int} Xdx^m, \quad a_1 = x^{n-1} \overset{m}{\int} Xxdx^m, \quad a_2 = x^{n-2} \overset{m}{\int} Xx^2dx^m, \ldots.$$

giebt uns folgende Differenzenreihen:

erste Differenzenreihe.

$$\Delta a_0 = -mx^{n-1} \overset{m+1}{\int} Xdx^{m+1}, \quad \Delta a_1 = -mx^{n-2} \overset{m+1}{\int} Xxdx^{m+1},$$
$$\Delta a_2 = -mx^{n-3} \overset{m+1}{\int} Xx^2dx^{m+1}, \ldots.$$

zweite Differenzenreihe.

$$\Delta^2 a_0 = m(m+1)x^{n-2}\overset{m+2}{\int} X dx^{m+2},\quad \Delta^2 a_1 = m(m+1)x^{n-3}\overset{m+2}{\int} X x dx^{m+2},$$

$$\Delta^2 a_2 = m(m+1)x^{n-4}\overset{m+2}{\int} X x^2 dx^{m+2}, \ldots.$$

u. s. w.

$r$te Differenzenreihe.

$$\Delta^r a_0 = (-1)^r m(m+1)\ldots.(m+r-1)\, x^{n-r}\overset{m+r}{\int} X dx^{m+r},$$

$$\Delta^r a_1 = (-1)^r m(m+1)\ldots.(m+r-1)x^{n-r-1}\overset{m+r}{\int} X x dx^{m+r}, \ldots$$

allgemein:

$$\Delta^r a_s = (-1)^r m(m+1)\ldots.(m+r-1)x^{n-r-s}\overset{m+r}{\int} X x^s dx^{m+r}.$$

Wir erhalten demnach, wenn wir der Kürze wegen

$$[m]_r = m(m+1)\ldots.(m+r-1)$$

setzen, vermittels dieser Ausdrücke aus Formel 21):

$$162)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{m}\Big[x^n \overset{m}{\int} X dx^m - \overset{m}{\int} X x^n dx^m\Big] = x^{n-1}\overset{m+1}{\int} X dx^{m+1} + x^{n-2}\overset{m+1}{\int} X x dx^{m+1} \\ &\qquad + x^{n-3}\overset{m+1}{\int} X x^2 dx^{m+1} + \ldots. + \overset{m+1}{\int} X x^{n-1} dx^{m+1}, \end{aligned} \right.$$

aus 23)

$$163)\quad \left\{ \begin{aligned} &\overset{m}{\int} X x^n dx^m = x^n \overset{m}{\int} X dx^m - n_1 \cdot [m]_1 x^{n-1}\overset{m+1}{\int} X dx^{m+1} \\ &\qquad + n_2 [m]_2 x^{n-2}\overset{m+1}{\int} X dx^{m+2} - \ldots. (-1)^n [m]_n \overset{m+n}{\int} X dx^{m+n}, \end{aligned} \right.$$

aus 25)

$$164)\quad \left\{ \begin{aligned} &x^n \overset{m}{\int} X dx^m - [m]_n \overset{m+n}{\int} X dx^{m+n} = x^{n-1}\overset{m}{\int} X x dx^m \\ &\qquad + [m]_1 x^{n-2}\overset{m+1}{\int} X x dx^{m+1} + [m]_2 x^{n-3}\overset{m+2}{\int} X x dx^{m+2} \\ &\qquad + \ldots. + [m]_{n-1}\overset{m+n-1}{\int} X x dx^{m+n-1}, \end{aligned} \right.$$

aus 27)

$$165)\quad \left\{ \begin{aligned} &[m]_n \overset{m+n}{\int} X dx^{m+n} = x^n \overset{m}{\int} X dx^m - n_1 x^{n-1}\overset{m}{\int} X x dx^m \\ &\qquad + n_2 x^{n-2}\overset{m}{\int} X x^2 dx^m - \ldots. (-1)^n n_n \overset{m}{\int} X x^n dx^m, \end{aligned} \right.$$

aus 30)

$$166)\quad \left\{\begin{aligned} & x^n \int^{m} X dx^m - [m]_1 x^{n-1} \int^{m+1} X dx^{m+1} + [m]_2 x^{n-2} \int^{m+2} X dx^{m+2} - \ldots (-1)^n [m]_n \int^{m+n} X dx^{m+n} \\ & = \int^{m} X x^n dx^m + (n-1)_1 [m]_1 x \int^{m+1} X x^{n-2} dx^{m+1} + (n-2)_2 [m]_2 x^2 \int^{m+2} X x^{n-4} dx^{m+2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

aus 31)

$$167)\quad \left\{\begin{aligned} & x^n \int^{m} X dx^m + (-1)^n [m]_n \int^{m+n} X dx^{m+n} = \int^{m} X x^n dx^m + n_1 \cdot \frac{2_1}{(n-1)_1} \cdot [m]_1 x \int^{m+1} X x^{n-2} dx^{m+1} \\ & + n_4 \cdot \frac{4_2}{(n-1)_2} \cdot [m]_2 x^2 \int^{m+2} X x^{n-4} dx^{m+2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

aus 32)

$$168)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[x^n \int^{m} X dx^m + [m]_{2n} x^{-n} \int^{m+2n} X dx^{m+2n}\right] = [m]_n \int^{m+n} X dx^{m+n} + \frac{n^2}{1.2} [m]_{n-1} x^{-1} \int^{m+n-1} X x^2 dx^{m+n-1} \\ & + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4} \cdot [m]_{n-2} x^{-2} \int^{m+n-2} X x^4 dx^{m+n-2} + \ldots + \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n} x^{-n} \int^{m} X x^{2n} dx^m, \end{aligned}\right.$$

aus 33)

$$169)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{n}{2n+1}\left[x^n \int^{m} X dx^m - [m]_{2n+1} x^{-n-1} \int^{m+2n+1} X dx^{m+2n+1}\right] = \frac{n}{1} [m]_n x^{-1} \int^{m+n} X x dx^{m+n} + \frac{n+1}{3} \cdot \frac{n^2}{1.2} \cdot [m]_{n-1} x^{-2} \int^{m+n-1} X x^2 dx^{m+n-1} \\ & + \frac{n+2}{5} \cdot \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4} \cdot [m]_{n-2} x^{-3} \int^{m+n-2} X x^5 dx^{m+n-2} + \ldots + \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n} x^{-n-1} \int^{m} X x^{2n+1} dx^m. \end{aligned}\right.$$

aus 35

$$170)\quad \begin{cases} x^n\int^{m}Xdx^m - x^{n-1}\int^{m}Xxdx^m + x^{n-2}\int^{m}Xx^2dx^m - \ldots (-1)^n\int^{m}Xx^ndx^m \\ \quad = [m]_n\int^{m+n}Xdx^{m+n} + (n-1)_1[m]_{n-2}x^1\int^{m+n-2}Xxdx^{m+n-2} + (n-2)_2[m]_{n-4}x^2\int^{m+n-4}Xx^2dx^{m+n-4} + \ldots \end{cases}$$

aus 36)

$$171)\quad \begin{cases} (-1)^n\int^{m}Xx^ndx^m + x^n\int^{m}Xdx^m = [m]_n\int^{m+n}Xdx^{m+n} + n_2\cdot\frac{2_1}{(n-1)_1}\cdot[m]_{n-2}x\int^{m+n-2}Xxdx^{m+n-2} \\ \quad + n_4\cdot\frac{4_2}{(n-1)_2}[m]_{n-4}\cdot x^2\int^{m+n-4}Xx^2dx^{m+n-4} + \ldots \end{cases}$$

aus 37)

$$172)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}[x^n\int^{m}Xdx^m + x^{-n}\int^{m}Xx^{2n}] = \int^{m}Xx^ndx^m + \frac{n^2}{1.2}\cdot[m]_2x^{-1}\int^{m+2}Xx^{n-1}dx^{m+2} \\ \quad + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}\cdot[m]_4x^{-2}\int^{m+4}Xx^{n-2}dx^{m+4} + \ldots + \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\cdot[m]_{2n}x^{-n}\int^{m+2n}Xdx^{m+2n}, \end{cases}$$

und aus 38)

$$173)\quad \begin{cases} \frac{n}{2n+1}[-x^{-n-1}\int^{m}Xx^{2n+1}dx^m + x^n\int^{m}Xdx^m] = \frac{n}{1}\cdot[m]_1x^{-1}\int^{m+1}Xx^n\,dx^{m+1} + \frac{n+1}{3}\cdot\frac{n^2}{1.2}\cdot[m]_3x^{-2}\int^{m+3}Xx^{n-1}dx^{m+3} \\ \quad + \frac{n+2}{5}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}\cdot[m]_5x^{-3}\int^{m+5}Xx^{n-2}dx^{m+5} + \ldots + \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{n-1}^2)}{1.2.3.4\ldots 2n}\cdot[m]_{2n+1}x^{-n-1}\int^{m+2n+1}Xdx^{m+2n+1}. \end{cases}$$

Setzen wir endlich in Formel 165) $m=1$, so erhalten wir

$$174)\quad \begin{cases} 1.2.3\ldots n\overset{n+1}{\int} Xdx^{n+1}=x^n\int Xdx-n_1x^{n-1}\int Xxdx \\ \qquad +n_2x^{n-2}\int Xx^2dx-\ldots(-1)^n n_n\int Xx^n dx. \end{cases}$$

In dieser Gleichung spricht sich das bekannte Verfahren aus, Integrale höherer Ordnung in einfachen Integralen auszudrücken.

§. 10.

Bisher haben wir uns stets nur mit endlichen Reihen beschäftigt. Es bleibt uns noch übrig zu zeigen, wie sich die Theorie der höheren Differenzenreihen auch auf die Entwickelung von unendlichen Reihen anwenden lässt. Wir gehen zunächst von folgender Entwickelung aus:

$$\sin\left(r+\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\varphi}{1+\beta\cos\varphi}\right)=\sin r.\cos\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\varphi}{1+\beta\cos\varphi}$$
$$+\cos r.\sin\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\varphi}{1+\beta\cos\varphi}$$
$$=\sin r.\frac{1+\beta\cos\varphi}{\sqrt{1+2\beta\cos\varphi+\beta^2}}+\cos r.\frac{\beta\sin\varphi}{\sqrt{1+2\beta\cos\varphi+\beta^2}}.$$

Durch Multiplication mit $\sqrt{1+2\beta\cos\varphi+\beta^2}$ ergiebt sich hieraus:

$$\sqrt{1+2\beta\cos\varphi+\beta^2}.\sin\left(r+\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\varphi}{1+\beta\cos\varphi}\right)=\sin r+\beta\sin(r+\varphi),$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$q=\sqrt{1+2\beta\cos\varphi+\beta^2}$$

und

$$\psi=\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin\varphi}{1+\beta\cos\varphi}$$

setzen,

$$q\sin(r+\psi)=\sin r+\beta\sin(r+\varphi).$$

Vermittels dieser Relation entwickeln wir aus der Hauptreihe

$$a_0=\sin r,\quad a_1=q\sin(r+\psi),\quad a_2=q^2\sin(r+2\psi),\ldots.$$

folgende successive Differenzenreihen:

erste Differenzenreihe:

$$\Delta a_0=\beta\sin(r+\varphi),\quad \Delta a_1=\beta q\sin(r+\varphi+\psi),\quad \Delta a_2=\beta q^2\sin(r+\varphi+2\psi),\ldots$$

zweite Differenzenreihe:

$$\Delta^2 a_0 = \beta^2 \sin(r+2\varphi),\quad \Delta^2 a_1 = \beta^2 q \sin(r+2\varphi+\psi),$$
$$\Delta^2 a_2 = \beta^2 q^2 \sin(r+2\varphi+2\psi), \ldots.$$

u. s. w.

$n$te Differenzenreihe:

$$\Delta^n a_0 = \beta^n \sin(r+n\varphi),\quad \Delta^n a_1 = \beta^n q \sin(r+n\varphi+\psi),$$
$$\Delta^n a_2 = \beta^n q^2 \sin(r+n\varphi+2\psi), \ldots.$$

allgemein:

$$\Delta^n a_x = \beta^n q^x \sin(r+n\varphi+x\psi),$$

und hieraus unter Anwendung der Formel 22)

$$175)\quad \left\{\begin{array}{l} q^n \sin(r+n\psi) = \sin r + n_1 \beta \sin(r+\varphi) + n_2 \beta^2 \sin(r+2\varphi) \\ \qquad + \ldots + n_m \beta^m \sin(r+m\varphi) + R_m, \\ R_m = \beta^{m+1}\{(n-1)_m \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi) \\ + (n-2)_m q \sin(r+\overline{m+1}\varphi+\psi) + (n-3)_m q^2 \sin(r+\overline{m+1}\varphi+2\psi) \\ + \ldots + m_m q^{n-m-1} \sin(r+\overline{m+1}\varphi+\overline{n-m-1}\psi)\}. \end{array}\right.$$

Dieses Restglied R_m lässt sich aber, wenn wir den Satz

$$n_{m+1} = (n-1)_m + (n-2)_m + (n-3)_m + \ldots + m_m{}^{*)}$$

---

*) Man überzeugt sich nämlich leicht von der Richtigkeit der Relation

$$n_{m+1} - (n-1)_{m+1} = (n-1)_m.$$

Setzen wir nun in derselben für n der Reihe nach $m+1$, $m+2$, $m+3$, ... $n-1$, n, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(m+1)_{m+1} - m_{m+1} = m_m,$$
$$(m+2)_{m+1} - (m+1)_{m+1} = (m+1)_m,$$
$$(m+3)_{m+1} - (m+2)_{m+1} = (m+2)_m,$$

u. s. w.

$$(n-1)_{m+1} - (n-2)_{m+1} = (n-2)_m$$
$$n_{m+1} - (n-1)_{m+1} = (n-1)_m$$

aus deren Addition die Gleichung

$$n_{m+1} - m_{m+1} = m_m + (m+1)_m + (m+2)_m + \ldots + (n-2)_m + (n-1)_m$$

oder, weil offenbar $m_{m+1} = 0$, die zu verifizirende Gleichung

$$n_{m+1} = (n-1)_m + (n-2)_m + (n-3)_m + \ldots + m_m$$

entspringt.

benutzen, noch unter folgender Form darstellen:

$$R_m = n_{m+1}\beta^{m+1}\,\frac{\left\{\begin{array}{c}(n-1)_m \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi)+(n-2)_m q \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+\psi)+(n-3)_m q^2 \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+2\psi)\\ +\ldots+m_m q^{n-m-1}\sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+\overline{n-m-1}\,\psi)\end{array}\right\}}{(n-1)_m+(n-2)_m+(n-3)_m+\ldots+m_m}$$

oder nach dem bekannten Satze von den Mittelgrössen:

$$\frac{r_0+r_1+r_2+\ldots}{s_0+s_1+s_2+\ldots} = M\left(\frac{r_0}{s_0}, \frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \ldots\right) \text{ *)}$$

---

*) Unter der Mittelgrösse $M(a,b,c,d,\ldots)$ versteht man eine Grösse, welche kleiner als die grösste, und grösser als die kleinste der Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ ist. Sind $s_0, s_1, s_2, \ldots$ wesentlich positive Zahlen und ist $\frac{r_m}{s_m}$ der kleinste und $\frac{r_n}{s_n}$ der grösste unter den Quotienten $\frac{r_0}{s_0}, \frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \ldots$ so gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{r_n}{s_n} > \frac{r_0}{s_0} > \frac{r_m}{s_m}, \quad \text{folglich} \quad s_0\cdot\frac{r_n}{s_n} > r_0 > s_0\cdot\frac{r_m}{s_m}$$

$$\frac{r_n}{s_n} > \frac{r_1}{s_1} > \frac{r_m}{s_m}, \quad \text{„} \quad s_1\cdot\frac{r_n}{s_n} > r_1 > s_1\cdot\frac{r_m}{s_m}$$

$$\frac{r_n}{s_n} > \frac{r_2}{s_2} > \frac{r_m}{s_m}, \quad \text{„} \quad s_2\cdot\frac{r_n}{s_n} > r_2 > s_2\cdot\frac{r_m}{s_m}$$

u. s. w. u. s. w.

$$R = n_{m+1}\beta^{m+1}M(\sin(r+\overline{m+1}\,\varphi),\; q\sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+\psi),\; q^2\sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+2\psi),\ldots\; q^{n-m-1}\sin(r+\overline{m+1}\,\varphi+\overline{n-m-1}\,\psi).$$

Setzen wir in Formel 175) $\beta=\frac{\alpha}{n}$, so erhalten wir, wenn wir uns zugleich an die Bedeutung der Symbole q und ψ erinnern, nach leichter Umformung:

$$\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\sin\left(r+n\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)=\sin r+\alpha.\sin(r+\varphi)+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}.\alpha^2\sin(r+2\varphi)$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}.\alpha^3\sin(r+3\varphi)+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots m}\alpha^m\sin(r+m\varphi)+R_m,$$

Daher erhalten wir durch Addition dieser gefolgerten Beziehungen:

$$\frac{r_n}{s_n}\cdot(s_0+s_1+s_2+\ldots)>r_0+r_1+r_2+\ldots>\frac{r_m}{s_m}\cdot(s_0+s_1+s_2+\ldots),$$

und durch Division mit $s_0+s_1+s_2+\ldots$:

$$\frac{r_n}{s_n}>\frac{r_0+r_1+r_2+\ldots}{s_0+s_1+s_2+\ldots}>\frac{r_m}{s_m},$$

woraus man sofort die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes erkennt.

wo

$$R_m = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{n}\right)}{1.2.3\ldots(m+1)} \cdot \alpha^{m+1} \cdot M \left\{ \begin{array}{l} \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi), \\ \left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right), \\ \left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{2}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+2\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right), \ldots, \\ \ldots\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n-m-1}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+(n-m-1)\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right) \end{array} \right\}$$

und wenn wir zur Grenze für unendlich wachsende n übergehen:

$$\operatorname{Lim}\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \sin\left(r+n\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right) = \sin r+\frac{\alpha}{1}\sin(r+\varphi)+\frac{\alpha^2}{1.2}\sin(r+2\varphi)$$

$$+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\sin(r+3\varphi)+\ldots+\frac{\alpha^m}{1.2.3\ldots m}\cdot\sin(r+m\varphi)+R_m,$$

$$R_m = \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\ldots.(m+1)} \operatorname{Lim} M \left\{ \begin{array}{l} \sin(r+\overline{m+1}\,\varphi), \\ \left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right), \\ \left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{2}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+2\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right),\ldots. \\ \ldots.\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n-m-1}{2}} \sin\left(r+\overline{m+1}\,\varphi+\overline{n-m-1}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right) \end{array} \right\}$$

Könnten wir beweisen, dass $R_m = 0$, sobald wir m in's Unendliche wachsen lassen, so würde

$$\operatorname{Lim}\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \sin\left(r+n\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)$$

der Reihe rechts gleich sein, die sich dann in's Unendliche erstrecken würde.

Dass diess wirklich der Fall ist, kann auf folgende Art leicht gezeigt werden. Zunächst kann der Factor $\frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3....(m+1)}$ auf die Form $\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}....\frac{\alpha}{m+1}$ gebracht werden. Ist nun α zwischen den Zahlen r und $r+1$ eingeschlossen oder der Zahl r gleich, so haben wir

$$\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}....\frac{\alpha}{r}\cdot\frac{\alpha}{r+1}....\frac{\alpha}{m+1}.$$

Der Theil $\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{3}....\frac{\alpha}{r}$ ist endlich und der Theil $\frac{\alpha}{r+1}\cdot\frac{\alpha}{r+2}....\frac{\alpha}{m+1}$ besteht aus einer unendlichen Anzahl von echten Brüchen als Factoren, deren Zähler sämmtlich von m unabhängig sind, weswegen dieser Theil offenbar der Grenze 0 sich nähert. Multiplicirt man aber diesen Theil mit dem vorausgehenden endlichen, so muss sich dieses Product sicherlich auch der Null nähern. Daher ist

$$\operatorname{Lim}\frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3....(m+1)}=0.$$

Jetzt kommt es also nur noch darauf an zu zeigen, dass oft genannte Mittelgrösse endlich oder null sei. Da jede der in ihr enthaltenen Grössen einen Sinus als Factor enthält, so muss eine solche Grösse kleiner als der Factor sein, mit welchem ein solcher Sinus verbunden ist. Es bleibt uns daher nur noch übrig zu untersuchen, ob jede der Potenzen von $\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ endlich ist. Alle vorderen Potenzen dieser Grösse, die in genannter Mittelgrösse vorkommen, sind, da sie von n und m unabhängige Exponenten haben, endlich. Die letzten Potenzen von

$$\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

dieser Mittelgrösse erfordern jedoch, weil sie von n und m abhängen, eine besondere Betrachtung.

Zunächst bemerken wir, dass eine derartige Potenz unter der Form $\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n-s}{2}}$ enthalten ist. Um diesen Grenzwerth zu bestimmen, benutzen wir den Satz

$$\operatorname{Lim}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e$$

für

$$\text{Lim}\,\varepsilon = 0\,^{*}).$$

---

*) Sei zunächst m eine positive ganze Zahl > 1, so ist nach dem Binomialtheorem

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^3}$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots.(m-\overline{m-1})}{1.2\ldots.m}\cdot\frac{1}{m^m}$$

$$= 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}$$

$$+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots.m}$$

In den Gliedern dieser Reihe, welche von m abhängige Zähler enthalten, kommen lauter Differenzen als Factoren vor, welche offenbar positive echte Brüche sind, da kein Subtrahend die Einheit übersteigt. Wir erhalten daher, sobald wir beim zweiten Gliede stehen bleiben, folgende Vergleichung:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2.$$

Ferner ist offenbar

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

oder nach der Lehre von den geometrischen Progressionen

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+2\left(1-\frac{1}{2^m}\right);$$

folglich auch

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 3.$$

Daher haben wir

$$3 > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2.$$

Wir sehen hieraus, dass $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ eine Grösse ist, welche für $m > 1$

Nach diesem Satze ist

$$\operatorname{Lim}\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n-s}{2}}$$

$$=\operatorname{Lim}\left\{\left[1+\frac{\alpha}{n}(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n})\right]^{\frac{1}{\frac{\alpha}{n}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}}\right\}^{\left(1-\frac{s}{n}\right)\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}$$

$$=\operatorname{Lim} e^{\left(1-\frac{s}{n}\right)\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}=e^{\alpha\cos\varphi},$$

---

jederzeit zwischen den Zahlen 2 und 3 enthalten ist; also ist auch $\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für $\operatorname{Lim} m=\infty$ eine zwischen 2 und 3 liegende Zahl, die wir, ohne ihren genaueren Werth zu erforschen, durch e bezeichnen wollen, so dass in diesem Falle

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e.$$

Ist ferner ϱ ein positiver Bruch, so ist dieser zwischen zwei positiven ganzen Zahlen n und $n+1$ eingeschlossen, so dass

$$n<\varrho<n+1.$$

Hieraus folgt

$$1+\frac{1}{n}>1+\frac{1}{\varrho}>1+\frac{1}{n+1}$$

und

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Beide Grenzen, zwischen welchen $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}$ liegt, nähern sich aber, wenn n wächst, nach dem Vorhergehenden immer mehr und mehr der Zahl e, folglich muss diess auch für die dazwischen liegende Zahl $\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}$ stattfinden. Daher haben wir auch in diesem Falle

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{\varrho}=e.$$

also endlich, folglich hat auch die zu untersuchende Mittelgrösse einen endlichen Werth. Aus allen diesen Untersuchungen geht hervor, dass

$$\operatorname{Lim}\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}\sin\left(r+n\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)$$

$$=\sin r+\frac{\alpha}{1}.\sin(r+\varphi)+\frac{\alpha^2}{1.2}\sin(r+2\varphi)+\ldots.\text{ in inf.}$$

Der erste Factor dieser Limes kann nach dem Satze

$$\operatorname{Lim}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e \text{ für } \operatorname{Lim}\varepsilon=0$$

folgendermaassen bestimmt werden:

$$\operatorname{Lim}\left[1+2\frac{\alpha}{n}\cos\varphi+\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}$$

$$=\operatorname{Lim}\left\{\left[1+\frac{\alpha}{n}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\alpha}{n}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}$$

$$=\operatorname{Lim}e^{\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\varphi+\frac{\alpha}{n}\right)}=e^{\alpha\cos\varphi}.$$

Ist endlich μ eine negative ganze oder gebrochene Zahl, so können wir $\mu=-(\nu+1)$ setzen, wobei ν eine positive Zahl bedeutet. Dies vorausgesetzt, ist

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu=\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)^{-(\nu+1)}=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\nu+1}}\right)^{\nu+1}=\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right);$$

folglich, wenn wir zur Grenze für wachsende μ übergehen, da ν positiv ist:

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu=\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)=e.$$

Der Satz

$$\operatorname{Lim}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^\sigma=e \text{ für } \operatorname{Lim}\sigma=\infty$$

gilt sonach für jedes σ. Hieraus geht natürlich auch hervor

$$\operatorname{Lim}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}=e \text{ für } \operatorname{Lim}\varepsilon=0.$$

Der zweite Factor dagegen kann, wenn wir von dem Satze $\mathrm{Lim}\frac{\mathrm{arctg}\,\varepsilon}{\varepsilon}=1$ für $\mathrm{Lim}\,\varepsilon=0$*) Gebrauch machen, von dem Zeichen Lim auf folgende Art befreit werden:

$$\mathrm{Lim}\sin\left(r+n\,\mathrm{arctg}\frac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)$$

$$=\mathrm{Lim}\sin\left(r+\frac{\mathrm{arctg}\dfrac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}}{\dfrac{\frac{\alpha}{n}\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}}\times\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)$$

$$=\mathrm{Lim}\sin\left(r+\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\frac{\alpha}{n}\cos\varphi}\right)=\sin(r+\alpha\sin\varphi).$$

Wir erhalten daher aus dem Vorhergehenden als Endresultat:

176) $$e^{\alpha\cos\varphi}\sin(r+\alpha\sin\varphi)=\sin r+\frac{\alpha}{1}\sin(r+\varphi)+\frac{\alpha^2}{1.2}\sin(r+2\varphi)+\ldots.$$

---

*) Bezeichnet x einen Bogen, welcher $<\frac{\pi}{2}$, so gilt bekanntlich

$$\mathrm{tg}\,x>x>\sin x;$$

folglich, wenn wir $x=\mathrm{arctg}\,\varepsilon$ setzen,

$$\varepsilon>\mathrm{arctg}\,\varepsilon>\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

oder

$$1>\frac{\mathrm{arctg}\,\varepsilon}{\varepsilon}>\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

Für $\mathrm{Lim}\,\varepsilon=0$ fallen die Grenzen, zwischen welchen $\frac{\mathrm{arctg}\,\varepsilon}{\varepsilon}$ eingeschlossen ist, da jede derselben der Einheit gleich ist, zusammen, weswegen auch

$$\mathrm{Lim}\frac{\mathrm{arctg}\,\varepsilon}{\varepsilon}=1\text{ für }\mathrm{Lim}\,\varepsilon=0.$$

und, wenn wir r in $r+\frac{\pi}{2}$ übergehen lassen,

$$177)\quad e^{\alpha\cos\varphi}\cos(r+\alpha\sin\varphi)=\cos r+\frac{\alpha}{1}\cos(r+\varphi)+\frac{\alpha^2}{1.2}\cos(r+2\varphi)+\ldots$$

Diese Formeln gestatten wegen ihrer Allgemeinheit mannichfache specielle Folgerungen, von denen wir hier nur wenige beifügen wollen.

Aus Formel 177) erhalten wir für $r=\varphi=0$ die bekannte Exponentialentwickelung

$$178)\quad e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\ldots$$

woraus für $\alpha=1$ die genauere numerische Bestimmung von e folgt.

Endlich ergiebt sich aus 176) und 177) für $r=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$:

$$179)\quad \sin\alpha=\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3}{1.2.3}+\frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

$$180)\quad \cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{1.2}+\frac{\alpha^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

XXI.

Einige Bemerkungen über den abgestumpften Kegel mit Rücksicht auf praktische Anwendung.

Von
dem Herausgeber.

Der abgestumpfte Kegel ist bekanntlich ein Körper, welcher bei praktischen Geschäften häufig in Anwendung kommt; den Inhalt eines Baumstammes z. B. wird man nach meiner Meinung immer am Genauesten erhalten, wenn man denselben in mehrere abgestumpfte Kegel zerlegt; Braubottiche und ähnliche Körper haben häufig die Gestalt abgestumpfter Kegel, u. s. w. Die Rechnung nach der gewöhnlichen Formel für den Inhalt des abgestumpften Kegels ist aber immer etwas weitläufig, und insbesondere ist dieselbe nicht geeignet, um auf sie die Construction einer, die Rechnung erleichternden Tafel zu gründen. Ich will daher im Folgenden eine Transformation der in Rede stehenden Formel mittheilen, die mir vor den verschiedenen, schon in Vorschlag gebrachten Umformungen dieser Formel einige Vorzüge zu haben scheint; und so einfach und unbedeutend die Sache auch in theoretischer Beziehung ist, so dürfte sie doch auf der anderen Seite in praktischer oder technischer Beziehung einige Beachtung verdienen; vielleicht ist dieselbe auch schon bekannt, gewiss aber nicht so allgemein, wie sie es nach meiner Meinung zu sein verdient.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich die Halbmesser der grösseren und kleineren, sogenannten unteren und oberen Grundfläche des abgestumpften Kegels respective durch R und r, seine Höhe und seinen Inhalt respective durch h und K, so ist bekanntlich

$$1)\quad K = \tfrac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Nun ist aber

$$R^2 + Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - Rr,$$
$$R^2 + Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr;$$

also

$$R^2+Rr+r^2=(R+r)^2-Rr=(R-r)^2+3Rr;$$

folglich nach 1):

$$K=\tfrac{1}{3}\pi h\{(R+r)^2-Rr\},$$
$$K=\tfrac{1}{3}\pi h\{(R-r)^2+3Rr\};$$

oder

$$3K=\tfrac{1}{3}\pi h\{3(R+r)^2-3Rr\},$$
$$K=\tfrac{1}{3}\pi h\{(R-r)^2+3Rr\};$$

woraus sich durch Addition:

$$4K=\tfrac{1}{3}\pi h\{3(R+r)^2+(R-r)^2\},$$

also

$$2)\quad K=\tfrac{1}{12}\pi h\{3(R+r)^2+(R-r)^2\}$$

oder

$$3)\quad K=\tfrac{1}{4}\pi h(R+r)^2+\tfrac{1}{12}\pi h(R-r)^2$$

ergiebt. Bezeichnet man zwei Cylinder, welche mit dem abgestumpften Kegel gleiche Höhe und zu Halbmessern die Summe $R+r$ und die Differenz $R-r$ haben, respective durch C_{R+r} und C_{R-r}, so ist

$$C_{R+r}=\pi h(R+r)^2,\quad C_{R-r}=\pi h(R-r)^2;$$

also nach 3):

$$4)\quad K=\tfrac{1}{4}C_{R+r}+\tfrac{1}{12}C_{R-r}.$$

Nach meiner Meinung sollte man die zur Erleichterung praktischer Körper-Berechnungen entworfenen Tafeln nicht zu sehr vervielfältigen; hauptsächlich und vor allen Dingen sollte man sein Augenmerk auf die Berechnung einer recht zweckmässig eingerichteten Tafel zur Bestimmung cylindrischer Räume richten, deren Construction nicht der geringsten Schwierigkeit unterliegt, da eine solche Tafel nur zwei Argumente oder Eingänge, nämlich Höhe und Halbmesser, zu haben braucht; suchte man nun, was sehr häufig in zweckmässiger Weise angeht, die theoretischen Formeln zur Berechnung des Inhalts der Körper so einzurichten, dass dieselben als Summen oder Differenzen von Cylindern oder als Summen oder Differenzen gewisser Vielfachen oder gewisser aliquoten Theile cylindrischer Räume erscheinen, so würde eine Tafel, wie die von mir gewünschte, eine **allgemeine** Tafel zur Erleichterung aller Körper-Berechnungen sein, da eine Multiplication oder

Division der aus der Tafel zu entnehmenden Zahlen mit einer ganzen Zahl von mässiger Grösse in der That nicht sehr in Betracht kommen kann, wenigstens für den, der einige mathematische Kenntnisse hat. Besitzt man aber eine solche Tafel zur Berechnung cylindrischer Räume, deren Herausgabe in recht zweckmässiger Form ich im Interesse der Praxis für ein verdienstliches Unternehmen halten würde und zu der ich wohl auffordern möchte, so ist die Berechnung von Kegelstumpfen nach der Formel

$$K = \tfrac{1}{4}C_{R+r} + \tfrac{1}{12}C_{R-r}$$

sehr leicht, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf.

Uebrigens würde man auf die vorstehende Gleichung auch zweckmässig die Berechnung einer besonderen Tafel zur Bestimmung von Kegelstumpfen gründen können. Solche in der Praxis vorkommende Körper weichen fast immer nur sehr wenig von Cylindern ab oder es ist bei denselben $R-r$ fast immer nur eine sehr kleine Grösse, und auch die Höhe h wird meistens nicht sehr beträchtlich sein, wenn man namentlich, wie etwa bei Baumstämmen, den zu berechnenden Körper in mehrere einzelne Theile, die man als abgestumpfte Kegel betrachtet, zu theilen genöthigt ist. Wenn man nun für die Grösse

$$\tfrac{1}{4}C_{R+r} = \tfrac{1}{4}\pi h(R+r)^2$$

eine Tafel mit den beiden Eingängen oder Argumenten $R+r$ und h berechnet, so wird man dieser Tafel leicht noch eine kleine Correctionstafel für die immer nur sehr kleine Grösse

$$\tfrac{1}{12}C_{R-r} = \tfrac{1}{12}\pi h(R-r)^2$$

beifügen können, und mittelst dieser beiden Tafeln wird sich dann der abgestumpfte Kegel

$$K = \tfrac{1}{4}C_{R+r} + \tfrac{1}{12}C_{R-r}$$

bloss durch eine einfache Addition zweier Zahlen mit jeder erforderlichen Genauigkeit berechnen lassen.

In der Praxis kommen auch häufig abgestumpfte Kegel mit elliptischen Grundflächen vor, wie denn z. B. nicht selten Braubottiche u. s. w. eine solche Gestalt haben. Es möchte daher nicht unzweckmässig sein, dem Vorhergehenden bei dieser Gelegenheit noch ein paar Bemerkungen über die Berechnung derartiger Körper hinzuzufügen. Zu dem Ende wollen wir für die beiden elliptischen Grundflächen eines solchen abgestumpften Kegels die halben Hauptaxen durch A, a, dagegen die halben Nebenaxen durch B, b, die Höhe dieses Körpers aber wie gewöhnlich durch

h bezeichnen. Dann erhellet zuvörderst leicht die Richtigkeit der Proportion:

$$A:a=B:b,$$

aus der auch

$$A-a:A=B-b:B,$$
$$A-a:a=B-b:b$$

folgt. Ist nun x die Höhe des sogenannten Ergänzungskegels, so ist offenbar

$$A:a=B:b=h+x:x,$$

also

$$Ax=a(h+x),$$

woraus

$$x=\frac{ah}{A-a}=\frac{bh}{B-b},$$
$$h+x=\frac{Ah}{A-a}=\frac{Bh}{B-b}$$

folgt. Ist jetzt wieder K der Inhalt des abgestumpften Kegels, so ist nach der Lehre vom Kegel und von der Quadratur der Ellipse:

$$K=\tfrac{1}{3}\pi AB\frac{Ah}{A-a}-\tfrac{1}{3}\pi ab\frac{ah}{A-a},$$

also:

$$5)\quad K=\frac{\pi(A^2B-a^2b)h}{3(A-a)};$$

oder auch

$$K=\tfrac{1}{3}\pi AB\frac{Bh}{B-b}-\tfrac{1}{3}\pi ab\frac{bh}{B-b},$$

also

$$6)\quad K=\frac{\pi(AB^2-ab^2)h}{3(B-b)}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$b=\frac{aB}{A},\quad a=\frac{bA}{B};$$

also nach 5) und 6):

$$K=\frac{\pi B(A^3-a^3)h}{3A(A-a)}=\frac{\pi A(B^3-b^3)h}{3B(B-b)};$$

oder:

$$7)\quad K=\frac{B}{A}\cdot\tfrac{1}{3}\pi h(A^2+Aa+a^2)=\frac{b}{a}\cdot\tfrac{1}{3}\pi h(A^2+Aa+a^2)$$

$$=\frac{A}{B}\cdot\tfrac{1}{3}\pi h(B^2+Bb+b^2)=\frac{a}{b}\cdot\tfrac{1}{3}\pi h(B^2+Bb+b^2).$$

Setzen wir nun auf ähnliche Art wie oben:

$$C_{A+a}=\pi h(A+a)^2,\quad C_{A-a}=\pi h(A-a)^2;$$
$$C_{B+b}=\pi h(B+b)^2,\quad C_{B-b}=\pi h(B-b)^2;$$

so ist nach dem Obigen:

$$8)\quad K=\frac{B}{A}(\tfrac{1}{4}C_{A+a}+\tfrac{1}{12}C_{A-a})$$

$$=\frac{b}{a}(\tfrac{1}{4}C_{A+a}+\tfrac{1}{12}C_{A-a})$$

$$=\frac{A}{B}(\tfrac{1}{4}C_{B+b}+\tfrac{1}{12}C_{B-b})$$

$$=\frac{a}{b}(\tfrac{1}{4}C_{B+b}+\tfrac{1}{12}C_{B-b}).$$

Man kann also auch die Berechnung elliptischer Kegelstumpfe auf die Berechnung von Cylindern zurückführen und die oben beschriebenen Tafeln zu deren Berechnung benutzen. Weitere Folgerungen hieraus zu ziehen, überlassen wir dem Leser.

XXII.

Einige Bemerkungen über die Gleichungen des dritten Grades.

Von

dem Herausgeber.

In der Abhandlung Thl. XI. Nr. XXXIII. habe ich den folgenden Satz von den cubischen Gleichungen bewiesen, ohne dabei irgend welchen Gebrauch von der cardanischen Formel, die für mich überhaupt immer etwas Zurückstossendes hat, zu machen:

Wenn die gegebene cubische Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

ist, und

$$A=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c,$$

$$B=-\frac{4}{27}(b-\frac{1}{3}a^2)^3$$

gesetzt wird, so hat, wenn

$$A^2-B>0$$

ist, die gegebene cubische Gleichung eine reelle und zwei — natürlich ungleiche — imaginäre Wurzeln; wenn dagegen

$$A^2-B=0$$

ist, so hat die gegebene cubische Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind; wenn endlich

$$A^2-B<0$$

ist, so hat die gegebene cubische Gleichung gleichfalls drei reelle Wurzeln.

Bei der Beurtheilung der Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0,$$

die eine vollständige cubische Gleichung ist, in welcher das zweite Glied nicht fehlt, kommt es also lediglich auf die Beurtheilung des Werthes der Grösse

$$A^2-B,$$

d. h. darauf an, ob

$$A^2-B \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

ist, indem dem obersten Zeichen eine reelle und zwei imaginäre, dem mittleren und untersten Zeichen drei reelle Wurzeln entsprechen.

Nach dem Obigen ist

$$A^2-B=\left(\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)^2+\frac{4}{27}(b-\frac{1}{3}a^2)^3,$$

also

$$27^2.(A^2-B)=(2a^3-9ab+27c)^2+4(3b-a^2)^3$$

oder

$$27^2.(A^2-B)=\{3(9c-ab)-2a(3b-a^2)\}^2+4(3b-a^2)^3,$$

so dass man also meinen obigen Satz auch auf folgende Art aussprechen kann:

Jenachdem man in der Bedingung

$$(2a^3-9ab+27c)^2+4(3b-a^2)^3 \gtreqless 0$$

oder, was Dasselbe ist, in der Bedingung

$$\{3(9c-ab)-2a(3b-a^2)\}^2+4(3b-a^2)^3 \gtreqless 0,$$

das oberste Zeichen oder eins der beiden unteren Zeichen nehmen muss, hat die cubische Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

eine reelle und zwei imaginäre oder drei reelle Wurzeln.

In der Abhandlung Thl. XXII. Nr. III. hat Herr Schulrath Müller in Wiesbaden, sich unmittelbar an die cardanische Formel anschliessend, den folgenden Satz bewiesen, wenigstens würde ich mir erlauben, denselben auf folgende Art auszusprechen:

Jenachdem man in der Bedingung

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)^2-4(\alpha\gamma-\beta^2)(\beta\delta-\gamma^2) \gtreqless 0$$

das oberste Zeichen oder eins der beiden unteren Zeichen nehmen muss, hat die cubische Gleichung

$$\alpha x^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta=0$$

eine reelle und zwei imaginäre oder drei reelle Wurzeln.

Es war zu erwarten, dass beide Sätze im Wesentlichen völlig einerlei und nur rücksichtlich der Form der analytischen Ausdrücke, auf die es bei diesen Sätzen ankommt, verschieden sind. Dies etwas näher zu erläutern, ist der hauptsächlichste Zweck vorliegender Zeilen.

Zu dem Ende will ich den Satz des Herrn Schulrath Müller zuerst auf die cubische Gleichung:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

anwenden, d. h. ich will in der von demselben angegebenen Bedingung für α, β, γ, δ respective α, $\frac{1}{3}\beta$, $\frac{1}{3}\gamma$, δ setzen. Dadurch wird die in Rede stehende Bedingung, wie man sogleich findet:

$$(9\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(3\alpha\gamma - \beta^2)(3\beta\delta - \gamma^2) \gtreqless 0,$$

in welcher Form ich überhaupt für den praktischen Gebrauch die Bedingung lieber ausdrücken möchte. Wendet man nun diese Bedingung auf die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

an, d. h. setzt man

$$\alpha = 1, \quad \beta = a, \quad \gamma = b, \quad \delta = c;$$

so erhält man die Bedingung:

$$(9c - ab)^2 - 4(3b - a^2)(3ac - b^2) \gtreqless 0,$$

und es frägt sich nun, ob mit dieser Bedingung meine obige Bedingung

$$(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(3b - a^2)^3 \gtreqless 0$$

einerlei ist? Entwickelt man aber die Grösse

$$(2a^3 - 9ab + 27c)^2 + 4(3b - a^2)^3$$

und hebt auf, was sich aufheben lässt, so findet man für dieselbe den Ausdruck

$$27(-a^2b^2 + 27c^2 + 4a^3c - 18abc + 4b^3),$$

folglich die Bedingung:

$$-a^2b^2 + 27c^2 + 4a^3c - 18abc + 4b^3 \gtreqless 0.$$

Entwickelt man ferner die Grösse

$$(9c - ab)^2 - 4(3b - a^2)(3ac - b^2)$$

und hebt wieder auf, was sich aufheben lässt, so erhält man für dieselbe den Ausdruck:

$$3(-a^2b^2+27c^2+4a^3c-18abc+4b^3),$$

folglich die Bedingung:

$$-a^2b^2+27c^2+4a^3c-18abc+4b^3 \gtreqless 0.$$

Hieraus sieht man also, dass meine, schon im Jahre 1848 angegebene Bedingung:

$$(2a^3-9ab+27c)^2+4(3b-a^2)^3 \gtreqless 0,$$

und die Bedingung des Herrn Schulrath Müller:

$$(9c-ab)^2-4(3b-a^2)(3ac-b^2) \gtreqless 0,$$

in der That im Wesentlichen völlig einerlei und nur dem Ausdrucke nach verschieden sind.

Ich bin gern bereit, dem Müller'schen Ausdrucke, namentlich in der obigen, von seinem Urheber ihm ursprünglich gegebenen Form, den Vorzug der grösseren analytischen Eleganz zuzugestehen, und viele Andere werden gewiss derselben Ansicht sein, um so mehr, weil die Grössenform $(\alpha\delta-\beta\gamma)^2-4(\alpha\gamma-\beta^2)(\beta\delta-\gamma^2)$ bekanntlich in ganz ähnlicher Form auch bei vielen anderen Untersuchungen auftritt. Jedoch glaube ich auf der anderen Seite gefunden zu haben, dass mein Ausdruck, namentlich bei allgemeinen analytischen Entwickelungen, manche Vortheile vor dem Müller'schen darbietet, was ich vielleicht einmal bei einer anderen Gelegenheit näher erläutern werde. Für jetzt will ich nur ganz in der Kürze bemerken, dass z. B. aus meinem Ausdrucke sich auf der Stelle ergiebt, dass, wenn

$$3b-a^2>0$$

ist, niemals

$$(2a^3-9ab+27c)^2+4(3b-a^2)^3 \leqq 0$$

sein kann, sondern immer

$$(2a^3-9ab+27c)^2+4(3b-a^2)^3>0$$

sein muss, was unmittelbar auf den folgenden, wohl einigermassen bemerkenswerthen Satz führt:

Wenn $3b-a^2>0$ oder $a^2<3b$ ist, so hat die cubische Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

jederzeit eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Weil nach meiner Meinung der vorliegende Gegenstand für die Algebra wichtig ist, so habe ich denselben hier etwas näher besprochen, und will mir erlauben, diesen Aufsatz mit der folgenden, an die Leser dieser Zeitschrift gerichteten Bitte zu schliessen.

Aus der Theorie der Flächen des zweiten Grades in der Geometrie und aus der Theorie der Hauptaxen der Systeme materieller Punkte in der Mechanik weiss man, dass cubische Gleichungen von der Form:

$$(x-a)(x-b)(x-c)-d^2(x-a)-e^2(x-b)-f^2(x-c)+2def=0,$$

d. h. von der Form:

$$\left.\begin{array}{r|r|r} x^3-a & x^2+ab & x-abc \\ -b & +bc & +add \\ -c & +ca & +bee \\ & -dd & +cff \\ & -ee & +2def \\ & -ff & \end{array}\right\}=0,$$

jederzeit drei reelle Wurzeln haben. Man hat für diesen Satz auch schon verschiedene, ziemlich künstliche, rein algebraische Beweise gegeben, von denen einer in meinen Elementen der analytischen Geometrie. Thl. II. Leipzig. 1839. S. 199. §. 72. mitgetheilt ist. Es scheint mir jedoch interessant zu sein, die obigen allgemeinen Kriterien, nach denen man die Anwesenheit der reellen und imaginären Wurzeln beurtheilen kann, auf die vorstehende, sehr merkwürdige und wichtige Gleichung anzuwenden, was freilich, wie sich voraussehen lässt und wie ich bei gemachten Versuchen auch schon zu erfahren Gelegenheit gehabt habe, auf ziemlich weitläufige Rechnungen führt, die aber auch jedenfalls zu bemerkenswerthen algebraischen Relationen führen werden. Ich halte aber einen solchen, auf blosse elementare algebraische Rechnungen gestützten Beweis für verdienstlich und für ein wünschenswerthes Besitzthum der Wissenschaft, weshalb ich auch einen solchen Beweis gern in das Archiv aufnehmen würde, und die Leser dieser Zeitschrift zu dessen Aufsuchung, die in der angegebenen Weise mir selbst noch nicht gelungen ist, aufzufordern mir erlauben möchte.

XXIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Arithmetischer Satz

von

Herrn *Oskar Werner,*

Lehrer der Mathematik zu Dresden.

Es ist jederzeit:

$$1)\quad a+b=\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a},$$

$$ab=(ab)^1;$$

$$2)\quad a+b+c=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)},$$

$$ab+ac+bc=\frac{(ab)^2}{(a-c)\times(b-c)}+\frac{(ac)^2}{(a-b)\times(c-b)}+\frac{(bc)^2}{(b-a)\times(c-a)},$$

$$abc=(abc)^1;$$

$$3)\quad a+b+c+d=\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)},$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=\frac{(ab)^3}{(a-c)(a-d)\times(b-c)(b-d)}$$

$$+\frac{(ac)^3}{(a-b)(a-d)\times(c-b)(c-d)}+\frac{(ad)^3}{(a-b)(a-c)\times(d-b)(d-c)}$$

$$+\frac{(bc)^3}{(b-a)(b-d)\times(c-a)(c-d)}+\frac{(bd)^3}{(b-a)(b-c)\times(d-a)(d-c)}$$

$$+\frac{(cd)^3}{(c-a)(c-b)\times(d-a)(d-b)},$$

$$abc+abd+acd+bcd=\frac{(abc)^2}{(a-d)\times(b-d)\times(c-d)}+\frac{(abd)^2}{(a-c)\times(b-c)\times(d-c)}$$

$$+\frac{(acd)^2}{(a-b)\times(c-b)\times(d-b)}+\frac{(bcd)^2}{(b-a)\times(c-a)\times(d-a)},$$

$$abcd=(abcd)^1.$$

Welches allgemeine Gesetz ergiebt sich hieraus und wie lässt sich dieses allgemein beweisen?

XXIV.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Professor J. K. Steczkowski an der Universität zu Krakau an den Herausgeber.

Ungeachtet der pythagoräische Lehrsatz so vielfach bewiesen worden ist, dass es überflüssig scheinen dürfte, auf neue und einfachere Beweisarten zu denken, so glaube ich dennoch, dass, da man beim Vortrage der elementaren Geometrie mit so vielen Individuen verschiedener Fassungskraft zu thun hat, es nützlich wäre, verschiedene Beweise, wenigstens der wichtigsten Lehrsätze, bei der Hand zu haben. In der Blanchet'schen Ausgabe der Elementar-Geometrie von Legendre fand ich einen bloss aufgestellten Lehrsatz, aus dem der pythagoräische folgerecht fliesst, den ich bewiesen und auf den pythagoräischen angewendet habe. Indem ich in dem XX. Bande S. 480. Ihres schätzbaren Archivs einen neuen, von Ihnen aus einem englischen Lehrbuche entlehnten Beweis dieses letzten Lehrsatzes fand, so entschloss ich mich, in Rücksicht auf den oben erwähnten Umstand, Sie zu bitten, meine Beweisart in Ihre Zeitschrift aufnehmen zu wollen.

Lehrsatz. **Wenn man auf zwei Seiten AB, AC (Taf. IV. Fig. 4.) eines geradlinigen Dreiecks BAC, was immer**

für Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate verzeichnet, die den des Dreiecks parallelen Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkte O verlängert, den Punkt O mit A durch die Gerade OA verbindet, und auf der dritten Seite BC ein Parallelogramm $BCDE$ so bildet, dass die Seite BE gleich und parallel der verbindenden Geraden OA ist, so ist die Fläche des letzten Parallelogramms gleich der Summe der Flächen der zwei ersten Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate.

Beweis. Werden die Seiten EB und DC des letzten Parallelogramms bis zu den Durchschnittspunkten F und G mit den Seiten oder ihren Verlängerungen der ersten Parallelogramme, Rechtecke oder Quadrate verlängert und die Linie FG gezogen, so sind die Dreiecke FOG und BAC congruent, indem $FO=BA$, $GO=CA$ und der Winkel $FOG=BAC$; also der Winkel $OFG=ABC$ und $OGF=ACB$. Zwei Fünfecke $BFOGC$ und $EBACD$ sind auch congruent, indem sie Seiten und Winkel gleich haben, nämlich $FO=BA$, $GO=AC$, $BF=OA=BE$, $CG=OA=CD$, $BC=ED$ und Winkel $OEB=ABE$, weil beide aus gleichen Theilen zusammengesetzt sind, eben so Winkel $OGC=ACD$; die andern Winkel sind augenscheinlich unter einander gleich. Zieht man nun von beiden Fünfecken den ihnen gemeinschaftlichen Theil BAC ab, so bleibt die Summe der Parallelogramme $BFOA+CGOA=BCDE$. Da aber $BFOA=BMNA$ und $CGOA=CRSA$, so ist auch $BMNA+CSRA=BCDE$.

Hat man jetzt (Taf. IV. Fig. 5.) ein bei A rechtwinkliges Dreieck BAC und verzeichnet auf drei Seiten Quadrate, dann die Seiten EB, DC des auf der Hypotenuse verzeichneten Quadrats bis F und G verlängert, so unterscheidet sich der Beweis bloss dadurch, dass hier zuerst aus der Congruenz der Dreiecke BMF und CRG mit dem Dreiecke BAC die Gleichheit $MF=AC$ und $RG=BA$ gefolgert werde. Weil nun $NO=AC$ und $SO=AB$, so ist $NO=MF$, $SO=RG$, woraus $NO-NF=MF-NF$ oder $FO=MN=AB$ und $SO+SG=RG+SG$ oder $GO=RS=AC$ folgt; es ist also auch $OA=BF=CG$. Aus der Congruenz der Dreiecke FOG und BAC folgt auch $FG=BC$. Nun ist aber $BF=BC=CG$, also $BE=AO=BF$, $CG=CB$. Das Fünfeck $BFOGC=$ Fünfeck $EBACD$, woraus $BFOGC-BAC=EBACD-BAC$ oder $BFOA+CGOA=BCDE$. Da aber $BFOA=BMNA$ und $CGOA=CRSA$, so ist auch $BCDE=BMNA+CRSA$.

Nebenbei theile ich Ihnen eine Auflösung der Aufgabe der Transformation der Coordinaten in der Ebene mit, die, obwohl ich sie schon seit zwanzig Jahren kenne und mich seit fünfzehn Jahren derselben bei meinem Vortrage bediene, so muss ich doch gestehen, dass ich sie bis jetzt in keinem Lehrbuche über die analytische Geometrie gelesen habe.

Es seien in Taf. IV. Fig. 6. OX, OY die ursprünglichen und OX', OY' die neuen Coordinatenaxen. Nun sei ein Punkt m, dessen ursprüngliche Coordinaten $Op = x$, $pm = y$ und die neuen $Op' = x'$, $p'm = y'$ sind. Ausserdem sei β der Winkel XOY der alten Axen, dann $\alpha = XOX'$ der Winkel der neuen Axe X' und $\beta' = XOY'$ der der neuen Axe Y' mit der alten Axe X. Die Entfernung des Punktes m von der Axe OY ist $mn = pq = x\sin\beta$. Da aber $pq = rp' + p's = x'\sin(\beta-\alpha) + y'\sin(\beta-\beta')$, so ist auch

$$x = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}x' + \frac{\sin(\beta-\beta')}{\sin\beta}y'.$$

Sucht man auf die nämliche Weise die Entfernung des Punktes m von der Axe OX, so hat man diese Entfernung $= mt = mo + p't'$. Aus den Dreiecken $Op't'$ und mop' findet man $p't' = x'\sin\alpha$, $mo = y'\sin\beta'$; aus dem Dreiecke pmt aber $mt = y\sin\beta$, und aus diesen Werthen:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}x' + \frac{\sin\beta'}{\sin\beta}y'.$$

Dies sind die zwei bekannten allgemeinen Gleichungen, mittelst welcher man aus einem beliebigen in ein beliebiges Coordinaten-System übergeht.

Ist das alte System rechtwinklig, so ist $\beta = 90^0$, und die obigen Gleichungen gehen in folgende über:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta',$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta'.$$

Soll auch das neue System rechtwinklig sein, so sieht man aus der Figur, dass $\beta' - \alpha = 90^0$ oder $\beta' = 90^0 + \alpha$ sein muss, und die letzten Gleichungen gehen in

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

über.

Krakau den 24. Januar 1854.

Ueber in und um den Kreis beschriebene Fünfecke.

Vom Herausgeber.

Nicolaus Fuss, ein Schüler Euler's, bekanntlich einer der berühmtesten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts, hat in einer schönen Abhandlung über Vielecke *) auch einige Sätze über in und um den Kreis beschriebene Fünfecke bewiesen, die ich, ungeachtet ihrer Einfachheit, doch für bemerkenswerth halte, und daher, theilweise mit anderen Beweisen versehen, im Folgenden mittheilen will.

Sei $ABCDE$ (Taf. IV. Fig. 7.) ein beliebiges in den Kreis, dessen Mittelpunkt O ist, beschriebenes Fünfeck. Die Winkel dieses Fünfecks wollen wir durch A, B, C, D, E bezeichnen. Der Umfang und der Flächeninhalt des Fünfecks seien respective P und F, und r sei der Halbmesser des Kreises, in welchen dasselbe beschrieben ist.

Weil nun bekanntlich

$$2C = \text{arc}\,DE + \text{arc}\,EA + \text{arc}\,AB,$$
$$2E = \text{arc}\,AB + \text{arc}\,BC + \text{arc}\,CD$$

ist, so ist

$$2(C+E) = 2\,\text{arc}\,AB + \text{arc}\,BC + \text{arc}\,CD + \text{arc}\,DE + \text{arc}\,EA,$$

also

$$2(C+E) = 2\pi + \text{arc}\,AB,$$

folglich

$$2(C+E) = 2\pi + A\hat{O}B,$$

woraus sich

$$\tfrac{1}{2}A\hat{O}B = C + E - \pi$$

ergiebt.

Ueberhaupt ist also:

$$1)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}A\hat{O}B = C + E - \pi, \\ \tfrac{1}{2}B\hat{O}C = D + A - \pi, \\ \tfrac{1}{2}C\hat{O}D = E + B - \pi, \\ \tfrac{1}{2}D\hat{O}E = A + C - \pi, \\ \tfrac{1}{2}E\hat{O}A = B + D - \pi. \end{cases}$$

---

*) De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis. Nova Acta Petropolitana. Tom. XIII. p. 166.

Nun ist offenbar:

$$AB = 2r\sin\tfrac{1}{2}A\hat{O}B,$$
$$BC = 2r\sin\tfrac{1}{2}B\hat{O}C,$$
$$CD = 2r\sin\tfrac{1}{2}C\hat{O}D,$$
$$DE = 2r\sin\tfrac{1}{2}D\hat{O}E,$$
$$EA = 2r\sin\tfrac{1}{2}E\hat{O}A;$$

also nach 1):

$$2)\quad \begin{cases} AB = -2r\sin(C+E), \\ BC = -2r\sin(D+A), \\ CD = -2r\sin(E+B), \\ DE = -2r\sin(A+C), \\ EA = -2r\sin(B+D). \end{cases}$$

Weil nun

$$P = AB + BC + CD + DE + EA$$

ist, so ist

$$3)\quad P = -2r\{\sin(A+C) + \sin(B+D) + \sin(C+E) + \sin(D+A) + \sin(E+B)\}.$$

Sehr leicht überzeugt man sich ferner, dass

$$\begin{aligned} F = & \tfrac{1}{2}r.AB.\cos\tfrac{1}{2}A\hat{O}B \\ & + \tfrac{1}{2}r.BC.\cos\tfrac{1}{2}B\hat{O}C \\ & + \tfrac{1}{2}r.CD.\cos\tfrac{1}{2}C\hat{O}D \\ & + \tfrac{1}{2}r.DE.\cos\tfrac{1}{2}D\hat{O}E \\ & + \tfrac{1}{2}r.EA.\cos\tfrac{1}{2}E\hat{O}A \end{aligned}$$

ist; also ist nach 1) und 2):

$$\begin{aligned} F = & r^2\sin(C+E)\cos(C+E) \\ & + r^2\sin(D+A)\cos(D+A) \\ & + r^2\sin(E+B)\cos(E+B) \\ & + r^2\sin(A+C)\cos(A+C) \\ & + r^2\sin(B+D)\cos(B+D), \end{aligned}$$

folglich

$$4)\quad F=\tfrac{1}{2}r^2\left\{\begin{array}{l}\sin 2(A+C)+\sin 2(B+D)+\sin 2(C+E)\\ +\sin 2(D+A)+\sin 2(E+B)\end{array}\right\}.$$

Ziehen wir die Diagonale BE, so ist

$$BE^2=AB^2+EA^2-2AB.EA.\cos A \text{ und } BE=2r\sin\tfrac{1}{2}B\hat{O}E.$$

Nun erhellet aber leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$B\hat{O}E+2A=2\pi, \text{ also } \tfrac{1}{2}B\hat{O}E=\pi-A, \ \sin\tfrac{1}{2}B\hat{O}E=\sin A;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$2r\sin A=\sqrt{AB^2+EA^2-2AB.EA.\cos A}$$

oder

$$r=\frac{\sqrt{AB^2+EA^2-2AB.EA.\cos A}}{2\sin A}.$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DE=d,\quad EA=e;$$

so ist

$$5)\quad \left\{\begin{array}{l} r=\dfrac{\sqrt{a^2+e^2-2ae\cos A}}{2\sin A},\\[2mm] r=\dfrac{\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos B}}{2\sin B},\\[2mm] r=\dfrac{\sqrt{c^2+b^2-2cb\cos C}}{2\sin C},\\[2mm] r=\dfrac{\sqrt{d^2+c^2-2dc\cos D}}{2\sin D},\\[2mm] r=\dfrac{\sqrt{e^2+d^2-2ed\cos E}}{2\sin E}.\end{array}\right.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt leicht umgekehrt durch Auflösung einer quadratischen Gleichung:

$$6)\quad \cos A=\frac{ae\pm\sqrt{a^2e^2-4(a^2+e^2)r^2+16r^4}}{4r^2},$$

und eben so für die übrigen Winkel.

Wenn um und in ein Fünfeck Kreise beschrieben sind, deren Halbmesser respective r und ϱ sind, so ist offenbar:

$$F = \tfrac{1}{2}\varrho P.$$

Führt man in diese Gleichung die Ausdrücke 3) und 4) von P und F ein, so erhält man:

$$7)\quad \frac{r}{2\varrho}$$

$$= \frac{\sin(A+C)+\sin(B+D)+\sin(C+E)+\sin(D+A)+\sin(E+B)}{\sin 2(A+C)+\sin 2(B+D)+\sin 2(C+E)+\sin 2(D+A)+\sin 2(E+B)}.$$

Wenn das Fünfeck $ABCDE$ (Taf. IV. Fig. 8.) um den aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser ϱ beschriebenen Kreis beschrieben ist, so hat man offenbar die folgenden Gleichungen:

$$8)\left\{\begin{array}{l}
AB=\varrho(\cot\tfrac{1}{2}A+\cot\tfrac{1}{2}B)=\dfrac{\varrho\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B},\\
BC=\varrho(\cot\tfrac{1}{2}B+\cot\tfrac{1}{2}C)=\dfrac{\varrho\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C},\\
CD=\varrho(\cot\tfrac{1}{2}C+\cot\tfrac{1}{2}D)=\dfrac{\varrho\sin\frac{1}{2}(C+D)}{\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}D},\\
DE=\varrho(\cot\tfrac{1}{2}D+\cot\tfrac{1}{2}E)=\dfrac{\varrho\sin\frac{1}{2}(D+E)}{\sin\frac{1}{2}D\sin\frac{1}{2}E},\\
EA=\varrho(\cot\tfrac{1}{2}E+\cot\tfrac{1}{2}A)=\dfrac{\varrho\sin\frac{1}{2}(E+A)}{\sin\frac{1}{2}E\sin\frac{1}{2}A}.
\end{array}\right.$$

So wie Fuss a. a. O. habe auch ich die vorhergehenden Relationen bloss für das Fünfeck entwickelt, und bei Fuss, welcher gleich am Anfange seiner Entwickelung die bloss für das Fünfeck geltende Relation $A+B+C+D+E=3\pi$ in Anwendung bringt, scheinen sie allerdings auch bloss für das Fünfeck gültig zu sein. Meine obige Entwickelung, bei der ich vorstehende Relation nicht angewandt habe, lässt aber, wie es mir scheint, sogleich erkennen, dass die obigen Entwickelungen sich leicht auf jedes beliebige Vieleck erweitern lassen. Dies aber weiter auszuführen, ist hier nicht mein Zweck. Vielleicht giebt das Obige dem Leser Veranlassung zu weiteren Untersuchungen.

Zum Schluss will ich noch die Auflösung kurz mittheilen, welche Fuss für die folgende Aufgabe giebt:

Wenn die Seiten eines Fünfecks und ein Berührungspunkt gegeben sind: den Halbmesser des in das Fünfeck beschriebenen Kreises zu finden.

In Taf. IV. Fig. 8. setze man

$$AB=a,\quad BC=b,\quad CD=c,\quad DE=d,\quad EA=e$$

und

$$AF=AK=f,$$
$$BG=BF=a-f=g,$$
$$CH=CG=b-g=h,$$
$$DJ=DH=c-h=i,$$
$$EK=EJ=d-i=k;$$

so ist:

$$\cot\tfrac{1}{2}A=\frac{f}{\varrho},\quad \cot\tfrac{1}{2}B=\frac{g}{\varrho},\quad \cot\tfrac{1}{2}C=\frac{h}{\varrho},\quad \cot\tfrac{1}{2}D=\frac{i}{\varrho},\quad \cot\tfrac{1}{2}E=\frac{k}{\varrho}.$$

Nun ist aber

$$A+B+C+D+E=3\pi,$$

also

$$\frac{A+B+C}{2}+\frac{D+E}{2}=\frac{3}{2}\pi;$$

folglich

$$\cot\left(\frac{A+B+C}{2}+\frac{D+E}{2}\right)=0,$$

und hieraus:

$$\cot\frac{A+B+C}{2}\cot\frac{D+E}{2}-1=0.$$

Nun findet man aber leicht:

$$\cot\frac{A+B+C}{2}=\frac{fgh-(a+h)\varrho^2}{\varrho(fg+ah-\varrho^2)},\quad \cot\frac{D+E}{2}=\frac{ik-\varrho^2}{\varrho(i+k)}=\frac{ik-\varrho^2}{d\varrho};$$

und hieraus die Gleichung:

$$(a+d+h)\varrho^4-\{adh+ik(a+h)+fg(d+h)\}\varrho^2+fghik=0.$$

Setzt man jetzt der Kürze wegen:

$$M=\frac{adh+ik(a+h)+fg(d+h)}{a+d+h},\quad N=\frac{fghik}{a+d+h};$$

so ist $\varrho^4-M\varrho^2+N=0$, also

$$\varrho=\sqrt{\{\tfrac{1}{2}M\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}M^2-N}\}}.$$

Meine Absicht ist im Obigen gar nicht gewesen, diesen Gegenstand zu erschöpfen; ich habe nur einige Resultate aus einer Arbeit eines älteren berühmten Mathematiker zu weiterer Anregung mittheilen wollen. Vielleicht lässt sich das Obige auch hin und wieder zu Uebungen für Schüler benutzen. G.

Berichtigung der Berichtigung im Archiv Thl. XXI. S. 344.

Von
Herrn Professor Dr. *J. Dienger*
an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.

$$\text{cn}\,2a=\frac{\text{cn}^2a-\text{sn}^2a\,\text{dn}^2a}{1-m^2\text{sn}^4a}=\frac{1-\text{sn}^2a-\text{sn}^2a(1-m^2\text{sn}^2a)}{1-m^2\text{sn}^4a},$$

$$\text{cn}\,2a-m^2\text{cn}\,2a\,\text{sn}^4a=1-\text{sn}^2a-\text{sn}^2a+m^2\text{sn}^4a,$$

$$\text{cn}\,2a-1+2\text{sn}^2a=m^2\text{sn}^4a\,(1+\text{cn}\,2a),$$

$$\text{sn}^4a-\frac{2\,\text{sn}^2a}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}+\frac{1-\text{cn}\,2a}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}=0,$$

$$\text{sn}^2a=\frac{1}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}\pm\sqrt{\frac{1}{m^4(1+\text{cn}\,2a)^2}-\frac{1-\text{cn}\,2a}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}}$$

$$=\frac{1}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}\pm\frac{\sqrt{1-m^2(1-\text{cn}^2 2a)}}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{1-m^2\text{sn}^2 2a}}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}=\frac{1\pm\text{dn}\,2a}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}.$$

Aber von den zwei Zeichen ist nur das **untere** zulässig, da sonst $\text{sn}^2a>1$ werden könnte, wie man leicht sieht; demnach:

$$\text{sn}^2a=\frac{1-\text{dn}\,2a}{m^2(1+\text{cn}\,2a)}=\frac{(1-\text{dn}\,2a)\,(1+\text{dn}\,2a)\,(1-\text{cn}\,2a)}{m^2(1+\text{cn}\,2a)\,(1+\text{dn}\,2a)\,(1-\text{cn}\,2a)}$$

$$=\frac{(1-\text{dn}^2 2a)(1-\text{cn}\,2a)}{m^2(1-\text{cn}^2 2a)(1+\text{dn}\,2a)}=\frac{m^2\text{sn}^2 2a\,(1-\text{cn}\,2a)}{m^2\text{sn}^2 2a\,(1+\text{dn}\,2a)}=\frac{1-\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a},$$

$$\text{sn}\,a=\pm\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a}}.$$

Dass die „berichtigte" Formel nicht recht ist, ergiebt sich schon daraus, dass $\text{sn}\,a$ ja **vier** Werthe haben könnte.

Uebrigens ist ganz direct:

$$1-\text{cn}\,2a=\frac{1-m^2\text{sn}^4a-1+\text{sn}^2a+\text{sn}^2a-m^2\text{sn}^4a}{1-m^2\text{sn}^4a}=\frac{2\,\text{sn}^2a(1-m^2\text{sn}^2a)}{1-m^2\text{sn}^4a},$$

$$1+\text{dn}\,2a=\frac{1-m^2\text{sn}^4a+1-m^2\text{sn}^2a-m^2\text{sn}^2a+m^2\text{sn}^4a}{1-m^2\,\text{sn}^4a}=\frac{2(1-m^2\text{sn}^2a)}{1-m^2\text{sn}^4a};$$

woraus

$$\frac{1-\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a}=\text{sn}^2 a,\quad \text{sn}\,a=\pm\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a}},$$

$$\text{dn}\,2a+\text{cn}\,2a=\frac{\text{cn}^2 a-\text{sn}^2 a\,\text{dn}^2 a+\text{dn}^2 a-m^2\text{sn}^2 a\,\text{cn}^2 a}{1-m^2\text{sn}^4 a}$$

$$=\frac{1-\text{sn}^2 a-\text{sn}^2 a+m^2\text{sn}^4 a+1-m^2\text{sn}^2 a-m^2\text{sn}^2 a+m^2\text{sn}^4 a}{1-m^2\text{sn}^4 a}$$

$$=\frac{2(1-\text{sn}^2 a)(1-m^2\text{sn}^2 a)}{1-m^2\text{sn}^4 a}=\frac{2\,\text{cn}^2 a(1-m^2\text{sn}^2 a)}{1-m^2\text{sn}^4 a},$$

$$\frac{\text{dn}\,2a+\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a}=\text{cn}^2 a,\quad \text{cn}\,a=\pm\sqrt{\frac{\text{dn}\,2a+\text{cn}\,2a}{1+\text{dn}\,2a}}.$$

Von dem Herausgeber.

In dem in einen Kreis beschriebenen Sechsecke $ABCDEF$ (Taf. IV. Fig. 9.), dessen Winkel wir durch A, B, C, D, E, F bezeichnen wollen, ist nach dem Ptolemäischen Lehrsatze, angewandt auf die beiden in den Kreis beschriebenen Vierecke $ABCD$ und $ADEF$:

$$AC.BD=AB.CD+BC.AD,$$

$$AE.DF=AF.DE+EF.AD;$$

also ist

$$AD=\frac{AC.BD-AB.CD}{BC}=\frac{AE.DF-AF.DE}{EF},$$

und hieraus:

$$EF.AC.BD-BC.AE.DF$$

$$=AB.CD.EF-BC.DE.AF.$$

Nun ist aber, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, offenbar:

$$AC=2r\sin B,\quad BD=2r\sin C;$$

$$AE=2r\sin F,\quad DF=2r\sin E;$$

also nach dem Obigen:

$$EF.\sin B\sin C-BC.\sin E\sin F=\frac{AB.CD.EF-BC.DE.AF}{4r^2}.$$

Auf diese Weise ist überhaupt:

$$AB.\sin D\sin E-DE.\sin A\sin B=\frac{AB.CD.EF-BC.DE.AF}{4r^2},$$

$$CD.\sin A\sin F-AF.\sin C\sin D=\frac{AB.CD.EF-BC.DE.AF}{4r^2},$$

$$EF.\sin B\sin C-BC.\sin E\sin F=\frac{AB.CD.EF-BC.DE.AF}{4r^2}.$$

Das in den Kreis beschriebene Sechseck hat also die Eigenschaft, dass die drei Differenzen

$$AB.\sin D\sin E-DE.\sin A\sin B,$$

$$CD.\sin A\sin F-AF.\sin C\sin D,$$

$$EF.\sin B\sin C-BC.\sin E\sin F$$

einander gleich sind, nämlich alle drei den Werth

$$\frac{AB.CD.EF-BC.DE.AF}{4r^2}$$

haben, wo r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, in den das Sechseck beschrieben ist.

Dieser Satz ist von Nicolaus Fuss (Nova Acta Petropolitana. T. XIII. p. 178). G.

Druckfehler.

Thl. VIII. S. 171. Z. 4. v. u. statt $f(x+(1-\frac{n-1}{k})i)$ setze man: $f(x+(1-\frac{n+1}{k})i)$.

Thl. VIII. S. 172. Z. 6. v. o. statt $f(x+(i-(n-1)i_1))$ setze man: $f(x+(i-(n+1)i_1))$.

In der Abhandlung: Ueber die Stabilität der Schiffe. Thl. XV. S. 95. Z. 4. v. u. setze man $\int\frac{\partial z}{\sqrt{a^2-z^2}}$ für $\int\frac{\partial z}{\sqrt{a^2-\zeta^2}}$.

XXV.

Der liegende und wälzende Pendel.

Von
Herrn *Brenner*,
Lehrer zu Tuttlingen in Würtemberg.

I. Der liegende Pendel.

Wenn sich eine parallelepipedalförmige Stange über einen mit seiner Axe horizontalliegenden festen gemeinen Cylinder so bewegt, dass jene diesen fortwährend berührt, dass deren Achse oder jede mit ihr Parallele eine Ebene beschreibt, die auf der Achse des Cylinders senkrecht steht, und dass endlich die Stange in ihrer Mitte aufliegt, wenn sie die horizontale Richtung angenommen hat, so nennen wir diese Vorrichtung den liegenden Pendel, im Gegensatz zum gewöhnlichen hängenden Pendel. Die Theorie dieses liegenden Pendels sei nun der Gegenstand unserer Betrachtung.

Es ist klar, dass es genügt, einen durch den Pendel gehenden und auf der Achse des Cylinders senkrecht stehenden, mithin vertikalen Durchschnitt in's Auge zu fassen, so dass wir statt des Cylinders einen Kreis und statt der Stange ein Parallelogramm haben werden.

Man verlege nun den Anfangspunkt O (Taf. VI. Fig. 1.) der Coordinaten in den Mittelpunkt des Kreises und nehme die Abscissenachse horizontal nach der Richtung OX, sowie die Ordinatenachse vertikal aufwärts nach der Richtung OY. Sei ein beliebiges Element des Pendels in M, so verlängern wir ON an N und ziehen ML senkrecht auf diese Verlängerung. Indem wir AN und AB als Achsen des im Pendel unabänderlich gedachten Coordinatensystems annehmen, wo die erstere die Abscissen- und

die letztere die Ordinatenachse vorstellen soll, so ist die Abscisse von M gleich $LM = x_1$ und die Ordinate $AL = y_1$, während die Coordinaten desselben Punktes beziehlich der Achsen OX und OY sind: x und y. Die Ordinaten des Berührungspunktes N aber setzen wir gleich x' und y', bezogen auf OX und OY. Setzen wir gleiche Dichtigkeit des Pendels voraus, so sei die Masse der Volumeneinheit desselben (oder vielmehr die Masse der Flächeneinheit des als materiell gedachten Durchschnittes desselben) gleich m, folglich diejenige des Elementes gleich $mdx_1 dy_1$. Sind nun X und Y die auf das betrachtete Element wirkenden Kräfte, parallel respective mit der Abscissen- und Ordinatenachse, so sind, parallel mit denselben Achsen, als verlorene Kräfte in Rechnung zu bringen die Grössen

$$(X - \partial^2 x) mdx_1 dy_1$$

und

$$(Y - \partial^2 y) mdx_1 dy_1.$$

Ausserdem wirkt im Berührungspunkt N ein Druck nach der Richtung ON, so wie eine Reibung senkrecht auf diese Richtung. Wir denken uns diese beiden Kräfte parallel mit den Coordinatenachsen zerlegt und nehmen sodann je zwei in derselben Richtung wirkende Composanten zusammen. Sie seien u und w. Auf solche Weise stellen sich nun folgende drei Gleichungen dar:

$$1) \quad u + \Sigma (X - \partial^2 x) mdx_1 dy_1 = 0,$$

$$2) \quad w + \Sigma (Y - \partial^2 y) mdx_1 dy_1 = 0,$$

$$3) \quad uy' - wx' + \Sigma [y (X - \partial^2 x) - x (Y - \partial^2 y)] mdx_1 dy_1 = 0;$$

wo sich die Summenzeichen Σ auf die Dimensionen des Pendels allein beziehen.

Eliminiren wir die unbekannten Kräfte u und w, so ist

$$4) \quad x' \Sigma (Y - \partial^2 y) dx_1 dy_1 - y' \Sigma (X - \partial^2 x) dx_1 dy_1$$
$$+ \Sigma [y (X - \partial^2 x) - x (Y - \partial^2 y)] dx_1 dy_1 = 0,$$

woraus, weil m herausfällt, zunächst hervorgeht, dass die Bewegung von der Masse des Pendels unabhängig ist. Es ist nun x gleich der Summe der Projectionen der Linien OT und TM auf OX. Setzen wir daher den Winkel $RON = \theta$ und $OR = r$, so ist

$$x = OT . \sin \theta + TM . \cos \theta.$$

Nun aber ist $OT = r + y_1$. Ist ferner C der Punkt, welcher den Kreis in R berührt hatte, so ziehen wir CD senkrecht auf LM,

und dann ist $DT = CN = RN = r\theta$; und da $LD = \frac{1}{2}l$, wenn wir die Länge des Pendels $= l$ setzen, so ist

$$TM = x_1 - \tfrac{1}{2}l - r\theta,$$

und folglich

$$x = (r + y_1)\sin\theta + (x_1 - \tfrac{1}{2}l - r\theta)\cos\theta.$$

Gleicherweise ist

$$y = (r + y_1)\cos\theta - (x_1 - \tfrac{1}{2}l - r\theta)\sin\theta,$$

und daraus, wenn wir nach den Differentiationen auf einen Augenblick $x_1 - \frac{1}{2}l - r\theta = z$ setzen:

$$5)\quad \partial^2 x = y_1 \cos\theta . \partial^2\theta - y_1 \sin\theta . \partial\theta^2 + r\sin\theta . \partial\theta^2 - z\cos\theta . \partial\theta^2 \\ - z\sin\theta . \partial^2\theta,$$

$$6)\quad \partial^2 y = - y_1 \sin\theta . \partial^2\theta - y_1 \cos\theta . \partial\theta^2 + r\cos\theta . \partial\theta^2 + z\sin\theta . \partial\theta^2 \\ - z\cos\theta . \partial^2\theta.$$

Ferner ist $x' = r\sin\theta$, $y' = r\cos\theta$ und in unserer Betrachtung $X = 0$ und $Y = -g$, wo g die örtliche Schwere bedeutet.

Machen wir diese Substitutionen alle in 4), so kommt

$$-\partial^2\theta . \Sigma(z^2 + y_1^2)\, dx_1\, dy_1 + r\partial\theta^2 \Sigma z dx_1 dy_1 + g . \sin\theta \Sigma y_1\, dx_1\, dy_1 \\ + g . \cos\theta \Sigma z dx_1 dy_1 = 0.$$

Ersetzen wir z wieder durch dessen Werth, führen die Integrationen durch und setzen die Dicke des Pendels $= \varepsilon$, so ist

$$7)\quad \partial^2\theta + \frac{12 r^2\theta . \partial\theta^2}{l^2 + 4\varepsilon^2 + 12 r^2\theta^2} + 12g . \frac{r\theta . \cos\theta - \frac{1}{2}\varepsilon\sin\theta}{l^2 + 4\varepsilon^2 + 12 r^2\theta^2} = 0.$$

Setzen wir das Integral dieser Gleichung

$$\partial\theta^2 = \frac{C}{l^2 + 4\varepsilon^2 + 12 r^2\theta^2},$$

wo C eine noch zu bestimmende Function von θ ist, so erhalten wir

$$\partial C + 24g(r\theta . \cos\theta - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\theta) = 0,$$

so dass

$$C = C - 24g[r(\theta . \sin\theta + \cos\theta) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta],$$

wo C auf der rechten Seite die eingegangene Constante ist. Diess giebt

$$8)\quad \partial\theta^2 = \frac{24g[C - r(\theta . \sin\theta + \cos\theta) - \frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta]}{l^2 + 4\varepsilon^2 + 12 r^2\theta^2}.$$

Wir machen nun zur Bestimmung der Constante C zwei Hypothesen.

α) Es habe $\partial\theta$ für $\theta=0$ einen bestimmten Werth v; alsdann wird

$$C=\frac{v^2(l^2+4\varepsilon^2)}{24g}+r+\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Lassen wir immerhin die letztere Grösse durch C dargestellt sein, so ändert sich die Form des Integrals 8) nicht ab. So gross aber auch C oder v sein mag, so wird doch endlich $\partial\theta=0$ werden, und diess ist der Fall, wenn

$$C-r(\theta.\sin\theta+\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta=0$$

geworden ist.

Zwar wird in Wirklichkeit der Pendel vom Kreise abglitschen, bevor er nur den Winkel $\theta=\frac{\pi}{2}$ beschrieben hat; allein es ist dabei zu bedenken, dass unser Calcul davon nichts weiss, sondern eine Abwickelung der Berührungslinie AN annimmt, ohne Glitschung, so dass sich die Bewegung desselben auf gleiche Weise selbst auf der negativen Seite von OX fortsetzt. Ja, diese Abwickelung geht sogar bis in's Unendliche fort, so dass endlich der Pendel mit dem Kreise bloss noch durch eine immaterielle steife Tangente, als Verlängerung von AN, verbunden ist.

β) Es sei $\partial\theta=0$ für einen bestimmten Werth $\theta=\theta_1$. Unter dieser Bedingung ist $C=r(\theta_1\sin\theta_1+\cos\theta_1)+\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta_1$, folglich

$$9)\quad \partial\theta^2=24g.\frac{r(\theta_1\sin\theta_1-\theta\sin\theta+\cos\theta_1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\varepsilon(\cos\theta_1-\cos\theta)}{l^2+4\varepsilon^2+12r^2\theta^2}.$$

Die Gleichungen 8) und 9) lassen sich in endlicher Form nicht allgemein, sondern nur in besonderen Voraussetzungen integriren, und wir versuchen es, in Beziehung auf die letztere Gleichung in β) für kleine Ausschlagwinkel θ_1. Es belehrt uns nämlich diese Gleichung, welche sowohl für positive als negative Werthe von $\theta<=\theta_1$ reelle Werthe für $\partial\theta^2$ liefert, und zwar für gleiche θ auch gleiche $\partial\theta^2$, dass der Pendel wiederholte Schwingungen vollbringen wird, und zwar Schwingungen von gleicher Grösse θ_1. Behalten wir nun im Ausdruck für $\partial\theta^2$ noch die vierten Potenzen von θ und θ_1 bei und verwerfen alle höheren, so haben wir, wenn wir noch

$$\frac{12g}{l^2+4\varepsilon^2}=a,\ (r-\tfrac{1}{2}\varepsilon)-\frac{\theta_1^2}{4}(r-\tfrac{1}{8}\varepsilon)=b$$

und

$$\tfrac{1}{4}(r-\tfrac{1}{6}\varepsilon)+\frac{12r^2}{l^2+4\varepsilon^2}(r-\tfrac{1}{2}\varepsilon)=c$$

setzen:

$$10)\quad \partial\theta^2=a(\theta_1{}^2-\theta^2)(b-c\theta^2),$$

und daraus:

$$\partial t=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta_1{}^2-\theta^2}\cdot\sqrt{b-c\theta^2}}.$$

Entwickeln wir die Potenz $(b-c\theta^2)^{-\frac{1}{2}}$ binomisch und behalten dabei nur noch das mit dem Quadrat von θ behaftete Glied bei, so haben wir:

$$\partial t=\frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta_1{}^2-\theta^2}}+\frac{c}{2b}\cdot\frac{\theta^2\partial\theta}{\sqrt{\theta_1{}^2-\theta^2}}\right),$$

woraus das Integral ist:

$$11)\quad t=\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\left(1+\frac{c}{4b}\theta_1{}^2\right)\cdot\frac{1}{\sin}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)-\frac{c}{4b}\theta\sqrt{\theta_1{}^2-\theta^2}\right],$$

welches Integral noch ganz unverändert bleibt, wenn die Zeit von da an gezählt wird, wo $\theta=0$. Man bemerkt, dass dieses Integral, welches die Werthe von θ_1 und θ bis in's Quadrat enthält, genau ist bis auf die dritten Potenzen derselben Grössen. Denn die Beibehaltung höherer Potenzen im Werthe 9) oder 10) würde in 11) keine dritten, sondern vierte Potenzen erscheinen lassen. Man überzeugt sich auch bald, dass eine weiter getriebene Annäherung die Zeit t in folgender Function zur Darstellung brächte:

$$t=M\cdot\frac{1}{\sin}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)+N\theta\sqrt{\theta_1{}^2-\theta^2},$$

wo M eine constante Grösse, hingegen N eine algebraische ganze Function von θ ist, mit positiven und ganzen Exponenten.

Wenn nun θ zum erstenmal $=\theta_1$ wird, so ist

$$t=M\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Wird aber θ zum zweitenmale 0, so ist

$$t=M.\pi,$$

und ist θ zum zweitenmal $=\theta_1$ geworden, so ist

$$t=M.\tfrac{3}{2}\pi.$$

Folglich ist das Intervall der ersten Schwingung

$$t = M\pi.$$

Eben so gross aber wird das Intervall für jede folgende Schwingung, und folglich sind die Schwingungen für einen einmal angenommenen Ausschlag θ_1 isochron.

Ohne t zu kennen, sind wir vermittelst der Werthe von $\partial^2 t$ und $\partial\theta^2$ im Stande, die Kräfte u und w für jede Lage des Pendels zu bestimmen. Denn wir dürfen zu diesem Zwecke nur die Werthe von $\partial^2 x$ und $\partial^2 y$ aus 5) und 6) in 1) und 2) substituiren, $X=0$ und $Y=-g$ setzen und die Integrationen vollführen. Wollen wir darnach den Druck und die Reibung besonders dargestellt sehen, so dürfen wir nur u und w nach den Richtungen ON und NC zerlegen und die zusammengehörigen Composanten addiren.

Steigen wir vom physikalischen Pendel nunmehr auf den mathematischen herab, so substituiren wir statt der Stange eine materielle Gerade. Diesen Zweck erreichen wir einfach dadurch, dass wir in unsern Formeln $s=0$ setzen.

Auf diese Weise werden die obigen

$$a=\frac{12g}{l^2},\ b=r(1-\frac{\theta_1^2}{4}),\ c=r(\tfrac{1}{4}+\frac{12r^2}{l^2});$$

und aus 8), 9) und 11) wird

$$\partial\theta^2 = 24g.\frac{C-r(\theta.\sin\theta+\cos\theta)}{l^2+12r^2\theta^2},$$

$$\partial\theta^2 = 24g.\frac{r(\theta_1\sin\theta_1-\theta\sin\theta+\cos\theta_1-\cos\theta)}{l^2+12r^2\theta^2},$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{ab}}[(1+\frac{c}{4b}\theta_1^2).\frac{1}{\sin}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)-\frac{c}{4b}\theta\sqrt{\theta_1^2-\theta^2}].$$

Um die Länge des Secundenpendels zu bestimmen, müssen wir auch noch die Quadrate von θ und θ_1 vernachlässigen, wodurch wir zunächst erhalten

$$t=\frac{1}{\sqrt{ab}}.\frac{1}{\sin}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right),$$ und hierauf $t=1$ und $\frac{1}{\sin}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)$ durch π

ersetzen. Dieses gibt:

$$l=\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \text{ oder } l=\frac{\sqrt{12gr}}{\pi}.$$

Es ändert sich demnach l mit r und zwar nach dem Verhältniss der Quadratwurzel von r.

Da die Geschwindigkeit $\partial\theta$ mit der Zeit oder auch mit dem Winkel θ veränderlich ist, so entsteht die Frage, ob und wo dieselbe ein M.M darbietet. Weil aber 8) das allgemeine Integral ist von 7), so benutzen wir eben diese Gleichung, und nicht 9), zur Aufsuchung des M.M. Aus derselben erhalten wir als Bedingung des M.M:

$$\frac{(l^2+4\varepsilon^2+12r^2\theta^2)(-r\theta.\cos\theta+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\theta)-24r^2\theta[C-r(\theta.\sin\theta+\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta]}{(l^2+4\varepsilon^2+12r^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{C-r(\theta.\sin\theta+\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta}}=\frac{0}{\infty}.$$

Zuerst bemerkt man, dass diese Gleichung befriedigt wird durch den Werth $\theta=0$, und diess liefert

$$\partial\theta^2=24g.\frac{C-r-\tfrac{1}{2}\varepsilon}{l^2+4\varepsilon^2}.$$

Untersucht man den Werth von $\partial^3\theta$, so findet sich, dass dieser Fall ein Maximum liefert, wenn $r+\frac{r^2v^2}{g}>\tfrac{1}{2}\varepsilon$, und ein Minimum, wenn $r+\frac{r^2v^2}{g}<\tfrac{1}{2}\varepsilon$. Ein unbedingtes Maximum aber findet statt, wenn $\varepsilon=0$, d. h. beim mathematischen Pendel. Die zweite Bedingung $C-r(\theta.\sin\theta+\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta=0$ liefert ein Minimum $\partial\theta=0$. Ob und welche andere M.M noch existiren, entscheidet sich am besten, wenn man dem Winkel θ eine Scala von gewissen Werthen beilegt, etwa 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, π u.s.w., und die zugehörigen Werthe von $\partial\theta^2$ dazu berechnet. Findet sich nun ein Werth, welcher zwischen beiden Nachbarwerthen liegt, d. h. welcher entweder grösser oder kleiner ist, als diese Werthe, so befindet sich in dessen Nähe ein Maximum oder Minimum, wozu sich der Winkel θ durch Näherung findet. Wollte aber C einen solchen Werth haben, dass den beiden Gleichungen

$$-r\theta.\cos\theta+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\theta=0 \text{ oder } \mathrm{tg}\,\theta=\frac{r\theta}{\tfrac{1}{2}\varepsilon}$$

und

$$C-r(\theta\sin\theta+\cos\theta)-\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\theta=0$$

zugleich genügt werden könnte, so hätte man das Minimum $\partial\theta=0$ und es stände in dieser Lage der Schwerpunkt vertikal über dem Berührungspunkte.

II. Der wälzende Pendel.

Es sei ein anderer Pendel, welcher sich mit der Mantelfläche

eines mit ihm fest verbundenen gemeinen Cylinders auf einer Ebene wälzt und welchen wir den wälzenden Pendel heissen.

Auch hier ist es klar, dass wir nur einen auf der Achse des Cylinders senkrechten Schnitt zu betrachten haben. Es stelle daher APB (Taf. VI. Fig. 2.) den halben Durchschnitt des Cylinders vor, dessen Halbmesser $=r$ sei. Betrachten wir nun ein in L liegendes Element des Pendels, so ist $OR=x$ und $LR=y$, während wir den Anfangspunkt O der vertikalen und horizontalen Coordinaten so nehmen, dass, wenn der Durchmesser AB horizontal steht, der Kreis die Abscisse in O berührt. Ziehe ich demnach CD senkrecht auf AB, so ist, wenn ich den Winkel $DCP=\theta$ setze, $DP=OP=r\theta$. Den Anfang der im Pendel festen Coordinaten setze ich in C, zähle die Abscissen nach der Richtung CB und die Ordinaten nach CD. Ziehe ich daher LM senkrecht auf CD, so ist $LM=x_1$ und $CM=y_1$. Endlich ziehe ich noch CL, so wie LS, die letztere senkrecht auf CP. Nun ist

$$x=OP+PR=r\theta+CL.\cos CLS=r\theta+\sqrt{x_1^2+y_1^2}.\cos(\theta+CLM)$$

$$=r\theta+\sqrt{x_1^2+y_1^2}.(\cos\theta.\cos CLM-\sin\theta.\sin CLM)$$

$$=r\theta+\sqrt{x_1^2+y_1^2}.(\cos\theta.\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}-\sin\theta.\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}})$$

oder

$$x=r\theta+x_1\cos\theta-y_1\sin\theta.$$

Gleicherweise ist

$$y=r-x_1\sin\theta-y_1\cos\theta,$$

woraus

$$\partial^2 x=r\partial^2\theta-x_1\cos\theta.\partial\theta^2-x_1\sin\theta.\partial^2\theta+y_1\sin\theta.\partial\theta^2-y_1\cos\theta.\partial^2\theta,$$

$$\partial^2 y=x_1\sin\theta.\partial\theta^2-x_1\cos\theta.\partial^2\theta+y_1\cos\theta.\partial\theta^2+y_1\sin\theta.\partial^2\theta.$$

Ist die Dichtigkeit des Elementes dx_1dy_1 gleich ϱ, so ist dessen Masse $=\varrho dx_1dy_1$.

Die obige Gleichung 4) ist auch für unser neues Pendel giltig, und es ist, wie dort, so auch hier $X=0$ und $Y=-g$ zu setzen. Hingegen ist im vorliegenden Falle $x'=r\theta$ und $y'=0$. Führen wir nun die Substitutionen obiger Grössen in 4) aus, lassen aber, Kürze halber, die Integrale $\Sigma(x_1^2+y_1^2)\varrho dx_1 dy_1$, $\Sigma\varrho x_1 dx_1 dy_1$ und $\Sigma\varrho y_1 dx_1 dy_1$ durch $x_1^2+y_1^2$, durch x_1 und y_1, dividirt je durch die Masse des Pendels, dargestellt sein, und setzen noch $r^2+x_1^2+y_1^2=a$, so ist

$$\partial^2\theta + r.\frac{y_1 \sin\theta - x_1 \cos\theta}{a - 2r(y_1 \cos\theta + x_1 \sin\theta)}\partial\theta^2 + g.\frac{y_1 \sin\theta - x_1 \cos\theta}{a - 2r(y_1 \cos\theta + x_1 \sin\theta)} = 0.$$

Der integrirende Factor dieser Gleichung aber ist $\frac{\partial\theta}{g + r\partial\theta^2}$, und so finden wir

$$\frac{\partial\theta . \partial^2\theta}{g + r\partial\theta^2} + \frac{(y_1 \sin\theta - x_1 \cos\theta)\partial\theta}{a - 2r(y_1 \cos\theta + x_1 \sin\theta)} = 0,$$

wovon das Integral ist:

$$g + r\partial\theta^2 = \frac{C}{a - 2r(y_1 \cos\theta + x_1 \sin\theta)}.$$

Unser Calcul setzt keine Begrenzung für den Kreisbögen APB, noch für die Gerade OX, fest. Anch nimmt er keinen, die Bewegung hindernden Zusammenstoss des Pendels mit der Geraden OX an; überdiess lässt sich selbst bei einem stabförmigen Pendel eine Einrichtung denken, wodurch eine solche Begegnung vermieden wird. Der Pendel wird daher im Allgemeinen ganze und wiederholte Umwälzungen um den als vollendet gedachten Kreis APB vollbringen, und es wird folglich der Schwerpunkt der bewegten Masse zuweilen und wiederholt vertikal über oder nach Umständen auch unter den Berührungspunkt zu liegen kommen. Wir wählen nun die Lage der Achse AB so, dass DC durch den Schwerpunkt geht. In diesem Falle aber wird x_1, welches statt $\frac{\Sigma \varrho x_1 dx_1 dy_1}{M}$ steht, wo M gleich der Masse des Pendels, gleich Null, woraus hervorgeht, dass das Integral

$$g + r\partial\theta^2 = \frac{C}{a - 2ry_1 \cos\theta}$$

noch eben so allgemein ist, als das obige.

Wir machen nun wieder über die Constante C zwei Hypothesen.

α) Die Geschwindigkeit $\partial\theta$ habe zur Zeit, da $\theta = 0$ war, eine ganz bestimmte Grösse v gehabt. In diesem Falle ist

$$C = (g + rv^2)(a - 2ry_1)$$

und

$$\partial\theta^2 = \frac{v^2(a - 2ry_1) - 2gy_1(1 - \cos\theta)}{a - 2ry_1 \cos\theta}$$

und

$$t = \int \partial\theta . \sqrt{\frac{a - 2ry_1 \cos\theta}{v^2(a - 2ry_1) - 2gy_1(1 - \cos\theta)}}.$$

β) Es sei $\partial\theta=0$ für $\theta=\theta_2$; dann ist

$$C=g(a-2ry_1\cos\theta_2),$$

und

$$\partial\theta^2=\frac{2gry_1(\cos\theta-\cos\theta_2)}{a-2ry_1\cos\theta},$$

woraus

$$t=\frac{1}{\sqrt{2gry_1}}\int\partial\theta.\sqrt{\frac{a-2ry_1\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_2}}$$

In beiden Fällen zeigt sich die Geschwindigkeit $\partial\theta$ wieder gleich für alle diejenigen Lagen, in denen die θ, positiv oder negativ genommen, einander gleich oder um ganze Umkreise von einander verschieden sind; und schon dieser Umstand bürgt uns dafür, dass nicht nur alle Schwingungen, seien sie durch Stillstände oder ganze Umwälzungen begrenzt, von gleicher Grösse, sondern auch isochron sind. Betrachten wir in unserer zweiten Hypothese über C als Pendel einen halben Cylinder, so nämlich, dass derselbe durch seine Achse von einer Ebene geschnitten wird, so ist das Trägheitsmoment, wofern wir gleiche Dichtigkeit voraussetzen, die wir $=1$ nehmen, gleich $\frac{\pi}{4}r^4$; $a=\frac{3}{2}r^2$ und

$$\frac{\Sigma y_1 dx_1 dy_1}{M}=\frac{4}{3}\frac{r}{\pi},$$

und diess gibt:

$$\partial\theta^2=\frac{16g(\cos\theta-\cos\theta_1)}{r(9\pi-16\cos\theta)},\quad t=\frac{1}{4}\cdot\frac{r}{g}\sqrt{\frac{9\pi-16\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1}}.$$

Beziehlich des M.M ergibt sich für den wälzenden Pendel Folgendes.

Das Integral $g+r\partial\theta^2=\dfrac{C}{a-2ry_1\cos\theta}$ gibt:

$$\frac{\sin\theta}{(a-2ry_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{C-ga+2gry_1\cos\theta}}=\frac{0}{\infty},$$

woraus sich zuerst ergibt:

$$\sin\theta=0 \text{ und } \theta=n\pi,$$

wo n jede ganze Zahl, von Null an, bezeichnet.

$\theta=2m\pi$ gibt aber:

$$g+r\partial\theta^2=\frac{C}{a-2ry_1};$$

Endlich ist noch übrig die Bedingung

$$C-gx+2gry_1\cos\theta=0,$$

welche gibt:

$$\cos\theta=\frac{gx-C}{2gry_1}.$$

Ist $gx-C<=2gry_1$, so hat man ein Minimum $\partial\theta=0$. Ist aber $gx-C>2gry_1$, so ist θ imaginär und der Pendel kommt nie zur Ruhe.

XXVI.

Ueber das ballistische Problem.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Am Ende der Abhandlung über die Grundformeln der Theorie der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes *) gelangten wir zu den Fundamental-Gleichungen des ballistischen Problems, unter der Voraussetzung eines dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes, indem wir zugleich zeigten, dass die ballistische Curve unter dieser Voraussetzung eine Curve von einfacher Krümmung sei. Die Gleichungen, welche wir dort fanden, waren, wenn wir die Ebene der xy so annehmen, wie in jenem Aufsatze angegeben worden ist, die folgenden:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}=-2G-u\dfrac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}=-u\dfrac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial S_t}{\partial t} \end{cases}$$

An diese Fundamental-Gleichungen wollen wir jetzt die weitere Entwickelung des ballistischen Problems anschliessen, und

---

*) Theil XXI. No. XXXI.

$$p_t\frac{\partial y_t}{\partial t}=\frac{\partial x_t}{\partial t}$$

ist:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}=-2G;$$

und weil nun bekanntlich

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2=V^2\cos\beta^2 e^{-2uS_t}$$

ist, so erhält man durch Division auf der Stelle:

$$\frac{\frac{\partial p_t}{\partial t}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}}=-\frac{2Ge^{2uS_t}}{V^2\cos\beta^2}.$$

Bekanntlich ist

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}=\sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}.$$

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, den positiven Theil der Axe der y so an, dass β nicht grösser als 90^0 ist, so ist

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}=V\cos\beta e^{-uS_t}$$

eine positive Grösse, und folglich

$$\frac{\partial S_t}{\partial t}=\frac{\partial y_t}{\partial t}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_t}{\partial y_t}\right)^2}=\frac{\partial y_t}{\partial t}\sqrt{1+p_t^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{\frac{\partial p_t}{\partial t}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}\sqrt{1+p_t^2}=-\frac{2G}{V^2\cos\beta^2}e^{2uS_t}\frac{\partial S_t}{\partial t},$$

d. i.

$$4)\quad \partial p_t\sqrt{1+p_t^2}=-\frac{2G}{V^2\cos\beta^2}e^{2uS_t}\partial S_t,$$

in welcher Gleichung nun die veränderlichen Grössen p_t und S_t gesondert sind und die sich also integriren lässt.

Zuvörderst erhält man durch theilweise Integration:

$$\int\partial p_t\sqrt{1+p_t^2}=p_t\sqrt{1+p_t^2}-\int p_t\partial\sqrt{1+p_t^2},$$

d. i.

irun

nun

rhält

kann

ma
xe d

posi

is

i.

[illegible] Leichen auf einander

[illegible] allgemein

[illegible]

der.

w
geso

d.

β) Es sei $\partial\theta=0$ für $\theta=\theta_1$; dann ist

$$C=g(a-2ry_1\cos\theta_1)$$

und

$$\partial\theta^2=\frac{2gy_1(\cos\theta-\cos\theta_1)}{a-2ry_1\cos\theta},$$

woraus

$$t=\frac{1}{\sqrt{2gy_1}}\int\partial\theta.\sqrt{\frac{a-2ry_1\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1}}.$$

In beiden Fällen zeigt sich die Geschwindigkeit $\partial\theta$ wieder gle
für alle diejenigen Lagen, in denen die θ, positiv oder neg
genommen, einander gleich oder um ganze Umkreise von einan
verschieden sind; und schon dieser Umstand bürgt uns dafür, d
nicht nur alle Schwingungen, seien sie durch Stillstände o
ganze Umwälzungen begrenzt, von gleicher Grösse, sondern a
isochron sind. Betrachten wir in unserer zweiten Hypothese ü
C als Pendel einen halben Cylinder, so nämlich, dass derse
durch seine Achse von einer Ebene geschnitten wird, so ist
Trägheitsmoment, wofern wir gleiche Dichtigkeit voraussetzen,
wir $=1$ nehmen, gleich $\frac{\pi}{4}r^4$; $a=\frac{3}{2}r^2$ und

$$\frac{\Sigma y_1dx_1dy_1}{M}=\frac{4}{3}\frac{r}{\pi},$$

und diess gibt:

$$\partial\theta^2=\frac{16g(\cos\theta-\cos\theta_1)}{r(9\pi-16\cos\theta)},\quad t=\frac{1}{4}\cdot\frac{r}{g}\sqrt{\frac{9\pi-16\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_1}}.$$

Beziehlich des M.M ergibt sich für den wälzenden Pen
Folgendes.

Das Integral $g+r\partial\theta^2=\frac{C}{a-2ry_1\cos\theta}$ gibt:

$$\frac{\sin\theta}{(a-2ry_1\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{C-ga+2gry_1\cos\theta}}=\frac{0}{\infty},$$

woraus sich zuerst ergibt:

$$\sin\theta=0 \text{ und } \theta=n\pi,$$

wo n jede ganze Zahl, von Null an, bezeichnet.

$\theta=2m\pi$ gibt aber:

$$g+r\partial\theta^2=\frac{C}{a-2ry_1};$$

und $\theta = (2m+1)\pi$ gibt:

$$g + r\partial\theta^2 = \frac{C}{a + 2ry_1}.$$

Der erste Werth entspricht offenbar einem Maximum und der zweite einem Minimum, was sich auch durch den Werth von $\partial^3\theta$ nachweisen lässt. Da aber die Geschwindigkeit $\partial\theta$ offenbar im Wachsthum begriffen ist, wenn sich der Schwerpunkt senkt, und im Abnehmen, wenn er sich hebt, so existirt ein Maximum, wenn der Schwerpunkt am tiefsten, und ein Minimum, wenn er am höchsten liegt.

Dass der Nenner $a - 2ry_1$ nie negativ werden kann, lässt sich beweisen, wie folgt. Diese Grösse ist nämlich

$$\frac{\Sigma\varrho(r^2 + x_1^2 + y_1^2)\,dx_1\,dy_1}{M} - \frac{2r\Sigma\varrho y_1\,dx_1\,dy_1}{M},$$

oder, wenn wir die Ordinate des Schwerpunktes gleich y_0 setzen:

$$r^2 + \frac{\Sigma(x_1^2 + y_1^2)\,\varrho\,dx_1\,dy_1}{M} - 2ry_0.$$

Bezeichnet man aber das Trägheitsmoment in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende und mit der ursprünglichen Drehachse parallele Drehachse mit T, so hat man

$$r^2 + y_0^2 + \frac{T}{M} - 2ry_0,$$

eine Grösse, die sowohl für $y_0 = 0$, als auch für $y = \pm\infty$ positiv ist. Es ergibt sich aber deren M.M durch die Gleichung

$$2y_0 - 2r = 0, \text{ woraus } y_0 = r.$$

Obiger, den Nenner $a - 2ry_1$ vertretender Ausdruck wird dadurch $\frac{T}{M}$ und ist ein Minimum. Da also

$$r^2 + y_0^2 + \frac{T}{M} - 2ry_0$$

für keinen Werth von y_0 durch Null geht, so ist er stets positiv.

Unsere Bedingungsgleichung für das M.M gibt ferner:

$$a - 2ry_1 \cos\theta = 0,$$

woraus

$$\cos\theta = \frac{a}{2ry_1},$$

was für θ einen imaginären Werth liefert, weil $\frac{a}{2ry_1} > 1$.

Endlich ist noch übrig die Bedingung

$$C-ga+2gry_1\cos\theta=0,$$

welche gibt:

$$\cos\theta=\frac{ga-C}{2gry_1}.$$

Ist $ga-C<=2gry_1$, so hat man ein Minimum $\partial\theta=0$. Ist aber $ga-C>2gry_1$, so ist θ imaginär und der Pendel kommt nie zur Ruhe.

XXVI.

Ueber das ballistische Problem.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Am Ende der Abhandlung über die Grundformeln der Theorie der freien krummlinigen Bewegung eines Punktes *) gelangten wir zu den Fundamental-Gleichungen des ballistischen Problems, unter der Voraussetzung eines dem Quadrate der erlangten Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes, indem wir zugleich zeigten, dass die ballistische Curve unter dieser Voraussetzung eine Curve von einfacher Krümmung sei. Die Gleichungen, welche wir dort fanden, waren, wenn wir die Ebene der xy so annehmen, wie in jenem Aufsatze angegeben worden ist, die folgenden:

$$1)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2x_t}{\partial t^2}&=-2G-\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t},\\ \frac{\partial^2y_t}{\partial t^2}&=-\mu\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

An diese Fundamental-Gleichungen wollen wir jetzt die weitere Entwickelung des ballistischen Problems anschliessen, und

*) Theil XXI. No. XXXI.

wenn dabei auch meistens Bekanntes vorkommen wird, so wird das Folgende doch auch so viel verschiedenes Neues enthalten, dass diese Abhandlung Eigenthümlichkeit genug besitzen wird, um die Aufnahme in diese Zeitschrift zu rechtfertigen, in welcher Beziehung ich mir vorzüglich auf die am Schluss derselben vorkommenden Entwickelungen hinzuweisen erlaube.

Aus der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen erhält man:

$$\frac{\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = -\mu\frac{\partial S_t}{\partial t},$$

d. i., wie sogleich erhellet:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = -\mu\partial S_t,$$

und folglich, wenn man integrirt, indem C_1' eine Constante bezeichnet:

$$\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = C_1' - \mu S_t$$

oder

$$l.\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = 2C_1' - 2\mu S_t;$$

also ist:

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = e^{2C_1'-2\mu S_t} = e^{2C_1'}.e^{-2\mu S_t},$$

oder, wenn wir

$$C' = e^{2C_1'}$$

setzen, wo natürlich C' positiv ist:

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = C'e^{-2\mu S_t}.$$

Bekanntlich ist nun

$$\frac{\partial(y_t - b - Vt\cos\beta)}{\partial t} = \frac{\partial y_t}{\partial t} - V\cos\beta$$

die von der Projection des Punktes A auf der Axe der y vermöge

der Wirkung der Zeitkraft Y_t am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, und da diese Geschwindigkeit für $t=0$ offenbar verschwindet, so ist $V\cos\beta$ der Werth, welchen

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

für $t=0$ erhält. Also ist nach dem Obigen:

$$V^2\cos\beta^2 = C' e^{-2\mu S_0},$$

folglich, weil $S_0=0$ ist:

$$C' = V^2\cos\beta^2.$$

Daher ist

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = V^2\cos\beta^2 e^{-2\mu S_t},$$

also

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \pm V\cos\beta e^{-\mu S_t}.$$

Weil nach dem Obigen

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} - V\cos\beta$$

die von der Projection des Punktes A auf der Axe der y vermöge der Wirkung der Zeitkraft Y_t am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist, und es in der Natur der Sache liegt, dass diese Geschwindigkeit sich mit der Zeit nur stetig ändern kann, so kann sich auch

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

zugleich mit der Zeit nur stetig ändern. Ein stetiger Uebergang einer Grösse von dem $\left\{\begin{matrix}\text{Positiven}\\\text{Negativen}\end{matrix}\right\}$ zu dem $\left\{\begin{matrix}\text{Negativen}\\\text{Positiven}\end{matrix}\right\}$ kann aber bloss durch Null hindurch Statt finden. Schliessen wir nun zuerst die Fälle aus, wenn $V=0$ oder $\beta=90^0$ ist, so erhellet aus der Gleichung

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = \pm V\cos\beta e^{-\mu S_t}$$

auf der Stelle, dass

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

niemals verschwinden, und daher nach dem so eben Bemerkten

auch niemals sein Zeichen ändern kann. Für $t=0$ erhält aber nach dem Obigen

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

den Werth $V\cos\beta$, und hat also, da es sein Zeichen nie ändern kann, immer mit $V\cos\beta$ gleiches Vorzeichen. Also muss man, weil $e^{-\mu s_t}$ stets positiv ist, nach dem Obigen allgemein

$$2)\quad \frac{\partial y_t}{\partial t}=V\cos\beta e^{-\mu s_t}$$

setzen, welche Gleichung nun offenbar auch für $V=0$ und $\beta=90^0$ gilt, weil in diesen Fällen wegen der aus dem Obigen bekannten allgemein gültigen Gleichung

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2=V^2\cos\beta^2 e^{-2\mu s_t}$$

der Differentialquotient $\frac{\partial y_t}{\partial t}$ nothwendig verschwinden muss.

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$3)\quad p_t=\frac{\partial x_t}{\partial y_t}=\frac{\partial x_t}{\partial t}:\frac{\partial y_t}{\partial t},$$

so ist

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}=p_t\frac{\partial y_t}{\partial t},$$

und folglich, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^2 x_t}{\partial t^2}=\frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}+p_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2},$$

also nach der ersten der beiden Gleichungen 1):

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}+p_t\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}=-2G-\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t},$$

folglich, wenn man den Werth von

$$\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}$$

aus der zweiten der beiden Gleichungen 1) einführt:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}-\mu p_t\frac{\partial y_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}=-2G-\mu\frac{\partial x_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t},$$

d. i., weil nach dem Obigen

$$p_t \frac{\partial y_t}{\partial t} = \frac{\partial x_t}{\partial t}$$

ist:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} = -2G;$$

und weil nun bekanntlich

$$\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2 = V^2 \cos\beta^2 e^{-2\mu S_t}$$

ist, so erhält man durch Division auf der Stelle:

$$\frac{\frac{\partial p_t}{\partial t}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = -\frac{2Ge^{2\mu S_t}}{V^2 \cos\beta^2}.$$

Bekanntlich ist

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2}.$$

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, den positiven Theil der Axe der y so an, dass β nicht grösser als 90^0 ist, so ist

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = V \cos\beta e^{-\mu S_t}$$

eine positive Grösse, und folglich

$$\frac{\partial S_t}{\partial t} = \frac{\partial y_t}{\partial t} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_t}\right)^2} = \frac{\partial y_t}{\partial t} \sqrt{1 + p_t^2}.$$

Also ist nach dem Obigen:

$$\frac{\frac{\partial p_t}{\partial t}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} \cdot \frac{\partial y_t}{\partial t} \sqrt{1 + p_t^2} = -\frac{2G}{V^2 \cos\beta^2} e^{2\mu S_t} \frac{\partial S_t}{\partial t},$$

d. i.

$$4) \quad \partial p_t \sqrt{1 + p_t^2} = -\frac{2G}{V^2 \cos\beta^2} e^{2\mu S_t} \partial S_t,$$

in welcher Gleichung nun die veränderlichen Grössen p_t und S_t gesondert sind und die sich also integriren lässt.

Zuvörderst erhält man durch theilweise Integration:

$$\int \partial p_t \sqrt{1 + p_t^2} = p_t \sqrt{1 + p_t^2} - \int p_t \partial \sqrt{1 + p_t^2},$$

d. i.

$$\int \partial p_t \sqrt{1+p_t^2} = p_t \sqrt{1+p_t^2} - \int \frac{p_t^2 \partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}};$$

ferner ist:

$$\int \partial p_t \sqrt{1+p_t^2} = \int \frac{(1+p_t^2)\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} = \int \frac{\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} + \int \frac{p_t^2 \partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}};$$

also

$$p_t \sqrt{1+p_t^2} - \int \frac{p_t^2 \partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} = \int \frac{\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} + \int \frac{p_t^2 \partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}},$$

woraus

$$\int \frac{p_t^2 \partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} = \tfrac{1}{2} p_t \sqrt{1+p_t^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}},$$

und daher nach dem Obigen

$$\int \partial p_t \sqrt{1+p_t^2} = \tfrac{1}{2} p_t \sqrt{1+p_t^2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}}$$

folgt. Weil nun nach dem aus der Integralrechnung bekannten allgemeinen Ausdrucke von

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

wie man leicht findet,

$$\int \frac{\partial p_t}{\sqrt{1+p_t^2}} = \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})$$

ist, wobei man zu beachten hat, dass $p_t + \sqrt{1+p_t^2}$ offenbar nie negativ sein kann, so ist

$$\int \partial p_t \sqrt{1+p_t^2} = \tfrac{1}{2} p_t \sqrt{1+p_t^2} + \tfrac{1}{2} \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2}).$$

Ferner ist

$$\int e^{2\mu S_t} \partial S_t = \frac{1}{2\mu} \int e^{2\mu S_t} \partial . 2\mu S_t = \frac{1}{2\mu} e^{2\mu S_t},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung 4) integrirt, indem C eine weiter zu bestimmende Constante bezeichnet:

$$5) \quad p_t \sqrt{1+p_t^2} + \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2}) = C - \frac{2Ge^{2\mu S_t}}{\mu V^2 \cos\beta^2}.$$

Weil bekanntlich

$$\frac{\partial(x_t - a - Vt\cos\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial x_t}{\partial t} - V\cos\alpha$$

die von der Projection des Punktes A auf der Axe der x vermöge der Wirkung der Zeitkraft X_t am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist, und diese Geschwindigkeit offenbar für $t=0$ verschwindet, so ist $V\cos\alpha$ der Werth von

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}$$

für $t=0$. Der Werth von

$$\frac{\partial y_t}{\partial t}$$

für $t=0$ ist nach dem Obigen $V\cos\beta$. Also ist offenbar

$$\frac{V\cos\alpha}{V\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

der Werth von

$$\frac{\partial x_t}{\partial t} : \frac{\partial y_t}{\partial t} = p_t$$

für $t=0$. Nun ist wegen der oben rücksichtlich des positiven Theils der Axe der y gemachten Voraussetzung offenbar

$$\alpha = 90^0 \mp \beta,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Richtung der Kraft F auf der positiven oder negativen Seite der zweiten Axe eines durch den Anfang der Bewegung parallel mit dem Systeme der xy gelegten Systems liegt; und bezeichnen wir also den 90^0 nicht übersteigenden Winkel, welchen die Richtung der Kraft F mit dem positiven Theile der zweiten Axe eines durch den Anfang der Bewegung parallel mit dem Systeme der xy gelegten Systems einschliesst, indem man diesen Winkel als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die Richtung der Kraft F auf der positiven oder negativen Seite der zweiten Axe des in Rede stehenden, durch den Anfang der Bewegung gelegten Systems liegt, durch i; so ist offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\beta = \pm i, \quad \alpha = 90^0 \mp \beta = 90^0 - i;$$

folglich allgemein

$$\cos\alpha = \sin i, \quad \cos\beta = \cos i;$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\operatorname{tang} i$$

der Werth von p_t für $t=0$. Setzen wir nun in der Gleichung 5) $t=0$, so erhalten wir:

$$\operatorname{tang} i \sec i + \mathrm{l}(\operatorname{tang} i + \sec i) = C - \frac{2G}{\mu V^2 \cos i^2},$$

also

$$C = \operatorname{tang} i \sec i + \mathrm{l}(\operatorname{tang} i + \sec i) + \frac{2G}{\mu V^2 \cos i^2},$$

oder, wie man leicht findet:

$$6)\quad C = \operatorname{tang} i \sec i + \mathrm{l}\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}i) + \frac{2G}{\mu V^2 \cos i^2}.$$

Nach dem Obigen hat man nun, wenn man $\cos i$ für $\cos\beta$ setzt, die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial p_t}{\partial t}}{\frac{\partial y_t}{\partial t}} = \frac{\partial p_t}{\partial y_t} = -\frac{2Ge^{2\mu s_t}}{V^2 \cos i^2},$$

$$p_t\sqrt{1+p_t^2} + \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2}) = C - \frac{2Ge^{2\mu s_t}}{\mu V^2 \cos i^2}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse

$$\frac{2Ge^{2\mu s_t}}{V^2 \cos i^2},$$

so erhält man:

$$\partial y_t = -\frac{\partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}}.$$

Weil aber

$$p_t = \frac{\partial x_t}{\partial y_t},\ \text{also}\ \partial x_t = p_t \partial y_t$$

ist, so hat man überhaupt die beiden folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} \partial x_t = -\dfrac{p_t \partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}}, \\[2ex] \partial y_t = -\dfrac{\partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}}. \end{cases}$$

Sind also K und $\mathfrak{K}$ Constanten, so ist:

$$x_t = K - \int \frac{p_t \partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - l(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}},$$

$$y_t = \mathfrak{K} - \int \frac{\partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - l(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}};$$

oder, wenn wir die beiden allgemeinen Integrale der Kürze wegen durch $\varphi(p_t)$, $\psi(p_t)$ bezeichnen:

$$x_t = K - \varphi(p_t), \quad y_t = \mathfrak{K} - \psi(p_t).$$

Weil nun nach dem Obigen bekanntlich

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad p_0 = \operatorname{tang} i$$

ist, so haben wir die Gleichungen:

$$a = K - \varphi(\operatorname{tang} i), \quad b = \mathfrak{K} - \psi(\operatorname{tang} i);$$

also durch Subtraction

$$x_t = a - \{\varphi(p_t) - \varphi(\operatorname{tang} i)\},$$
$$y_t = b - \{\psi(p_t) - \psi(\operatorname{tang} i)\};$$

d. i.

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l} x_t = a - \displaystyle\int_{\operatorname{tang} i}^{p_t} \frac{p_t \partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - l(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}}, \\ y_t = b - \displaystyle\int_{\operatorname{tang} i}^{p_t} \frac{\partial p_t}{\mu\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - l(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}}. \end{array}\right.$$

Durch Integration müsste man nun mittelst dieser Gleichungen x_t und y_t als entwickelte Functionen von p_t ausdrücken, und aus den beiden dadurch hervorgehenden Gleichungen die Grösse p_t eliminiren, so würde man eine Gleichung zwischen x_t und y_t erhalten, welches die gesuchte Gleichung der Trajectoria des Punktes A sein würde. Die allgemeine Integration der beiden obigen Differentialformeln ist aber bis jetzt nicht gelungen, und wir sind daher hier mit der Auflösung unsers Problems an der Gränze angelangt, welche zu überschreiten bisher noch nicht möglich gewesen ist. Jedoch wollen wir dem Obigen noch die folgenden Bemerkungen beifügen.

§. 2.

Setzen wir

$$9)\quad p_t = \operatorname{tang} \omega_t$$

und nehmen ω_t positiv und negativ, absolut aber nicht grösser als 90°, so ist

$$\partial p_t = \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^2}, \quad \sqrt{1+p_t^2} = \sec \omega_t;$$

also

$$\partial p_t \sqrt{1+p_t^2} = \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$p_t \sqrt{1+p_t^2} + l(p_t + \sqrt{1+p_t^2}) = 2\int_0^{p_t} \partial p_t \sqrt{1+p_t^2}$$

ist, und p_t und ω_t nach 9) zugleich verschwinden, so ist

$$p_t \sqrt{1+p_t^2} + l(p_t + \sqrt{1+p_t^2}) = 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}.$$

Also ist nach 7):

$$\partial x_t = -\frac{\tang \omega_t \partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)},$$

$$\partial y_t = -\frac{\partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)};$$

oder

$$\partial x_t = -\frac{\sin \omega_t \partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^3 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)},$$

$$\partial y_t = -\frac{\partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)}.$$

Sind also wieder K und $\mathfrak{K}$ Constanten, so ist:

$$x_t = K - \int \frac{\sin \omega_t \partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^3 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)},$$

$$y_t = \mathfrak{K} - \int \frac{\partial \omega_t}{\mu \cos \omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}\right)};$$

oder der Kürze wegen:

$$x_t = K - \varphi(\omega_t), \quad y_t = \mathfrak{K} - \psi(\omega_t).$$

Bekanntlich ist

$$p_t = \operatorname{tang} \omega_t, \quad p_0 = \operatorname{tang} i;$$

also $\omega_0 = i$, und folglich, weil

$$x_0 = a, \quad y_0 = b$$

ist:

$$a = K - \varphi(i), \quad b = \mathfrak{K} - \psi(i);$$

folglich durch Subtraction:

$$x_t = a - \{\varphi(\omega_t) - \varphi(i)\}, \quad y_t = b - \{\psi(\omega_t) - \psi(i)\};$$

d. i.:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} x_t &= a - \int_i^{\omega_t} \frac{\sin\omega_t \, \partial\omega_t}{\mu \cos\omega_t^3 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)}, \\ y_t &= b - \int_i^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\mu \cos\omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)}; \end{aligned} \right.$$

oder

$$(11) \left\{ \begin{aligned} x_t &= a - \int_i^{\omega_t} \frac{\operatorname{tang}\omega_t \, \partial\omega_t}{\mu \cos\omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)}, \\ y_t &= b - \int_i^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\mu \cos\omega_t^2 \left(C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Auf diese bemerkenswerthe Form hat Euler die Gleichungen der ballistischen Curve gebracht in der Abhandlung: Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un autre fluide quelconque, die sich in den Mémoires de Berlin. 1753. p. 321. findet.

§. 5.

[illegible]

[illegible]

und

$$\frac{\partial y_t}{\partial t} = V \cos i e^{-\mu s_t}.$$

Weil nun wegen der letzteren Gleichung offenbar $\frac{\partial y_t}{\partial t}$ stets positiv ist, so ist wegen der ersten Gleichung $\frac{\partial p_t}{\partial t}$ stets negativ. Wegen dieser Gleichung ist aber

$$\partial t^2 = -\frac{\partial p_t \partial y_t}{2G},$$

und folglich nach 7):

$$\partial t^2 = -\frac{\partial p_t^2}{2\mu G\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}},$$

also, weil nach dem Vorhergehenden ∂t und ∂p_t ungleiche Vorzeichen haben:

$$11)\quad \partial t = -\frac{\partial p_t}{\sqrt{2\mu G}.\sqrt{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})}}.$$

Da nun bekanntlich $t=0$ für $p_t = \tang i$ ist, so ist:

$$12)\quad t = -\frac{1}{\sqrt{2\mu G}}\int_{\tang i}^{p_t} \frac{\partial p_t}{\sqrt{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})}}.$$

Auch ist bekanntlich

$$\partial p_t = \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^2},$$

woraus sich sogleich ergiebt, dass $\partial \omega_t$ und ∂p_t gleiche, nach dem Vorhergehenden also $\partial \omega_t$ und ∂t ungleiche Vorzeichen haben. Weil nun

$$\partial t^2 = -\frac{\partial \omega_t \partial y_t}{2G \cos \omega_t^2}$$

ist, so ist nach §. 2.:

$$\partial t^2 = \frac{\partial \omega_t^2}{2\mu G \cos \omega_t^4 (C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3})},$$

und folglich

$$13)\quad \partial t = -\frac{\partial \omega_t}{\sqrt{2\mu G}.\cos \omega_t^2 \sqrt{C - 2\int_0^{\omega_t} \frac{\partial \omega_t}{\cos \omega_t^3}}}.$$

Für $t=0$ ist aber $\omega_t=i$; also:

$$14)\quad t=-\frac{1}{\sqrt{2\mu G}}\int_i^{\omega_t}\frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^2\sqrt{C-2\int_0^{\omega_t}\frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}}}.$$

§. 4.

Bekanntlich ist

$$\mathfrak{v}_t^2=\left(\frac{\partial x_t}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2=\left\{1+\left(\frac{\partial x_t}{\partial y_t}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2,$$

d. i.

$$\mathfrak{v}_t^2=(1+p_t^2)\left(\frac{\partial y_t}{\partial t}\right)^2,$$

und folglich, weil

$$\frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}=-2G,\quad \frac{\partial y_t}{\partial t}=-2G\frac{\partial t}{\partial p_t}$$

ist:

$$\mathfrak{v}_t^2=4G^2(1+p_t^2)\left(\frac{\partial t}{\partial p_t}\right)^2,$$

also nach 12):

$$\mathfrak{v}_t^2=\frac{2G(1+p_t^2)}{\mu\{C-p_t\sqrt{1+p_t^2}-l(p_t+\sqrt{1+p_t^2})\}},$$

woraus

$$15)\quad \mathfrak{v}_t=\sqrt{\frac{2G(1+p_t^2)}{\mu\{C-p_t\sqrt{1+p_t^2}-l(p_t+\sqrt{1+p_t^2})\}}}.$$

Weil

$$1+p_t^2=\sec\omega_t^2,\quad \partial p_t=\frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^2}$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{v}_t^2=4G^2\cos\omega_t^2\left(\frac{\partial t}{\partial\omega_t}\right)^2,$$

also nach 13)

$$\mathfrak{v}_t^2=\frac{2G}{\mu\cos\omega_t^2\left(C-2\int_0^{\omega_t}\frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)},$$

woraus:

$$16)\quad \mathfrak{v}_t=\frac{1}{\cos\omega_t}\sqrt{\frac{2G}{\mu\left(C-2\int_0^{\omega_t}\frac{\partial\omega_t}{\cos\omega_t^3}\right)}}.$$

Bekanntlich ist

$$\cos\xi_t=\frac{\frac{\partial x_t}{\partial t}}{\mathfrak{v}_t},\quad \cos\eta_t=\frac{\frac{\partial y_t}{\partial t}}{\mathfrak{v}_t};$$

und weil man nun die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}=p_t\frac{\partial y_t}{\partial t},\quad \frac{\partial p_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial y_t}{\partial t}=-2G$$

hat, so erhält man leicht:

$$\frac{\partial x_t}{\partial t}=-2Gp_t\frac{\partial t}{\partial p_t},\quad \frac{\partial y_t}{\partial t}=-2G\frac{\partial t}{\partial p_t};$$

also

$$\cos\xi_t=-\frac{2Gp_t}{\mathfrak{v}_t}\cdot\frac{\partial t}{\partial p_t},\quad \cos\eta_t=-\frac{2G}{\mathfrak{v}_t}\cdot\frac{\partial t}{\partial p_t}.$$

Weil aber ∂t und ∂p_t ungleiche Vorzeichen haben, so ist nach dem Obigen:

$$\mathfrak{v}_t=-2G\sqrt{1+p_t^2}\cdot\frac{\partial t}{\partial p_t},$$

also

$$\frac{\partial t}{\partial p_t}=-\frac{\mathfrak{v}_t}{2G\sqrt{1+p_t^2}},$$

folglich

$$17)\quad \cos\xi_t=p_t\sqrt{\frac{1}{1+p_t^2}},\quad \cos\eta_t=\sqrt{\frac{1}{1+p_t^2}}.$$

Es ist aber

$$p_t=\operatorname{tang}\omega_t,\quad 1+p_t^2=\sec\omega_t^2;$$

also

$$18)\quad \cos\xi_t=\sin\omega_t,\quad \cos\eta_t=\cos\omega_t.$$

Weil hiernach

$$\cos\xi_t=\cos(90^0-\omega_t)$$

ist, und die Winkel ξ_t, $90^0 - \omega_t$ positiv sind und 180^0 nicht übersteigen, so ist allgemein

$$19)\quad \xi_t = 90^0 - \omega_t.$$

Weil ferner

$$\cos\eta_t = \cos\omega_t = \cos(\pm\omega_t)$$

ist, indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem ω_t positiv oder negativ ist, so ist, weil bekanntlich η_t positiv und nicht grösser als 180^0, $\pm\omega_t$ positiv und nicht grösser als 90^0 ist,

$$20)\quad \eta_t = \pm\omega_t,$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem ω_t positiv oder negativ ist.

Hiernach ist auch umgekehrt, mit derselben Bestimmung wegen des Zeichens:

$$21)\quad \omega_t = 90^0 - \xi_t = \pm\eta_t.$$

§. 5.

In §. 1. haben wir die Gleichung

$$p_t\sqrt{1+p_t^2} + \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2}) = C - \frac{2Ge^{2\mu s_t}}{\mu V^2 \cos i^2}$$

gehabt. Also ist

$$e^{2\mu s_t} = \frac{\mu V^2 \cos i^2}{2G}\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\},$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$s_t = \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\frac{\mu V^2 \cos i^2}{2G} + \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\{C - p_t\sqrt{1+p_t^2} - \mathrm{l}(p_t + \sqrt{1+p_t^2})\}$$

oder

$$s_t = \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\frac{\mu V^2 \cos i^2}{2G} + \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\{C - \mathrm{tang}\,\omega_t \sec\omega_t - \mathrm{l}\,\mathrm{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\omega_t)\}.$$

Führt man nun den Werth von C aus 6) ein, so erhält man:

$$22)\quad s_t = \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\frac{\mu V^2 \cos i^2}{2G}$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\mathrm{l}\left\{\frac{2G}{\mu V^2 \cos i^2} + \mathrm{tang}\,i\sec i - \mathrm{tang}\,\omega_t\sec\omega_t + \mathrm{l}\frac{\mathrm{tang}(45^0 + \frac{1}{2}i)}{\mathrm{tang}(45^0 + \frac{1}{2}\omega_t)}\right\},$$

oder auch:

$$23)\quad S_t=$$

$$\frac{1}{2\mu}\,\mathrm{l}\left\{1+\frac{\mu V^2\cos i^2}{2G}\left[\operatorname{tang} i\sec i-\operatorname{tang}\omega_t\sec\omega_t+\mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}i)}{\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}\omega_t)}\right]\right\}.$$

§. 6.

Weil man die Integrale in 8) oder 10) nicht zu entwickeln im Stande ist, so bleibt, wenn man die Gestalt der ballistischen Curve näher kennen lernen will, nichts Anderes übrig, als zu Näherungen seine Zuflucht zu nehmen, und man kann in der That sagen, dass in dieser Beziehung unter den Mathematikern, welche sich mit dem vorliegenden Gegenstande beschäftigt haben, immer einer den anderen überboten hat. Ich will mir nun auch erlauben, über diesen wichtigen und vielbesprochenen Gegenstand im folgenden Paragraphen Einiges zu sagen, vorher jedoch noch die folgenden, auch sonst dem Wesentlichen nach schon bekannten Bemerkungen vorausschicken.

Weil nach §. 3. bekanntlich der Differentialquotient $\frac{\partial p_t}{\partial t}$ stets negativ ist, und daher ∂t und ∂p_t immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, so nimmt p_t immer ab, wenn man t von Null an stetig wachsen lässt. Nach 9) ist aber

$$p_t=\operatorname{tang}\omega_t,$$

wo der absolute Werth von ω_t niemals grösser als 90^0 ist, und nach §. 2. ist bekanntlich $\omega_0=i$. Also kann, wenn man t von Null an stetig wachsen lässt, sich offenbar ω_t nur von i bis -90^0 stetig verändern, wobei bekanntlich i positiv und negativ sein kann. Nähert sich aber ω_t der Gränze -90^0, so nähert sich S_t, wie aus der Formel 23) erhellet, der Gränze ∞. Hieraus erhellet, dass die ballistische Curve eine auf der Axe der y senkrecht stehende Asymptote hat, wobei man sich nur an die aus der Gleichung

$$p_t=\frac{\partial x_t}{\partial y_t}=\operatorname{tang}\omega_t$$

sich leicht ergebende geometrische Bedeutung des Winkels ω_t erinnern muss.

Der Formel 23) kann man sich sehr zweckmässig bedienen, um wenigstens annähernd die Trajectoria zu construiren. Bezeichnet nämlich n eine beliebige positive ganze Zahl, so setze man, zuerst unter der Voraussetzung, dass i positiv sei, nach und nach

$$\omega_t = i \quad = \frac{n-0}{n} i = \overset{0}{\omega}$$

$$= i - \frac{i}{n} = \frac{n-1}{n} i = \overset{1}{\omega}$$

$$= i - \frac{2i}{n} = \frac{n-2}{n} i = \overset{2}{\omega}$$

$$= i - \frac{3i}{n} = \frac{n-3}{n} i = \overset{3}{\omega}$$

u. s. w.

$$= i - \frac{(n-1)i}{n} = \frac{1}{n} i = \overset{n-1}{\omega}$$

$$= i - \frac{ni}{n} \quad = 0 = \overset{n}{\omega}$$

$$= i - \frac{(n+1)i}{n} = -\frac{1}{n} i = \overset{n+1}{\omega}$$

$$= i - \frac{(n+2)i}{n} = -\frac{2}{n} i = \overset{n+2}{\omega}$$

$$= i - \frac{(n+3)i}{n} = -\frac{3}{n} i = \overset{n+3}{\omega}$$

u. s. w.

wo aber natürlich die Werthe von ω_t nie kleiner als -90° werden dürfen, und bezeichne, indem man der Einfachheit wegen den Anfang der Coordinaten in den Anfang der Bewegung verlegt, die Coordinaten der den Werthen

$$\overset{1}{\omega}, \ \overset{2}{\omega}, \ \overset{3}{\omega}, \ \overset{4}{\omega}, \ \overset{5}{\omega}, \ldots$$

von ω_t entsprechenden Punkte der Trajectoria respective durch

$$\overset{1}{x}, \overset{1}{y}; \ \overset{2}{x}, \overset{2}{y}; \ \overset{3}{x}, \overset{3}{y}; \ \overset{4}{x}, \overset{4}{y}; \ \overset{5}{x}, \overset{5}{y}; \ldots$$

die von dem Anfange der Coordinaten bis zu den in Rede stehenden Punkten der Curve reichenden Bogen derselben aber durch

$$\overset{1}{S}, \ \overset{2}{S}, \ \overset{3}{S}, \ \overset{4}{S}, \ \overset{5}{S}, \ldots$$

Dann ist offenbar wenigstens näherungsweise:

$$\overset{1}{x}=\overset{1}{S}\sin\overset{0}{\omega},\qquad \overset{1}{y}=\overset{1}{S}\cos\overset{0}{\omega};$$

$$\overset{2}{x}=\overset{1}{x}+(\overset{2}{S}-\overset{1}{S})\sin\overset{1}{\omega},\quad \overset{2}{y}=\overset{1}{y}+(\overset{2}{S}-\overset{1}{S})\cos\overset{1}{\omega};$$

$$\overset{3}{x}=\overset{2}{x}+(\overset{3}{S}-\overset{2}{S})\sin\overset{2}{\omega},\quad \overset{3}{y}=\overset{2}{y}+(\overset{3}{S}-\overset{2}{S})\cos\overset{2}{\omega};$$

$$\overset{4}{x}=\overset{3}{x}+(\overset{4}{S}-\overset{3}{S})\sin\overset{3}{\omega},\quad \overset{4}{y}=\overset{3}{y}+(\overset{4}{S}-\overset{3}{S})\cos\overset{3}{\omega};$$

u. s. w.

natürlich desto genauer, je grösser man n annimmt; und da man nun

$$\overset{1}{S},\ \overset{2}{S},\ \overset{3}{S},\ \overset{4}{S},\ \overset{5}{S},\ldots.$$

aus den Werthen

$$\overset{1}{\omega},\ \overset{2}{\omega},\ \overset{3}{\omega},\ \overset{4}{\omega},\ \overset{5}{\omega},\ldots.$$

von ω_t mittelst der Formel 23) berechnen kann, so kann man auch nach und nach

$$\overset{1}{x},\ \overset{1}{y};\quad \overset{2}{x},\ \overset{2}{y};\quad \overset{3}{x},\ \overset{3}{y};\quad \overset{4}{x},\ \overset{4}{y};\quad \overset{5}{x},\ \overset{5}{y};\ldots.$$

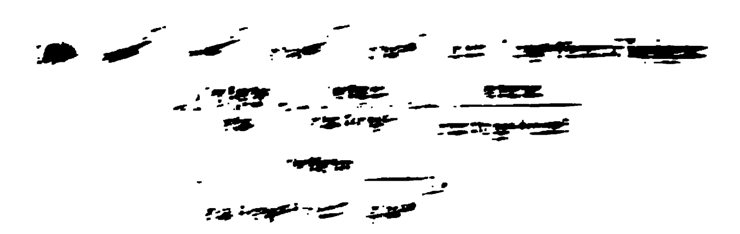
wenigstens näherungsweise berechnen, also die Trajectoria annähernd construiren.

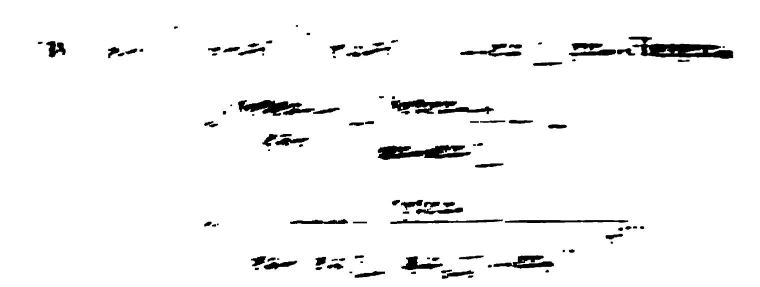
Wenn i negativ ist, so setze man nach und nach

$$\begin{aligned}
\omega_t=i &=\frac{n+0}{n}i=\overset{0}{\omega}\\
=i+\frac{i}{n} &=\frac{n+1}{n}i=\overset{1}{\omega}\\
=i+\frac{2i}{n} &=\frac{n+2}{n}i=\overset{2}{\omega}\\
=i+\frac{3i}{n} &=\frac{n+3}{n}i=\overset{3}{\omega}\\
=i+\frac{4i}{n} &=\frac{n+4}{n}i=\overset{4}{\omega}
\end{aligned}$$

u. s. w.

wo aber natürlich wieder ω_t nicht kleiner als -90^0 werden darf, und verfahre dann ferner auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle.





$$\overset{1}{x}=\overset{1}{S}\sin\overset{0}{\omega},\qquad \overset{1}{y}=\overset{1}{S}\cos\overset{0}{\omega};$$

$$\overset{2}{x}=\overset{1}{x}+(\overset{2}{S}-\overset{1}{S})\sin\overset{1}{\omega},\quad \overset{2}{y}=\overset{1}{y}+(\overset{2}{S}-\overset{1}{S})\cos\overset{1}{\omega};$$

$$\overset{3}{x}=\overset{2}{x}+(\overset{3}{S}-\overset{2}{S})\sin\overset{2}{\omega},\quad \overset{3}{y}=\overset{2}{y}+(\overset{3}{S}-\overset{2}{S})\cos\overset{2}{\omega};$$

$$\overset{4}{x}=\overset{3}{x}+(\overset{4}{S}-\overset{3}{S})\sin\overset{3}{\omega},\quad \overset{4}{y}=\overset{3}{y}+(\overset{4}{S}-\overset{3}{S})\cos\overset{3}{\omega};$$

u. s. w.

natürlich desto genauer, je grösser man n annimmt; und da man nun

$$\overset{1}{S},\ \overset{2}{S},\ \overset{3}{S},\ \overset{4}{S},\ \overset{5}{S},\ldots.$$

aus den Werthen

$$\overset{1}{\omega},\ \overset{2}{\omega},\ \overset{3}{\omega},\ \overset{4}{\omega},\ \overset{5}{\omega},\ldots.$$

von ω_t mittelst der Formel 23) berechnen kann, so kann man auch nach und nach

$$\overset{1}{x},\overset{1}{y};\ \overset{2}{x},\overset{2}{y};\ \overset{3}{x},\overset{3}{y};\ \overset{4}{x},\overset{4}{y};\ \overset{5}{x},\overset{5}{y};\ldots.$$

wenigstens näherungsweise berechnen, also die Trajectoria annähernd construiren.

Wenn i negativ ist, so setze man nach und nach

$$\omega_t=i\qquad=\frac{n+0}{n}i=\overset{0}{\omega}$$

$$=i+\frac{i}{n}=\frac{n+1}{n}i=\overset{1}{\omega}$$

$$=i+\frac{2i}{n}=\frac{n+2}{n}i=\overset{2}{\omega}$$

$$=i+\frac{3i}{n}=\frac{n+3}{n}i=\overset{3}{\omega}$$

$$=i+\frac{4i}{n}=\frac{n+4}{n}i=\overset{4}{\omega}$$

u. s. w.

wo aber natürlich wieder ω_t nicht kleiner als -90^0 werden darf, und verfahre dann ferner auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle.

$$31)\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}\overline{\omega}(\tang i^2-u^2)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} uU\partial u, \\ y=\overline{\omega}(\tang i-u)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} U\partial u. \end{cases}$$

Ferner kann man Behufs einer dritten Annäherung setzen:

$$x=\frac{1}{2}\overline{\omega}(\tang i^2-u^2)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} uU\partial u-\mu^2\overline{\omega}^3\int_{\tang i}^{u} uU^2\partial u \quad - \quad +\mu^3\overline{\omega}^4\int_{\tang i}^{u}\frac{uU^3}{1+\mu\overline{\omega}U}\partial u,$$

$$y=\overline{\omega}(\tang i-u)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} U\partial u-\mu^2\overline{\omega}^3\int_{\tang i}^{u} U^2\partial u \quad +\mu^3\overline{\omega}^4\int_{\tang i}^{u}\frac{U^3}{1+\mu\overline{\omega}U}\partial u,$$

und betrachtet man dann μ^3 als verschwindend, so wird:

$$32)\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}\overline{\omega}(\tang i^2-u^2)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} uU\partial u-\mu^2\overline{\omega}^3\int_{\tang i}^{u} uU^2\partial u, \\ y=\overline{\omega}(\tang i-u)+\mu\overline{\omega}^2\int_{\tang i}^{u} U\partial u-\mu^2\overline{\omega}^3\int_{\tang i}^{u} U^2\partial u. \end{cases}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar. Unter der Voraussetzung, dass die Trajectoria sich sehr der Trajectoria im leeren Raume nähert, berechnet man auf diese Weise gewissermassen nach und nach die Correctionen, welche von den verschiedenen Potenzen des Widerstandes herrühren, und verfährt also auf ähnliche Weise wie etwa bei der Berechnung der Planetenstörungen. Ueber die wirkliche Anwendbarkeit der durch diese Entwickelungen hervorgehenden ballistischen Formeln kann aber nur die Erfahrung entscheiden; natürlich wird dieselbe auch durch die Grösse von

$$\overline{\omega}=\frac{V^2\cos i^2}{2G}$$

sehr bedingt werden. Kleine Anfangsgeschwindigkeiten V und den absoluten Werthen nach grosse Neigungswinkel i werden der Anwendbarkeit der in Rede stehenden Formeln günstig sein.

und folglich nach dem Obigen:

$$\int U^2\partial u = U\{Uu + \tfrac{4}{3}(1+u^2)\sqrt{1+u^2}\} + \tfrac{8}{3}u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4).$$

Endlich ist

$$\int uU^2\partial u = u\int U^2\partial u - \int\partial u\int U^2\partial u$$

$$= u\int U^2\partial u - \int uU^2\partial u - \tfrac{4}{3}\int U(1+u^2)\partial u\sqrt{1+u^2}$$

$$-\tfrac{8}{3}\int u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4)\partial u,$$

also

$$2\int uU^2\partial u = u\int U^2\partial u - \tfrac{4}{3}\int U(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u - \tfrac{8}{3}\int u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4)\partial u.$$

Es ist aber

$$\int U(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u - \int\partial U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u$$

$$= U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u + 2\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u$$

und

$$\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = (1+u^2)^{\frac{3}{2}}\int\partial u - \int\partial.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\int\partial u$$

$$= u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} - 3\int u^2\partial u\sqrt{1+u^2}$$

$$= u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{4}u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{8}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{3}{8}\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2}),$$

also

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = \tfrac{1}{4}\int u(1+u^2)^2\partial u + \tfrac{3}{8}\int u(1+u^2)\partial u$$

$$+\tfrac{3}{8}\int\partial u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2}).$$

Nun ist

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})$$

$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \int\partial\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$

$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$

$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{2}\int u\partial u - \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u$$

und

$$\int\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u = \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} - \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}\int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$= \{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\}^2 - \int\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u,$$

Nun ist

$$\int U\partial u = U\int\partial u - \int\partial U\int\partial u = Uu + 2\int u\partial u\sqrt{1+u^2},$$

$$\int uU\partial u = U\int u\partial u - \int\partial U\int u\partial u = \tfrac{1}{2}Uu^2 + \int u^2\partial u\sqrt{1+u^2};$$

also

$$\int U\partial u = Uu + \tfrac{2}{3}(1+u^2)\sqrt{1+u^2};$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\int u^2\partial u\sqrt{1+u^2} = \tfrac{1}{4}u(1+u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{4}\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$

ist, so ist, wenn man den Werth von $\int\partial u\sqrt{1+u^2}$ aus dem Obigen einführt:

$$\int u^2\partial u\sqrt{1+u^2} = \tfrac{1}{8}u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{8}l(u+\sqrt{1+u^2}),$$

folglich

$$\int uU\partial u = \tfrac{1}{2}Uu^2 + \tfrac{1}{8}u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{8}l(u+\sqrt{1+u^2}).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$33)\quad \begin{cases} \Phi(u) = \tfrac{1}{2}Uu^2 + \tfrac{1}{8}u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{8}l(u+\sqrt{1+u^2}), \\ \Psi(u) = Uu + \tfrac{2}{3}(1+u^2)\sqrt{1+u^2}; \end{cases}$$

so ist nach 31):

$$34)\quad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2}\varpi(\tang i^2 - u^2) + \mu\varpi^2\{\Phi(u) - \Phi(\tang i)\}, \\ y = \varpi(\tang i - u) + \mu\varpi^2\{\Psi(u) - \Psi(\tang i)\}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int U^2\partial u &= U\int U\partial u - \int\partial U\int U\partial u \\ &= U^2u + \tfrac{2}{3}U(1+u^2)\sqrt{1+u^2} + 2\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int U\partial u\end{aligned}$$

und

$$\partial u\sqrt{1+u^2}\int U\partial u = Uu\partial u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{2}{3}(1+u^2)^2\partial u,$$

also

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int U\partial u$$

$$= U\int u\partial u\sqrt{1+u^2} - \int\partial U\int u\partial u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{2}{3}\int(1+u^2)^2\partial u$$

$$= \tfrac{1}{3}U(1+u^2)\sqrt{1+u^2} + \tfrac{4}{3}\int(1+u^2)^2\partial u$$

$$= \tfrac{1}{3}U(1+u^2)\sqrt{1+u^2} + \tfrac{4}{3}u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4),$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\int U^2\partial u = U\{Uu + \tfrac{4}{3}(1+u^2)\sqrt{1+u^2}\} + \tfrac{8}{3}u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4).$$

Endlich ist

$$\int uU^2\partial u = u\int U^2\partial u - \int\partial u\int U^2\partial u$$
$$= u\int U^2\partial u - \int uU^2\partial u - \tfrac{4}{3}\int U(1+u^2)\partial u\sqrt{1+u^2}$$
$$-\tfrac{8}{3}\int u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4)\partial u,$$

also

$$2\int uU^2\partial u = u\int U^2\partial u - \tfrac{4}{3}\int U(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u - \tfrac{8}{3}\int u(1+\tfrac{2}{3}u^2+\tfrac{1}{5}u^4)\partial u.$$

Es ist aber

$$\int U(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u - \int\partial U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u$$
$$= U\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u + 2\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u$$

und

$$\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = (1+u^2)^{\frac{3}{2}}\int\partial u - \int\partial.(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\int\partial u$$
$$= u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} - 3\int u^2\partial u\sqrt{1+u^2}$$
$$= u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{4}u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}u(1+u^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{8}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{3}{8}\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2}),$$

also

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u = \tfrac{1}{4}\int u(1+u^2)^2\partial u + \tfrac{3}{8}\int u(1+u^2)\partial u$$
$$+\tfrac{3}{8}\int\partial u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2}).$$

Nun ist

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})$$
$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \int\partial\,\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$
$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}\int\partial u\sqrt{1+u^2}$$
$$= \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\partial u\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{2}\int u\partial u - \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u$$

und

$$\int\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u = \mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} - \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}\int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}}$$
$$= \{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})\}^2 - \int\frac{\mathrm{l}(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u,$$

also

$$\int\frac{l(u+\sqrt{1+u^2})}{\sqrt{1+u^2}}\partial u=\tfrac{1}{2}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2,$$

folglich

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})$$
$$=\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})+\tfrac{1}{4}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2-\tfrac{1}{4}u^2.$$

Also ist

$$\int\partial u\sqrt{1+u^2}\int(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u=\tfrac{7}{32}u^2+\tfrac{7}{32}u^4+\tfrac{1}{24}u^6$$
$$+\tfrac{3}{16}u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})+\tfrac{3}{32}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\int U(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\partial u=U\{\tfrac{1}{4}u(1+u^2)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{3}{8}u\sqrt{1+u^2}+\tfrac{3}{8}l(u+\sqrt{1+u^2})\}$$
$$+\tfrac{3}{8}u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})+\tfrac{3}{16}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2+\tfrac{7}{16}u^2+\tfrac{7}{16}u^4+\tfrac{1}{12}u^6.$$

Nach gehöriger Substitution in den oben für $2\int uU^2\partial u$ gefundenen Ausdruck erhält man:

$$2\int uU^2\partial u=U^2u^2+\tfrac{1}{2}U\{u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2}-l(u+\sqrt{1+u^2})\}$$
$$-\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})-\tfrac{1}{4}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2$$
$$+\tfrac{3}{4}u^2(1+u^2+\tfrac{4}{9}u^4).$$

Wird also der Kürze wegen

$$35)\left\{\begin{array}{l}\Phi_1(u)=\tfrac{1}{2}U^2u^2+\tfrac{1}{4}U\{u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2}-l(u+\sqrt{1+u^2})\}\\ \quad-\tfrac{1}{4}u\sqrt{1+u^2}\,l(u+\sqrt{1+u^2})-\tfrac{1}{8}\{l(u+\sqrt{1+u^2})\}^2\\ \quad+\tfrac{3}{8}u^2(1+u^2+\tfrac{4}{9}u^4),\\ \Psi_1(u)=U\{Uu+\tfrac{4}{3}(1+u^2)\sqrt{1+u^2}\}+\tfrac{8}{5}u(1+\tfrac{2}{5}u^2+\tfrac{1}{5}u^4)\end{array}\right.$$

gesetzt, so ist nach 32):

$$36)\left\{\begin{array}{l}x=\tfrac{1}{2}\overline{\omega}(\tan g\,i^2-u^2)+\mu\overline{\omega}^2\{\Phi(u)-\Phi(\tan g\,i)\}\\ \qquad\qquad-\mu^2\overline{\omega}^3\{\Phi_1(u)-\Phi_1(\tan g\,i)\},\\ y=\overline{\omega}(\tan g\,i-u)+\mu\overline{\omega}^2\{\Psi(u)-\Psi(\tan g\,i)\}\\ \qquad\qquad-\mu^2\overline{\omega}^3\{\Psi_1(u)-\Psi_1(\tan g\,i)\}.\end{array}\right.$$

Eine allgemeinere Untersuchung der Integrale von der obigen Form behalte ich einer späteren Abhandlung vor.

XXVII.

Bestimmung der Differenziale von Exponentialgrössen mit veränderlicher Basis und zusammengesetzten veränderlichen Exponenten.

Von
Herrn Hofrath *Oettinger*,
Professor an der Universität zu Freiburg i. B.

Es sei $q=y^x$, so ist $\lg q = x \lg y$, und hieraus erhält man durch Differenziren:

$$\partial \lg q = \frac{\partial q}{q} = \partial x \lg y + x.\frac{\partial y}{y},$$

und hieraus durch Wiedereinführung des Werthes für q:

$$(1) \qquad \partial y^x = y^x [\lg y.\partial x + x\frac{\partial y}{y}].$$

Scheidet man x aus der Klammer, so entsteht:

$$(2) \qquad \partial y^x = y^x.x[\lg y\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}] = y^x x[\lg y \,\partial \lg x + \partial \lg y].$$

Zieht man auch $\lg y$ aus der Klammer, multiplicirt und dividirt durch $\lg x$, so wird hieraus:

$$\partial y^x = y^x.x \lg y.\lg x \left[\frac{\partial \lg x}{\lg x} + \frac{\partial \lg y}{\lg x.\lg y}\right]$$
$$= y^x \lg y^x.\lg x \left[\frac{\partial x}{x \lg x} + \frac{\partial y}{\lg x.y \lg y}\right].$$

Nun ist $\partial \lg \lg s = \frac{\partial \lg s}{\lg s} = \frac{\partial s}{s \lg s}$, und hieraus erhält man folgende zweite Form für das obige Differenzial:

[illegible]

3) [illegible]

[illegible]

Erste Methode.

[illegible] so wird nach 2): [illegible]

$$[illegible]$$

Wird nun [illegible] [illegible]

4) [illegible]

[illegible] 2): [illegible]

$$[illegible]$$

Wird nun [illegible] [illegible]

5) [illegible]

[illegible]

6) [illegible]

[illegible]

und allgemein

$$(7)\quad \partial x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} = x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} . x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} . x_3^{x_4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} \ldots x_{n-1}^{x_n} . x_n [\lg x_1 \lg x_2 \ldots$$

$$\ldots \lg x_{n-1} \partial \lg x_n + \lg x_1 \lg x_2 \ldots \lg x_{n-2} \partial \lg x_{n-1}$$

$$+ \frac{\lg x_1 \lg x_2 \ldots \lg x_{n-3} \partial \lg x_{n-2}}{x_n} \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial \lg x_1}{x_n . x_{n-1}^{x_n} . x_{n-2}^{x_{n-1}^{x_n}} \ldots x_3^{x_4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}}].$$

Zweite Methode.

Aus der Darstellung (3) gewinnt man auf dem gleichen Wege wie vorhin Folgendes.

Man setze $u = y^x$, so ist aus (3):

$$\partial z^u = z^u \lg z^u . \lg u [\partial \lg \lg u + \frac{\partial \lg \lg z}{\lg \lg u}]$$

$$= z^{y^x} . \lg z^{y^x} . \lg y^x \left[\frac{\partial y^x}{y^x \lg y^x} + \frac{\partial \lg \lg z}{\lg y^x}\right].$$

Wird nun ∂y^x aus (3) eingeführt und $\lg x$ nach der Einführung aus der Klammer gezogen, so ergibt sich:

$$(8)$$

$$\partial z^{y^x} = z^{y^x} \lg z^{y^x} \lg y^x \lg x [\partial \lg \lg x + \frac{\partial \lg \lg y}{\lg x} + \frac{\partial \lg \lg z}{\lg x . \lg y^x}].$$

Setzt man $s = z^{y^x}$, so wird aus (3):

$$\partial u^s = u^s \lg u^s \lg s [\partial \lg \lg s + \frac{\partial \lg \lg u}{\lg s}]$$

$$= u^{z^{y^x}} \lg u^{z^{y^x}} \lg z^{y^x} \left[\frac{\partial z^{y^x}}{z^{y^x} \lg z^{y^x}} + \frac{\partial \lg \lg u}{\lg z^{y^x}}\right].$$

Wird ∂z^{y^x} aus (8) eingeführt und $\lg y^x \lg x$ nach der Einführung aus der Klammer genommen, so erhält man:

$$(9)\quad \partial u^{z^{y^x}} = u^{z^{y^x}} \lg u^{z^{y^x}} \lg z^{y^x} \lg y^x \lg x [\partial \lg \lg x + \frac{\partial \lg \lg y}{\lg x}$$

$$+ \frac{\partial \lg \lg z}{\lg x \lg y^x} + \frac{\partial \lg \lg u}{\lg x . \lg y^x . \lg z^{y^x}}].$$

Eben so entsteht:

10) [illegible]

und allgemein:

11) [illegible]

Man kann übrigens auch (II) durch einige Umformungen auch unmittelbar aus Formel (7) ableiten.

Anwendungen.

Nimmt man in (2) für y oder z beständige Werthe an, so ergeben sich die bekannten Differenziale:

$$1) \qquad \partial a^{x} = a^{x} \lg a\, \partial x \quad \text{und} \quad \partial y^{a} = \frac{a\, y^{a}\, \partial y}{y} = a y^{a-1} \partial y.$$

ferner ergibt sich aus (4), (5), (6):

$$2) \qquad \partial a^{y^{z}} = a^{y^{z}}\, y^{z}\, z \lg a \left(\frac{\partial z}{z} \ldots \frac{\partial y}{y}\right),$$

$$\partial a^{x^{y^{z}}} = a^{x^{y^{z}}}\, x^{y^{z}}\, y^{z}\, z \lg a\, [\lg z \lg y \frac{\partial x}{x} + \lg z \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z}]$$

u. s. w.

$$3) \qquad \partial x^{y^{z}} = x^{y^{z}}\, y^{z}\, z \left(\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}\right),$$

$$\partial w^{x^{y^{z}}} = w^{x^{y^{z}}}\, x^{y^{z}}\, y^{z}\, z\, [\lg z \lg y \frac{\partial x}{x} + \lg z \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z}]$$

u. s. w.

4) $$\partial a^{x^x} = a^{x^x} x^x . 2 \lg a \partial x,$$

$$\partial a^{x^{x^x}} = a^{x^{x^x}} x^{x^x} x^x \lg a [(\lg x)^2 + \lg x + \frac{1}{x}] \partial x,$$

u. s. w.

5) $$\partial e^{x^x} = e^{x^x} x^x . 2 \partial x,$$

$$\partial e^{x^{x^x}} = e^{x^{x^x}} x^{x^x} x^x [(\lg x)^2 + \lg x + \frac{1}{x}] \partial x,$$

u. s. w.

6) $$\partial e^{e^x} = e^{e^x} . e^x \partial x,$$

$$\partial e^{e^{e^x}} = e^{e^{e^x}} . e^{e^x} e^x \partial x$$

u. s. w.

7) $$\partial x^x = x^x [\lg x + 1] \partial x,$$

$$\partial x^{x^x} = x^{x^x} x^x [(\lg x)^2 + \lg x + \frac{1}{x}] \partial x,$$

$$\partial x^{x^{x^x}} = x^{x^{x^x}} x^{x^x} x^x [(\lg x)^3 + (\lg x)^2 + \frac{\log x}{x} + \frac{1}{x . x^x}] \partial x,$$

u. s. w.

Ferner ergibt sich aus (2), wenn $x_1 x_2 .... x_n$ statt x gesetzt wird:

8) $$\partial z^{x_1 x_2 .... x_n} = z^{x_1 x_2 .... x_n} [\lg z \partial (x_1 x_2 .... x_n) + x_1 x_2 .... x_n \frac{\partial z}{z}]$$

Wird nun $\partial (x_1 x_2 .... x_n)$ differenzirt und $x_1 x_2 .... x_n$ und $\lg z$ nach der Differenziation ausgeschieden, so entsteht:

9)

$$\partial z^{x_1 x_2 .... x_n} = x_1 x_2 .... x_n . z^{x_1 x_2 .... x_n} \lg z \left[\frac{\partial x_1}{x_1} + \frac{\partial x_2}{x_2} + \frac{\partial x_3}{x_3} .... \frac{\partial x_n}{x_n} + \frac{\partial z}{z \lg z} \right]$$

$$= \lg z^{x_1 x_2 .... x_n} . z^{x_1 x_2 .... x_n} [\partial \lg x_1 + \partial \lg x_2 + ... \partial \lg x_n + \partial \lg \lg z]$$

$$= \lg z^{x_1 x_2 .... x_n} . z^{x_1 x_2 .... x_n} \times \partial [\lg (x_1 x_2 .... x_n \lg z)].$$

Aus (9) ergeben sich folgende spezielle Fälle:

10)

$$\partial z^{xy} = xy . z^{xy} \lg z \left[\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z \lg z} \right] = \log z^{yx} . z^{xy} \partial [\lg (xy \lg z)],$$

$$\partial z^{xyu} = xyu . z^{xyu} \lg z \left[\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial u}{u} + \frac{\partial z}{z \lg z} \right]$$

$$= \lg z^{yxu} . z^{xyu} \partial [\lg (xyu \lg z)],$$

u. s. w.

$$(10)\quad \partial w^{u^{z^{y^x}}} = w^{u^{z^{y^x}}} \lg w^{u^{z^{y^x}}} \lg u^{z^{y^x}} \lg z^{y^x} \lg y^x \lg x \Big[\partial \lg\lg x + \frac{\partial \lg\lg y}{\lg x} + \frac{\partial \lg\lg z}{\lg x \lg y^x} + \frac{\partial \lg\lg u}{\lg x \lg y^x \lg z^{y^x}}$$
$$+ \frac{\partial \lg\lg w}{\lg x \lg y^x \lg z^{y^x} \lg u^{z^{y^x}}}\Big],$$

und allgemein:

$$(11)\quad \partial x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} = x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} \lg x_1^{x_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}} \ldots \lg x_{n-1}^{x_n} \lg x_n \Big[\partial \lg\lg x_n$$
$$+ \frac{\partial \lg\lg x_{n-1}}{\lg x_n} + \frac{\partial \lg\lg x_{n-2}}{\lg x_n \lg x_{n-1}^{x_n}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial \lg\lg x_1}{\lg x_n \lg x_{n-1}^{x_n} \lg x_{n-2}^{x_{n-1}^{x_n}} \ldots \lg x_2^{x_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x_n}}}}}}\Big].$$

Man kann übrigens auch (11) durch einige Umformungen unmittelbar aus Formel (7) ableiten.

Anwendungen.

Nimmt man in (2) für y oder x beständige Werthe an, so geben sich die bekannten Differenziale:

$$1)\qquad \partial a^x = a^x \lg a \partial x \quad \text{und} \quad \partial y^n = \frac{n \, . \, y^n \partial y}{y} = n y^{n-1} \partial y;$$

ferner ergibt sich aus (4), (5), (6):

$$2)\qquad \partial a^{y^x} = a^{y^x} y^x x \lg a \left(\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}\right),$$

$$\partial a^{z^{y^x}} = a^{z^{y^x}} z^{y^x} y^x x \lg a \left[\lg z \, . \lg y \frac{\partial x}{x} + \lg z \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{xz}\right],$$

u. s. w.

$$3)\qquad \partial e^{y^x} = e^{y^x} y^x x \left(\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}\right),$$

$$\partial e^{z^{y^x}} = e^{z^{y^x}} z^{y^x} y^x x \left[\lg z \lg y \frac{\partial x}{x} + \lg z \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{xz}\right]$$

u. s. w.

bloss auswendig lernen, sondern sich eine wirklich theoretisch begründete, völlig deutliche Einsicht in dieselben verschaffen: desto mehr dürfte der vorliegende kurze, einen an sich sehr einfachen Gegenstand, der übrigens mit den in der Mathematik bekanntlich immer gewisse Schwierigkeit darbietenden und stets eine besonders deutliche Darstellung erfordernden Lagenbestimmungen zusammenhängt, betreffende Aufsatz auf einige Nachsicht wegen seines Abdrucks in dieser Zeitschrift rechnen dürfen. Derselbe verdankt lediglich dem Bestreben, die mir ausserordentlich am Herzen liegende, sehr wünschenswerthe Verbesserung des Unterrichts auf nautischen Lehranstalten in jeder Rücksicht herbeizuführen, seine Entstehung, und macht durchaus keine anderen Ansprüche, als in dieser Beziehung einigermassen berücksichtigt zu werden. Die Kenntniss der Einrichtung des Kompasses setzt derselbe voraus.

§. 1.

Jedermann weiss, welchen Theil des Schiffsgebäudes die Schiffsbaukunst mit dem Namen des Kiels bezeichnet. Hier jedoch, wo wir es lediglich mit geometrischen Bestimmungen zu thun haben, wollen wir diesem Ausdrucke eine etwas bestimmtere Bedeutung beilegen. Unter der Voraussetzung nämlich, dass das Schiff auf völlig ruhigem Wasser schwimme, wollen wir im Folgenden unter Kiel die horizontale Linie verstehen, welche von dem Mittelpunkte des Kompasses aus nach der Mitte des vordersten Theils des Schiffes gerichtet ist.

Unter dem Kielwasser eines segelnden Schiffes versteht man bekanntlich die dem Schiffe gewissermassen folgende, von der Mitte des Hintertheils oder vielmehr von dem Steuerruder ausgehende zusammenstrudelnde geradlinige Wasserspur. Die nach vorn hin verlängerte Richtung des Kielwassers nennt man den Leeweg, und es ist klar, dass durch diesen Leeweg jederzeit die eigentliche Richtung bestimmt wird, nach welcher hin das Schiff segelt oder seinen Lauf nimmt. Jedem segelnden Schiffe legt der Seemann zwei Seiten bei. Denkt man sich nämlich den Wind über das Schiff weggehend, so heisst die Seite des Schiffes, von welcher er kommt, die Luvseite, die Seite dagegen, nach welcher er geht, die Leeseite. Die Erfahrung hat gelehrt, dass der Leeweg in den meisten Fällen nicht mit der Richtung des Kiels zusammenfällt und dann immer auf der Leeseite des Schiffes liegt, mit welcher Erfahrung wohl die Abstammung des Wortes Leeweg zusammenhängen mag.

Der von dem Leeweg und Kiel eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel heisst die Abtrifft *) oder auch wohl selbst der Leeweg. Die Abtrifft wird bestimmt durch Messung des 180° nicht übersteigenden Winkels, welchen die Richtung des Kielwassers mit der Verlängerung des Kiels rückwärts über den Mittelpunkt des Kompasses hinaus einschliesst. Um die Abtrifft mit Leichtigkeit messen zu können, ist in der Mitte des Heckbords, worunter man im Allgemeinen den hintersten obersten Theil des Schiffes versteht, ein in Striche und Viertelstriche getheilter Kreis gezeichnet, dessen einer Durchmesser genau mit der Richtung des Kiels zusammenfällt. In dem Mittelpunkte dieses Kreises ist eine kleine, gabelförmig geöffnete Stütze, Mick oder Stieper genannt, errichtet, und wenn geloggt ist, wird die Logleine, ehe man sie einholt, in die Mick gelegt; da nun das Logbrett im Kielwasser nachschwimmt, so ist klar, dass sich die Abtrifft mit Leichtigkeit auf dem in Striche und Viertelstriche eingetheilten Kreise ablesen lässt. Meistens übrigens wird dieser ganze Kreis durch einen blossen Halbkreis vertreten, dessen Durchmesser auf dem Kiel senkrecht steht und dessen Bogen nach dem hinteren Theile des Schiffes hin liegt. Die Einrichtung ist so einfach, dass eine genauere Beschreibung derselben nicht erforderlich ist. Von anderen Methoden zur Messung der Abtrifft kann hier nicht weiter die Rede sein.

§. 2.

Unter dem wahren Curs eines segelnden Schiffes wollen wir den 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, welchen die wirkliche Richtung seines Laufs mit der nördlichen Richtung des Meridians, unter welchem sich der Mittelpunkt des Kompasses gerade befindet, einschliesst, indem wir unter der nördlichen Richtung des Meridians die Richtung des von dem Mittelpunkte des Kompasses aus nach Norden hin gehenden Theils des Meridians verstehen; zugleich soll dieser wahre Curs östlich oder westlich genannt werden, jenachdem von dem betreffenden Meridiane aus der Lauf des Schiffes nach der östlichen oder westlichen Seite dieses Meridians hin gerichtet ist.

Unter dem magnetischen Curs eines unter einem bestimmten wahren Curs segelnden Schiffes wollen wir den Kompassstrich verstehen, welcher mit dem Kiele des Schiffes **) zusammenfallen

*) Abdrift.

**) Kiel immer in dem im Obigen näher bestimmten Sinne genommen.

würde, wenn der Kompass keine Variation*), das Schiff keine Abtrifft hätte.

Unter dem Kompass-Curs eines unter einem bestimmten wahren Curs segelnden Schiffes wollen wir endlich den Kompassstrich verstehen, welcher mit Rücksicht auf Variation und Abtrifft mit dem Kiele des Schiffes zusammenfällt.

Wie diese verschiedenen Curse in einander zu verwandeln sind, soll nun im Folgenden gezeigt werden.

§. 3.

Zur Verwandlung der wahren Curse in magnetische Curse und umgekehrt bedient man sich mit Rücksicht darauf, dass jede zwei benachbarte Kompassstriche einen Winkel von 11°.15′ mit einander einschliessen, am besten der folgenden Tafel, zu deren Verständniss und sicherem Gebrauch bloss zu bemerken ist, dass die letzte Kolumne östlichen, die vorletzte westlichen Cursen entspricht, wie dies auch in der Tafel selbst angezeigt worden ist.

Wahrer östlicher oder westlicher Curs.	Magnetischer Curs.	
	Wahrer Curs westlich.	Wahrer Curs östlich.
0. 0′	N.	N.
11.15	NzW.	NzO.
22.30	NNW.	NNO.
33.45	NWzN.	NOzN.
45. 0	NW.	NO.
56.15	NWzW.	NOzO.
67.30	WNW.	ONO.
78.45	WzN.	OzN.
90. 0	W.	O.
101.15	WzS.	OzS.
112.30	WSW.	OSO.
123.45	SWzW.	SOzO.
135. 0	SW.	SO.
146.15	SWzS.	SOzS.
157.30	SSW.	SSO.
168.45	SzW.	SzO.
180. 0	S.	S.

*) Gleichbedeutend mit Declination.

Mit Rücksicht darauf, dass der Winkel zwischen jeden zwei Viertelstrichen des Kompasses $2^{0}.48'.45''$ beträgt, kann man diese Tabelle in der obigen Weise leicht auf Viertelstriche erweitern, wodurch ihr Raum nur etwas vergrössert, ihr Gebrauch im Allgemeinen durchaus nicht geändert wird.

§. 4.

Um nun ferner den magnetischen Curs in den Kompass-Curs zu verwandeln, berücksichtigen wir, die Abtrifft für's Erste bei Seite setzend, zunächst bloss die Variation, welche wir hier in Strichen und Viertelstrichen gegeben annehmen.

Man denke sich im Folgenden immer das Auge auf den richtigen magnetischen Kompassstrich, welcher als gegeben vorausgesetzt wird, gerichtet. Unter dieser Voraussetzung denke man sich ferner das Schiff zuerst in eine solche Lage gebracht, dass es auf den richtigen magnetischen Kompassstrich anliegt, d. h. dass dieser Kompassstrich mit dem Kiel zusammenfällt; so würde diese Lage des Schiffes die richtige sein, wenn die Variation gleich Null wäre, oder diese Lage wäre die richtige, wenn das Nord der Kompassrose genau nach Norden gerichtet wäre. Verschwindet nun aber die Variation nicht und ist zuerst östlich, so muss, um das Schiff in die richtige Lage gegen den Meridian zu bringen, offenbar der Kiel noch um einen der Variation gleichen Winkel nach der linken Seite des Beobachters hin gedreht werden, wonach das Schiff augenscheinlich an einem solchen Kompassstrich anliegen wird, welchen man erhält, wenn man von dem magnetischen Curs die Variation nach der linken Seite hin abrechnet. Verschwindet dagegen die Variation nicht und ist westlich, so muss, um das Schiff in die richtige Lage gegen den Meridian zu bringen, offenbar der Kiel noch um einen der Variation gleichen Winkel nach der rechten Seite des Beobachters hin gedreht werden, wonach das Schiff augenscheinlich an einem solchen Kompasstrich anliegen wird, welchen man erhält, wenn man von dem magnetischen Curs die Variation nach der rechten Seite hin abrechnet. Dies giebt folgende Regel, um aus dem magnetischen Curs den Kompass-Curs zuvörderst ohne Rücksicht auf Abtrift zu finden:

Richte das Auge auf den gegebenen magnetischen Kompassstrich und rechne von dem magnetischen Curs östliche Variation zur linken Hand, westliche Variation zur rechten Hand ab.

Wir wollen diese Regel durch ein Paar Beispiele erläutern.

Ist der magnetische Curs SSW$\frac{3}{4}$W. und die Variation 1$\frac{3}{4}$ Strich östlich, so ist ohne Rücksicht auf Abtrifft der Kompass-Curs SzW.

Ist der magnetische Curs NOzN. und die Variation 1$\frac{1}{4}$ Strich westlich, so ist ohne Rücksicht auf Abtrifft der Kompass-Curs NO$\frac{1}{4}$O.

Es muss nun der nach der vorhergehenden Regel bestimmte Kompass-Curs noch wegen der Abtrifft corrigirt werden. Da der Leeweg immer auf der Leeseite liegt, so ist klar, dass, nachdem der Kompass-Curs nach der vorhergehenden Regel bestimmt worden, man sich den Kiel jederzeit nach der Luvseite hin um einen der Abtrifft gleichen Winkel gedreht denken muss, wenn das Schiff wirklich den richtigen Curs segeln soll, und man muss also, um endlich den auch wegen der Abtrifft corrigirten Kompass-Curs zu finden, von dem nach der vorhergehenden Regel bestimmten Kompass-Curs die Abtrifft nach der Luvseite hin abrechnen, wobei man sich das Auge auf den nach der obigen Regel bestimmten Kompassstrich gerichtet denken muss. Dies giebt also die folgende Regel:

Um den auch wegen der Abtrifft corrigirten Kompass-Curs zu finden, richte das Auge auf den nach der vorhergehenden Regel bestimmten Kompassstrich und rechne von dem nach dieser Regel gefundenen Kompass-Curs die Abtrifft nach der Luvseite hin ab.

Um auch diese Regel durch einige Beispiele zu erläutern, bemerken wir zuerst, dass, wenn man, am Kompass stehend, das Gesicht nach dem Vordertheil des Schiffes sich hin gerichtet denkt, dann die rechts vom Beobachter liegende Seite des Schiffes Steuerbord, die links vom Beobachter liegende Seite des Schiffes dagegen Backbord genannt wird.

Dies vorausgesetzt sei nun der magnetische Curs SO$\frac{1}{2}$S., die Variation 2 Strich westlich, die Abtrifft 1$\frac{1}{2}$ Strich, die Luvseite sei Backbord. Wendet man die erste Regel an, so erhält man SSO$\frac{1}{2}$S., und wendet man nun die zweite Regel an, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass Backbord die Luvseite ist, SOzS.

Der magnetische Curs sei SSW$\frac{3}{4}$W., die Variation 4$\frac{1}{2}$ Strich östlich, die Abtrifft 5$\frac{1}{4}$ Strich, die Luvseite sei Steuerbord. Die erste Regel giebt SSO$\frac{1}{4}$S., die zweite giebt SW$\frac{1}{2}$S.

Der magnetische Curs sei NWzW$\frac{1}{4}$W., die Variation 3 Strich westlich, die Abtrifft 3 Strich, die Luvseite sei Steuerbord. Die erste Regel giebt NNW$\frac{1}{4}$W., die zweite giebt N$\frac{3}{4}$O.

Mit ... zO.O., die Variation 3¼ Strich
Viertels... Luvseite sei Backbord. Die
Tabelle ... zweite giebt N.
weitern ...
im Allgem... O.N., die Variation 2½ Strich öst-
... Luvseite sei Steuerbord. Die erste
... giebt O.

... mittelst welcher die unteren
... Luvseite nach vorn angeholt und
Um ... Luvseite Steuerbord, so sagt man: das
zu ver... Steuerbordshalsen zu oder es liegt
Seite ... die Luvseite Backbord, so sagt man:
Striche ... Steuerbord mit Backbordshalsen zu oder es
... Dies vorausgesetzt, werden auch die
... sein.

... SW.S., die Variation 4 Strich west-
... Schiff liegt auf Steuerbordshalsen.
... die zweite giebt WNW.

... NOzO., die Variation 2 Strich west-
... Schiff segelt über Steuerbord mit
... giebt OzN., die zweite

... NW.N.W., die Variation 3 Strich
... Schiff liegt auf Backbordshalsen.
... die zweite giebt SW½W.

... die beiden obigen sehr
... erläutern.

... Kompass-Curs in den magnetischen
... die beide obigen Regeln in
... umgekehrter Weise anzuwenden.
... Regeln:

... Kompass-Curs rechne man, das
... Kompassstrich gerichtet, die
... hin ab.

... Weise erhaltenen Curs rechne
... gegebenen Kompasstrich ...
... Variation zur rechten, die west-
... Hand ab.

... SW¼S., die Abtrifft 5¼ Strich, ...

Variation $4\frac{1}{4}$ Strich östlich, die Luvseite sei Steuerbord, die Leeseite also Backbord. Die erste Regel giebt SSO$\frac{1}{4}$S., die zweite giebt SSW$\frac{3}{4}$W.

Der Kompass-Curs sei WNW., die Abtrifft $2\frac{1}{4}$ Strich, die Variation 4 Strich westlich, die Luvseite sei Steuerbord, die Leeseite also Backbord. Die erste Regel giebt W$\frac{1}{2}$S., die zweite giebt SW$\frac{1}{2}$S.

Der Kompass-Curs sei N., die Abtrifft 7 Strich, die Variation $3\frac{1}{4}$ Strich östlich, die Luvseite sei Backbord, die Leeseite also Steuerbord. Die erste Regel giebt OzN., die zweite giebt OSO$\frac{1}{4}$S. oder, was dasselbe ist, SOzO$\frac{3}{4}$O.

Will man mehr Beispiele, so braucht man die für den ersten Fall gegebenen nur sämmtlich umzukehren.

XXIX.

Ueber eine Klasse von Integralfunctionen zweier unabhängigen Veränderlichen, welche zwischen gewissen bestimmten Grenzen verschiedene Werthe geben, wenn die Ordnung in der Integration umgekehrt wird.

Von

Herrn Professor *G. Decher*

an der polytechnischen Schule zu Augsburg.

Dem Beispiele Cauchy's folgend, hält auch Cournot in seiner Theorie der Functionen an dem Satze fest, dass ein bestimmtes doppeltes Integral, dessen Aenderungsgesetz zwischen den Grenzen desselben unendlich wird, verschiedene Werthe geben könne, wenn die Ordnung in der Integration umgekehrt werde, und führt zum Beweise dieses Satzes die Function

$$U=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}dy\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

an, aus welcher er in der für die Integration angedeuteten Ordnung die Ergebnisse zieht:

$$U=\int_{-1}^{+1} dx.\overset{+1}{\underset{-1}{\Delta_y}}.\frac{y}{x^2+y^2}=2\int_{-1}^{+1} dx.\frac{1}{1+x^2}=2\overset{+1}{\underset{-1}{\Delta_x}}.\text{arctang}\,x=\pi;$$

dann kehrt er die Ordnung beim Integriren um und findet:

$$U'=\int_{-1}^{+1} dy\int_{-1}^{+1} dx.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\int_{-1}^{+1} dy.\overset{+1}{\underset{-1}{\Delta_x}}.\frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$=-2\int_{-1}^{+1} dy.\frac{1}{1+y^2}=-2\overset{+1}{\underset{-1}{\Delta_y}}.\text{arctang}\,y=-\pi,$$

also allerdings den wesentlichen Unterschied

$$U-U'=2\pi$$

zwischen den beiden Werthen des obigen bestimmten Integrals.

Gegen diese Ergebnisse kann zwar kein ähnlicher Einwand erhoben werden, wie es in meinem frühern Aufsatze (Archiv. Thl. XIX. H. 4.) in Betreff der von Cauchy in seinen Exercices abgeleiteten Resultate geschehen ist; demohngeachtet ist der Schluss, dass jener Unterschied in den Werthen der Function U von dem Unendlichwerden der Function $z=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ zwischen den Grenzen der Veränderlichen, nämlich wenn x und y gleichzeitig Null werden, herrühre, nichts desto weniger falsch; denn es gibt eine Menge ähnlicher Functionen, welche nicht unendlich werden und doch, in gleicher Weise behandelt, verschiedene Werthe geben, wenn die Ordnung in der Integration umgekehrt wird, und der Grund für jenen Unterschied muss ganz anderswo gesucht werden.

Einen Fingerzeig für diesen Umstand werden wir schon erhalten, wenn wir die gegebene Function

$$z=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

etwas näher untersuchen, namentlich in Betreff ihres Werthes für $x=0$ und $y=0$. Setzen wir zuerst $y=0$, so wird $z=\frac{1}{x^2}$, bleibt also positiv für alle Werthe von x und gibt also für $x=0$

$$z=+\infty;$$

setzt man dagegen zuerst $x=0$, so wird $z=-\frac{1}{y^2}$, bleibt also negativ für alle Werthe von y und gibt für $y=0$

$$z=-\infty.$$

Die Function z hat also, obgleich sie weder mit x, noch mit y das Zeichen wechselt, und in Bezug auf z nur vom ersten Grade ist, für $x=0$, $y=0$ gleichzeitig die Werthe $+\infty$ und $-\infty$, und es ist gewiss eigenthümlich, dass der eine dieser Werthe zum Vorschein kommt, wenn man zuerst über die y, dann über die x verfügt, und der andere, wenn man umgekehrt verfährt. Unsere Function erhält aber ausserdem noch den Werth 0, wenn $x=0$, $y=0$ wird, und dieser Werth ergibt sich, wenn man y von x oder x von y abhängig macht; setzt man nämlich $y=kx$, so wird dieselbe

$$z=\frac{1-k^2}{(1+k^2)^2}\cdot\frac{1}{x^2},$$

und gibt für $k=1$ und jeden beliebigen Werth von x den Werth $z=0$; man hat also auch $z=0$, wenn $x=0$ und $kx=y=0$ ist. Wie kann man also verlangen, dass das doppelte Integral aus unserer Function von der Ordnung beim Integriren unabhängig bleibe, wenn die Function selbst schon verschiedene Werthe zwischen den Grenzen des Integrals erhält, je nachdem man sie anders behandelt, je nachdem man zuerst dem x oder zuerst dem y einen bestimmten Werth beilegt?

Um jedoch der Sache auf den Grund zu kommen und den Anhängern der Theorie von Cauchy die gänzliche Grundlosigkeit dieser Theorie zu beweisen, wollen wir unsere Untersuchung weiter verfolgen.

Wie schon bemerkt wurde, ist die von Cournot beigebrachte Function nicht die einzige, welche Werthe mit entgegengesetzten Zeichen gibt, wenn man die Ordnung beim Integriren umkehrt; man sieht leicht, dass diess für alle Functionen der Fall sein muss, welche der Form

$$z=\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q}$$

angehören und deren doppeltes Integral zwischen gleichen Grenzen für x und y nicht Null wird; denn man hat offenbar:

(1)

$$\int_{-a}^{+a}dx\int_{-a}^{+a}dy.\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q}=\int_{-a}^{+a}dy\int_{-a}^{+a}dx\frac{(y^m-x^m)^{2p+1}}{(y^{2n}+x^{2n})^q};$$

da aber auch

$$\frac{(y^m-x^m)^{2p+1}}{(y^{2n}+x^{2n})^q}=-\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q},$$

so folgt daraus:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-a}^{+a}dx\int_{-a}^{+a}dy\cdot\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q}\\ =-&\int_{-a}^{+a}dy\int_{-a}^{+a}dx\cdot\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q};\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

wenn demnach diese Integrale einen von Null verschiedenen Werth haben, so besteht auch ein Unterschied, je nachdem man in einer andern Ordnung integrirt, gleichviel ob die Function

$$z=\frac{(x^m-y^m)^{2p+1}}{(x^{2n}+y^{2n})^q}$$

unendlich wird oder nicht zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ für x und y.

Man wird sich nun leicht überzeugen, dass für alle Functionen dieser Art, welche immer Null werden, in welcher Ordnung man x und y nach einander Null setzt, auch der Werth des doppelten Integrals (1) immer Null wird, wodurch die Gleichung (2) unmittelbar befriedigt ist. Diess ist immer der Fall, wenn man hat:

$$m(2p+1)>2nq;$$

denn setzt man $y=kx$ und, um dem Werthe ∞ für k auszuweichen, auch $x=hy$, so wird:

$$z=\frac{(1-k^m)^{2p+1}}{(1+k^{2n})^q}x^{m(2p+1)-2nq}\quad(3)$$

oder

$$z=\frac{(h^m-1)^{2p+1}}{(h^{2n}+1)^q}y^{m(2p+1)-2nq},\quad(4)$$

und demnach z immer Null für $x=0$, $y=0$, da in diesen Ausdrücken k und h nur von -1 bis $+1$ genommen werden dürfen, um alle möglichen Werthe von x und y zu umfassen.

Wird dagegen $m(2p+1)-2nq<0$, so wird aus (3) $z=+\infty$ für $x=0$, so lange $k<1$ ist; man hat dagegen $z=-\infty$, sobald $k>1$, und $z=0$ für jeden Werth von x, sobald $k=1$ genommen

wird; dasselbe ergibt sich aus Gleichung (4), wenn $h > 1$, < 1 oder $= 1$ und $y = 0$ gesetzt wird; für alle Werthe von m, n, p, q, welche der vorstehenden Bedingung entsprechen, zeigt also die Function z einen ganz ähnlichen Gang, wie die von Cournot gewählte, und gibt desshalb auch beim Integriren, ohne Rücksicht auf die Bedeutung des Integrals, Werthe von entgegengesetzten Zeichen, wenn die Ordnung umgekehrt wird.

Hat man endlich $m(2p+1) = 2nq$, so wird z eine Function von k oder $\frac{y}{x}$ und erhält daher für $x=0$, $y=0$ gleichzeitig eine unendliche Menge von Werthen, welche entweder den Werthen von k von $-\infty$ bis $+\infty$ oder den Werthen von k von -1 bis $+1$ und den Werthen von h von $+1$ bis -1 entsprechen, und zwischen den Grenzwerthen

$$z = +1 \text{ für } k = 0,$$

$$z = -1 \text{ für } h = 0$$

enthalten sind; die Function z erhält also für $x=0$, $y=0$ gleichzeitig alle möglichen Werthe von -1 bis $+1$ *), wird aber niemals unendlich. Demohngeachtet geben viele dieser Functionen auf gleiche Weise, wie es oben nach Cournot geschehen ist, integrirt, Werthe von verschiedenen Zeichen, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt.

Nehmen wir, um diess näher zu beleuchten, die einfachste dieser Functionen heraus, nämlich die Function

$$z = c\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \tag{5}$$

und stellen wir uns dieselbe, um uns ihren Gang recht anschaulich zu machen, als Gleichung einer Fläche in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten vor. Die Form

$$z = c\,\frac{1 - k^2}{1 + k^2} = c\,\frac{h^2 - 1}{h^2 + 1}, \tag{6}$$

unter welche dieselbe nach dem Vorhergehenden gebracht werden kann, zeigt sogleich, dass dieselbe von jeder durch die Achse der z gelegten Ebene nach einer zur Ebene der xy parallelen Geraden geschnitten wird, deren Entfernung von dieser Ebene sich

*) Eine ähnliche Function habe ich schon im zweiten Bande meines „Handbuches der Mechanik" in der Anmerkung zu §. 104. S. 243 besprochen.

nur mit der Tangente k des Winkels, welchen die schneidende Ebene mit der Ebene der xz bildet, ändert und immer zwischen $+c$ und $-c$ liegt. Schneiden wir dagegen unsere Fläche durch eine zur Ebene der xy parallele Ebene

$$z = z_1,$$

so zeigt die Eliminations-Gleichung

$$(c + z_1)y^2 = (c - z_1)x^2, \tag{7}$$

dass jede solche Ebene unsere Fläche nach zwei in der Achse der z sich kreuzenden Geraden schneidet, so lange $z_1 < c$ ist; die Ebene der xy selbst, für welche $z_1 = 0$, schneidet dieselbe nach zwei unter sich rechtwinklichen Geraden, welche die Winkel zwischen den Axen der x und y halbiren; für $z_1 = c$ fallen beide Geraden in eine zur Achse der x, für $z_1 = -c$ in eine zur Achse der y parallele Gerade zusammen, längs welcher dann unsere Fläche von der sonst schneidenden Ebene berührt wird. Endlich für $z_1 > c$ wird die Gleichung (7):

$$(z_1 + c)y^2 + (z_1 - c)x^2 = 0,$$

und gibt nur noch imaginäre Werthe für y oder x; die Fläche ist also zwischen den beiden berührenden Ebenen $z = \pm c$ eingeschlossen und enthält das Stück der Achse der z von $z = -c$ bis $z = +c$. Man wird sich durch diese Betrachtung leicht überzeugen, dass unsere Fläche durch eine Gerade erzeugt gedacht werden kann, welche fortwährend zur Achse der z senkrecht bleibt, sich in dieser Axe zwischen $z = -c$ und $z = +c$ auf- und niederbewegt und dabei fortwährend um dieselbe dreht; sie ist also eine Art Schraubenfläche, besteht aber aus zwei rechts- und zwei linksgewundenen symmetrischen Theilen, welche sich in den Ebenen der xz und yz an einander anschliessen, in jener über der Ebene der xy, in dieser unter derselben, so dass die Fläche von der Achse der negativen z aus angesehen in Bezug auf die Achse der y dieselbe Beschaffenheit besitzt, wie von der Achse der positiven z in Bezug auf die Achse der x.

Um ein anschauliches Bild unserer Fläche zu erhalten, darf man dieselbe nur entweder durch eine Kreis-Cylinderfläche

$$x^2 + y^2 = r^2$$

schneiden, und $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$ setzen; man findet dann als Gleichung der Durchschnittscurve oder als Gleichung der Fläche selbst in Cylinder-Coordinaten den Ausdruck:

$$z = c\cos 2\omega, \quad \omega = \tfrac{1}{2}\arccos\frac{z}{c},$$

welcher zeigt, dass, wenn man die erzeugende Gerade sich gleichförmig um die Achse der z drehen lässt, ihre auf- und absteigende Bewegung längs dieser Achse keine gleichförmige sein darf; oder man schneidet, unserm Zwecke besser entsprechend, unsere Fläche durch die vier Ebenen

$$x = +a, \quad x = -a, \quad y = +a, \quad y = -a,$$

wodurch man Taf. VI. Fig. 3. erhält, welche mittels der Gleichungen (6) leicht zu construiren ist und die Coordinaten-Achsen in einer solchen Projection darstellt, dass von den damit zusammenfallenden Kanten eines Würfels die eine halb so gross erscheint als jede der beiden andern.

Nachdem wir auf diese Weise den Gang der Function

$$z = c\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

genügend kennen gelernt und uns überzeugt haben, dass hier für den Werth von z von einem Durchgang durch Unendlich durchaus keine Rede sein kann, so wollen wir das Integral

$$U = c\int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} dy.\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -c\int_{-a}^{+a} dy \int_{-a}^{+a} dx\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

auf dieselbe Weise behandeln, wie es im Eingang mit der von Cournot gewählten Function geschehen ist, und ohne Rücksicht darauf, was dieses Integral bedeuten soll. Man hat

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1,$$

und damit ergibt sich nach und nach:

$$U = c\int_{-a}^{+a} dx.\overset{+a}{\underset{-a}{\Delta_y}}\left(2x\operatorname{arctang}\frac{y}{x} - y\right) = 2c\int_{-a}^{+a} dx\left(2x\operatorname{arctang}\frac{a}{x} - a\right)$$

$$= 2c\overset{+a}{\underset{-a}{\Delta_x}}\left(x^2\operatorname{arctang}\frac{a}{x} - ax\right) + 2c\int_{-a}^{+a} dx.\frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

$$= 2c\overset{+a}{\underset{-a}{\Delta_x}}\left(x^2\operatorname{arctang}\frac{a}{x} - a^2\operatorname{arctang}\frac{x}{a}\right),$$

und wenn man hier beachtet, dass $\operatorname{arctang}\frac{a}{x}$ bei $x = 0$ durch $\frac{1}{2}\pi$ hindurchgeht, dass also

Man würde aber sehr irren, wenn man den oben gefundenen Werth (8) oder (9) von U als das Maass des von unserer Fläche, der Ebene der xy und den vier Ebenen $x=\pm a$, $y=\pm a$ begrenzten Raumes $AZCBDEFHBJEKZ$ (Taf. VI. Fig. 3.) nehmen wollte, und das vorliegende Beispiel macht es gerade recht deutlich, wie nothwendig es ist, beim Integriren auf den in der Einleitung zu meiner Mechanik (I. Bd. S. 113.) aufgestellten Satz Rücksicht zu nehmen, für welchen man in den Beispielsammlungen von Magnus und Sohncke nur die Andeutung findet, dass man nicht durch Null hindurch integriren dürfe, während man in den Lehrbüchern der Integral-Rechnung stillschweigend darüber hinweggeht oder sich mit den von Cauchy erfundenen Schwierigkeiten für den Durchgang durch Unendlich plagt. Ich habe a. a. O. gezeigt, dass der Durchgang durch Unendlich keine grösseren Schwierigkeiten bietet, als der Durchgang durch Null, und dass es auf die Bedeutung, welche einem Integral beigelegt wird, ankommt, ob man durch Null oder Unendlich hindurch integriren darf oder nicht, indem „man in solchen Fällen, wo das Aenderungsgesetz einer Function beim Durchgang durch den Werth Null oder Unendlich das Zeichen ändert, oder wo es mit der Function selbst durch Unendlich geht, ohne das Zeichen zu wechseln, für das bestimmte Integral, dessen Grenzen zu beiden Seiten dieser Werthe liegen, darauf Rücksicht zu nehmen hat, ob die betreffende Grösse ihrem Begriffe nach entgegengesetzte Werthe erhalten kann oder nicht, da im ersten Falle die Integration immer einen richtigen Werth gibt, während man im zweiten Falle (wo man dem Integral die Bedeutung einer Curvenlänge, Fläche u. s. f. unterlegt) das Integral in zwei Theile zerlegen muss, deren gemeinschaftliche Grenze da ist, wo das Aenderungsgesetz Null oder Unendlich wird, und dann ohne Rücksicht auf die Lage der Grenzen den Werth von jedem Theile zu berechnen und deren Summe zu nehmen hat."

Wenden wir diesen Satz, für welchen man a. a. O. den Grund angegeben findet, nun auf unsern vorliegenden Fall an, und integriren wir unsere Function

$$z=c\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

zuerst in Bezug auf y, nehmen also x als unveränderlich an, so erhalten wir durch das Integral

$$\Delta\frac{dV}{dx}=\int dy.c\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

die Oberfläche O_x eines zur Achse der x senkrechten Schnittes $abcdefg$ (Taf. VI. Fig. 3.), von welchem ein Theil cde über der Ebene der xy liegt, während zwei Theile abc und efg unter dieser Ebene liegen und als negative Flächen erscheinen, weil das Aenderungsgesetz

$$z = c\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

für $y=x$ Null wird und das Zeichen wechselt. Wird daher das vorhergehende Integral geradezu zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ genommen, so gibt dasselbe nur den Unterschied zwischen dem Flächeninhalt der oberhalb und der unterhalb liegenden Theile, und man muss, um die ganze Fläche O_x zu erhalten, das Integral in drei Theile zerlegen, von denen der erste von $y=+a$ bis $y=+x$, der zweite von $y=+x$ bis $y=-x$, der dritte von $y=-x$ bis $y=-a$ reicht, so dass man hat:

$$\frac{dV}{dx} = O_x = \int_a^x dy.z + \int_{-x}^{+x} dy.z + \int_{-x}^{-a} dy.z$$

$$= c[\overset{x}{\underset{a}{\Delta_y}}(2x\arctang\frac{y}{x}-y) + \overset{+x}{\underset{-x}{\Delta_y}}(2x\arctang\frac{y}{x}-y)$$

$$+ \overset{-a}{\underset{-x}{\Delta_y}}(2x\arctang\frac{y}{x}-y)]$$

$$= c[(\tfrac{1}{2}\pi-1)x - 2x\arctang\frac{a}{x} + a + (\pi-2)x + (\tfrac{1}{2}\pi-1)x$$

$$-2x\arctang\frac{a}{x} + a]$$

$$= 2c[(\pi-2)x - 2x\arctang\frac{a}{x} + a].$$

Dieser Ausdruck ist nun, wie schon angedeutet, das Aenderungsgesetz unseres Rauminhaltes in Bezug auf die Aenderung der x, er muss also noch in Bezug auf diese Veränderliche von $+a$ bis $-a$ integrirt werden, um den Rauminhalt V zu erhalten; dieser Werth von O_x besteht aber aus drei Gliedern, von denen die beiden ersten mit x Null werden und das Zeichen wechseln, während diess für das dritte nicht der Fall ist; in Betreff der beiden ersten muss also wieder eine Theilung des Integrals eintreten, das letztere dagegen kann sogleich zwischen $+a$ und $-a$ genommen werden, und man erhält so:

$$V=2c\int_0^{+a}dx[(\pi-2)x-2x\,\text{arctang}\frac{a}{x}]$$

$$+2c\int_0^{-a}dx[(\pi-2)x-2x\,\text{arctang}\frac{a}{x}]+2c\int_{-a}^{+a}dx.a,$$

was offenbar, wie es nothwendig sein muss, auf

$$V=2.2c\int_0^{+a}dx[(\pi-2)x-2x\,\text{arctang}\frac{a}{x}+a]$$

hinauskommt und den Werth

$$V=4c\overset{+a}{\underset{0}{\Delta_x}}[\tfrac{1}{2}(\pi-2)x^2-x^2\,\text{arctang}\frac{a}{x}+a^2\,\text{arctang}\frac{x}{a}]$$

$$=4c(\tfrac{1}{2}(\pi-2)a^2-\tfrac{1}{4}\pi a^2+\tfrac{1}{4}\pi a^2)=2(\pi-2)a^2c$$

für den gesuchten Rauminhalt gibt.

Will man nun zuerst in Bezug auf x integriren, also zuerst die Oberfläche O_y eines zur Achse der y senkrechten Schnittes bestimmen, so findet man leicht mit gleicher Berücksichtigung unsers obigen Satzes:

$$O_y=2c\int_y^a dx(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2})+2c\int_y^0 dx(1-\frac{2y^2}{x^2+y^2})$$

$$=2c\overset{+a}{\underset{y}{\Delta_x}}(x-2y\,\text{arctang}\frac{x}{y})+2c\overset{0}{\underset{y}{\Delta_x}}(x-2y\,\text{arctang}\frac{x}{y})$$

$$=2c[a-2y\,\text{arctang}\frac{a}{y}+(\pi-2)y],$$

und damit folgt:

$$V=2.2c\int_0^{+a}dy(a-2y\,\text{arctang}\frac{a}{y}+(\pi-2)y]=2(\pi-2)a^2c,$$

wie vorher. Man kommt übrigens, wie man nun leicht einsehen wird, viel einfacher zu diesem Ergebniss, wenn man nur das Volumen eines der acht symmetrischen Theile berechnet, aus welchen das Ganze besteht, z. B. das des Theiles $AZCXB$, welcher von den Ebenen der xy und xz, der krummen Fläche und von der zur yz parallelen Ebene $x=a$ begrenzt wird. Denn für das Volumen V_1 dieses Theiles hat man einfach:

$$V_1=c\int_0^a dx\int_0^x dy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=c\int_0^a dx.\overset{x}{\underset{0}{\Delta_y}}(2x\,\text{arctang}\frac{y}{x}-y)$$

$$=c\int_0^a dx.(\tfrac{1}{2}\pi-1)x=c\overset{a}{\underset{0}{\Delta_x}}.\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi-1)x^2=\tfrac{1}{4}(\pi-2)a^2c,$$

und erhält damit wieder:

$$V = 8V_1 = 2(\pi - 2)a^2c.$$

Unser Integral gibt also im jetzigen Falle, seiner Bedeutung nach richtig behandelt, denselben richtigen Werth, ob man zuerst in Bezug auf x oder in Bezug auf y integrirt. Der oben für U gefundene Werth (8) oder (9) dagegen hat bezüglich des Rauminhaltes gar keinen brauchbaren Sinn; denn wenn auch der Ausdruck

$$2c\left(2x \operatorname{arctang}\frac{a}{x} - a\right),$$

welcher durch die erste Integration zum Vorschein kommt, noch den Unterschied des Flächeninhaltes der über und unter der Ebene der xy liegenden Theile der Schnittfläche *abcdefg* ausdrückt, so ist doch jener Werth von U weit davon entfernt, den Unterschied der über und unter derselben Ebene liegenden Räume darzustellen, weil wegen des Zeichenwechsels für $x=0$ das Integral aus dem ersten Gliede $2x \operatorname{arctang}\frac{a}{x}$ zwischen $+a$ und $-a$ wieder eine Differenz gibt, während das Integral des zweiten Gliedes a eine Summe zweier Flächen vorstellt, und daher die Function U nach der Multiplication dieser Flächendifferenzen und Flächensummen mit dem constanten Factor $2c$ aus Summen und Differenzen von Rauminhalten so zusammengewürfelt ist, dass sich in Bezug auf den eigentlichen Rauminhalt unseres Körpers, wie bemerkt, kein brauchbarer Sinn herausfinden lässt.

Wenn wir uns nun aber streng an den oben ausgesprochenen Satz halten und unserem doppelten Integral U die Bedeutung einer Grösse unterlegen, welche entgegengesetzte Werthe annehmen kann, so muss dasselbe ohne weitere Zerlegung richtige Werthe geben, und doch besteht noch der Unterschied in Folge einer verschiedenen Ordnung in der Integration. Betrachten wir daher, um diesen Umstand aufzuklären, die gegebene Function als Aenderungsgesetz zweiter Ordnung von der Ordinate z einer Fläche, deren Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten bezogen werden soll, und nehmen wir zu diesem Zwecke gerade die von Cournot gewählte Function, weil diese im jetzigen Falle eine leichtere Anschauung zulässt, als die Function (5). Wir haben dann

$$\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dy} = \frac{d.\frac{dz}{dy}}{dx} = c\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (10)$$

und man wird sich nach den bereits ausgeführten Integrationen

der umgekehrt durch Differenziren leicht überzeugen, dass die einfachste Function, welche der vorstehenden Gleichung genügt, die Form hat:

$$z = c \operatorname{arctang} \frac{x}{y} = c \operatorname{arccot} \frac{y}{x}, \tag{11}$$

dass also die entsprechende Fläche eine gewöhnliche Schraubenfläche ist, erzeugt durch eine Gerade, welche immer senkrecht zur Achse der z gerichtet bleibt, diese Achse immer schneidet und sich sowohl gleichförmig um dieselbe dreht, als auch gleichförmig in ihr fortbewegt, so dass sie immer in derselben Zeit den Weg c in der genannten Achse zurücklegt, in welcher sie sich um die Winkel-Einheit (den Winkel, dessen entsprechenden Bogen seinem Halbmesser gleich ist) dreht. Nach der gewöhnlichen Vorstellung von einer Schraubenfläche ist die obige aber eine Schraube mit doppeltem Gange, da die erzeugende Gerade sich immer zu beiden Seiten der Achse erstreckt*), und gibt daher, durch eine concentrische Cylinderfläche geschnitten, eine doppelte Schraubenlinie, von denen die eine in der positiven, die andere in der negativen Achse der y anfängt. Nehmen wir ferner die gegenseitige Lage der Coordinaten-Achsen in der gewöhnlichen Weise, so dass von der positiven Hälfte der Achse der z aus angesehen die Bewegung von der Achse der positiven x gegen die Achse der positiven y hin im Sinne eines Uhrzeigers stattfindet, so ist unsere Schraubenfläche nach der gewöhnlichen Bezeichnung ein rechtes Schraubengewinde, geometrisch betrachtet aber eine linksgewundene Schraube, wie sie in Taf. VI. Fig. 4. von einer Cylinderfläche geschnitten dargestellt ist. Die Gleichung der Schnittlinie oder auch der Schraubenfläche selbst in Cylindercoordinaten ist

$$z = c(\tfrac{1}{2}\pi - \omega);$$

man muss aber dabei bemerken, dass die Gerade, welche durch diese Gleichung für einen gegebenen Werth von ω bestimmt wird, die Cylinderfläche in zwei Punkten schneidet, dass also diese Gleichung, allgemein betrachtet, ebenso eine doppelte Schraubenlinie, wie eine doppelte Schraubenfläche vorstellt. Diess rührt daher, dass der Fahrstrahl r in dieser Gleichung fehlt und derselbe desshalb eben sowohl positiv, als negativ genommen werden kann.

Untersuchen wir nun die Bedeutung unseres doppelten Integrals:

---

*) Vom geometrischen Standpunkte aus betrachtet ist daher die gewöhnliche eingängige Schraube mit flachem Gewinde nur eine halbe Schraubenfläche.

$$U = \int dx \int dy . c \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

zwischen bestimmten Grenzen in Bezug auf diese Schraubenfläche, indem wir diese Grenzen zuerst allgemein mit x_1 und x_0 für x, mit y_1 und y_0 für y bezeichnen.

Integriren wir zuerst in Bezug auf y, so erhalten wir in dem Ausdrucke

$$\Delta_y . \frac{dz}{dx} = c\left(\frac{y_1}{y_1^2 + x^2} - \frac{y_0}{y_0^2 + x^2}\right)$$

den Unterschied in den Aenderungsgesetzen der Ordinate z in zwei zur Ebene der xz parallelen Schnitten *), welche um die Ordinaten y_1 und y_0 von dieser Ebene entfernt sind, und in zwei Punkten dieser Schnitte, welche denselben Abstand x von der Ebene der yz haben. Bezeichnen wir daher diese Aenderungsgesetze selbst mit

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{y_1} \text{ und } \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y_0},$$

so haben wir für einen beliebigen Werth von x:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{y_1} - \left(\frac{dz}{dx}\right)_{y_0} = c\left(\frac{y_1}{y_1^2 + x^2} - \frac{y_0}{y_0^2 + x^2}\right). \qquad (12)$$

Integriren wir dann diesen Ausdruck in Bezug auf x zwischen den Grenzen x_1 und x_0, so gehen wir in jedem Schnitte von einem Punkte, dessen Abscisse x_0 ist, zu einem zweiten, dessen Abscisse x_1 ist, fort, bestimmen zuerst, den obigen Ausdruck theilweise betrachtend, den Unterschied zwischen den entsprechenden Ordinaten z dieser Punkte und dann durch das ganze Integral den Unterschied zwischen den Unterschieden von zwei Ordinaten in demselben Schnitte; denn man erhält durch diese zweite Integration:

$$\Delta_x . z_{y_1} - \Delta_x . z_{y_0} = c\left(\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_1} - \operatorname{arctang}\frac{x_0}{y_1}\right)$$
$$- c\left(\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_0} - \operatorname{arctang}\frac{x_0}{y_0}\right).$$

Man geht also in dem Schnitte, dessen Entfernung von der Ebene der $xz = y_1$ ist, von dem Punkte $x_1 y_1$, dessen dritte Or-

*) Man vergleiche mein „**Handbuch der Mechanik**" I. Bd. Einleitung. §. 32. u. ff.

dinate $z_{x_1 y_1}$ sei, zu dem Punkte $x_0 y_1$, dessen dritte Ordinate ebenso $z_{x_0 y_1}$ sein wird, über, und in dem Schnitte, dessen Entfernung von der Ebene der $xz = y_0$ ist, von einem Punkte $x_1 y_0$ zu einem Punkte $x_0 y_0$, und bestimmt so einerseits den Unterschied der Ordinaten $z_{x_1 y_1}$ und $z_{x_0 y_1}$, andererseits die Differenz der Ordinaten $z_{x_1 y_0}$ und $z_{x_0 y_0}$, und zuletzt gibt das ganze zweite Integral den Werth des Aggregats:

$$\left.\begin{aligned} &z_{x_1 y_1} - z_{x_0 y_1} - z_{x_1 y_0} + z_{x_0 y_0} = z_{x_1 y_1} + z_{x_0 y_0} - (z_{x_1 y_0} + z_{x_0 y_1}) \\ &= c\left(\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_1} - \operatorname{arctang}\frac{x_0}{y_1} - \operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_0} + \operatorname{arctang}\frac{x_0}{y_0}\right), \end{aligned}\right\} (13)$$

also den **Unterschied zwischen der Summe von je zwei diagonal gegenüberliegenden Ordinaten** z.

Kehren wir nun die Ordnung beim Integriren um, so erhalten wir durch das erste Integral in Bezug auf x in dem Ausdruck

$$\Delta_x \cdot \frac{dz}{dy} = \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x_1} - \left(\frac{dz}{dy}\right)_{x_0} = c\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y^2} - \frac{x_1}{x_1^2 + y^2}\right)$$

den Unterschied der Aenderungsgesetze der Ordinate z in zwei zur Ebene der yz parallelen Schnitten, deren Abstände von dieser Ebene x_1 und x_0 sind, und für zwei Punkte, welche derselben zur xz parallelen Ebene angehören. Die zweite Integration gibt dann mit derselben Bezeichnung wie zuvor den Werth des Aggregats:

$$\Delta_y . z_{x_1} - \Delta_y . z_{x_0} = z_{x_1 y_1} - z_{x_1 y_0} - z_{x_0 y_1} + z_{x_0 y_0} = z_{x_1 y_1} + z_{x_0 y_0} - (z_{x_1 y_0} + z_{x_0 y_1})$$

durch die Function:

$$c\left(\operatorname{arctang}\frac{y_1}{x_0} - \operatorname{arctang}\frac{y_0}{x_0} - \operatorname{arctang}\frac{y_1}{x_1} + \operatorname{arctang}\frac{y_0}{x_1}\right), \quad (14)$$

welche ganz auf den vorhergehenden Werth (13) zurückkommt, wenn man beachtet, dass man hat:

$$\operatorname{arctang}\frac{y}{x} = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctang}\frac{x}{y},$$

oder wenn man beim zweiten Integriren die Beziehung

$$\int dx \cdot \frac{-x_0}{x_0^2 + y^2} = \Delta . \operatorname{arccot}\frac{y}{x_0}$$

anwendet, wodurch man den Ausdruck

$$c\left(\operatorname{arccot}\frac{y_0}{x_0} - \operatorname{arccot}\frac{y_1}{x_0} + \operatorname{arccot}\frac{y_1}{x_1} - \operatorname{arccot}\frac{y_0}{x_1}\right)$$

erhält, welcher mit (13) unmittelbar übereinstimmt.

Unser doppeltes Integral gibt also zwischen allgemeinen Grenzen, wie vorherzusehen war, denselben Werth, ob man in der einen oder in der andern Ordnung integrirt. Dieser Integration liegt aber stillschweigend eine bestimmte Voraussetzung zu Grunde, welche eigentlich nie übersehen werden darf, die aber namentlich in unserm vorliegenden Falle wegen der Vielwerthigkeit der Function $\operatorname{arctang}\frac{x}{y}$ besonders zu beachten ist. Es müssen nämlich die vier Punkte x_1y_1, x_1y_0, x_0y_1, x_0y_0 so auf der Fläche gewählt werden, dass man in jedem der vier Schnitte durch die Ebenen

$$x = x_1, \quad x = x_0, \quad y = y_1, \quad y = y_0$$

von einem dieser Punkte zum andern eine stetige Curve erhält, dass diese Schnitte also in der Fläche ein krummliniges Viereck bilden, wie *ABDC* (Taf. VI. Fig. 4.); denn nur unter dieser Voraussetzung eines stetigen Ueberganges nach jeder Richtung hin können die Aenderungsgesetze zweiter Ordnung

$$\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dy} \text{ und } \frac{d.\frac{dz}{dy}}{dx}$$

in der ganzen Ausdehnung des Integrals gleich bleiben, nur unter dieser Voraussetzung kann also auch die Integration denselben Werth geben, wenn man die Ordnung beim Integriren ändert, und nur unter dieser Voraussetzung hat das doppelte Integral einen bestimmten Sinn.

Diese Voraussetzung wird nun aber verletzt, wenn man die vier Punkte, beziehungsweise ihre Projectionen, in der Ebene der xy so wählt, dass das von diesen gebildete Rechteck *abfe* (Taf. VI. Fig. 4.) den Anfangspunkt oder die Achse der Schraubenfläche einschliesst; denn es ist dann unmöglich, von jedem der vier Punkte *A*, *B*, *F*, *E*, oder *B*, *F*, *E*, *A'*, oder *F*, *E*, *A'*, *B'*, u. s. f. auf den nachfolgenden stetig überzugehen; man kommt nicht mehr von *E* auf *A* oder nicht mehr von *A'* auf *B* zurück; das krummlinige Viereck *ABFE* oder *BFEA'* schliesst sich also nicht mehr und der allgemeine Ausdruck (13) für unser doppeltes Integral gibt keinen bestimmten einfachen Werth mehr, sondern einen doppelten. Denn nimmt man diesem Fall entsprechend einfach $x_0 = -x_1$, $y_0 = -y_1$, und bezieht den genannten Ausdruck auf die vier Punkte *A*, *B*, *E*, *F*, so hat man offenbar:

$$\text{für } A\ z_{x_1y_1}=c\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_1},\quad \text{für } F\ z_{x_0y_0}=c\operatorname{arctang}\frac{-x_1}{-y_1},$$

$$\text{für } B\ z_{x_1y_0}=c\operatorname{arctang}\frac{x_1}{-y_1},\quad \text{für } E\ z_{x_0y_1}=c\operatorname{arctang}\frac{-x_1}{y_1};$$

oder, wenn man unter $\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_1}=\alpha$ nur einen Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ versteht, bestimmter ausgedrückt:

$$z_{x_1y_1}=c\alpha,\ z_{x_1y_0}=c(\pi-\alpha),\ z_{x_0y_0}=c(\pi+\alpha),\ z_{x_0y_1}=c(2\pi-\alpha),$$

und damit wird:

$$U=z_{x_1y_1}+z_{x_0y_0}-(z_{x_1y_0}+z_{x_0y_1})=-(2\pi-4\alpha)c. \quad (15)$$

Versteht man dagegen unter dem Punkte, dessen Projection in der Ebene der xy durch die Coordinaten $x=+x_1$, $y=+y_1$ bestimmt wird, den Punkt A', so hat man

$$z_{x_1y_1}=c\operatorname{arctang}\frac{x_1}{y_1}=c(2\pi+\alpha)$$

zu nehmen, und findet damit

$$U=4\alpha c. \quad (16)$$

Die Function U erhält also in diesem zweiten Falle einen wesentlich anderen Werth als im ersten, nicht blos einen von entgegengesetztem Zeichen, und man sieht leicht, dass die von Cournot angenommenen Grenzen $+1$ und -1 für x und y nur einen besonderen Fall der vorhergehenden Annahme darstellen und dass man dafür überhaupt $x_1=y_1$ setzen kann, wodurch man $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ und

$$U=-\pi c \text{ oder } =+\pi c$$

findet, je nachdem man den Punkt A oder A' wählt. Auch wird man leicht einsehen, dass der Unterschied in den Werthen von U immer $=2\pi c$ oder gleich der Höhe eines Schraubenganges sein muss.

Mit diesem Unterschiede nach der Wahl der Punkte A oder A' steht aber die Ordnung in der Integration in einfachem Zusammenhange. Integrirt man zuerst in Bezug auf x, so macht man gleichsam die Schnitte AB und EF oder $A'B'$ und EF und bestimmt darin den Unterschied der Aenderungsgesetze von z in Bezug auf y in den Punkten B und F oder B' und F; dann geht

man bei der zweiten Integration in Bezug auf y von diesen Punkten aus längs jener Schnitte im Sinne der positiven y fort, und kommt dadurch nothwendig von B nach A oder von B' nach A' und von F nach E und erhält so für U immer den Werth (15) $-(2\pi-4\alpha)c$, wie man sich leicht überzeugen wird, wenn man für A' und B' die entsprechenden Werthe

$$z_{x_1y_1}=c(2\pi+\alpha),\quad z_{x_1y_0}=c(3\pi-\alpha)$$

in die Gleichung (13) einführt. Integrirt man dagegen zuerst in Bezug auf y, so bestimmt man zuerst den Unterschied der Aenderungsgesetze von z in Bezug auf x in den Schnitten AE und BF, oder ähnlichen, und zwar in zwei entsprechenden Punkten E und F; dann geht man bei der zweiten Integration in Bezug auf x von E und F aus im Sinne der positiven x fort, wodurch man nothwendig von E nach A', von F nach B kommen und für U den Werth (16) $=4\alpha c$ erhalten muss. Man hat es also dabei gar niemals mit dem Punkte, dessen Coordinaten $x=0$, $y=0$ sind, zu thun, und es ist ganz gleichgültig, was für einen Werth das Aenderungsgesetz zweiter Ordnung $\frac{d^2z}{dxdy}$ in diesem Punkte erhält.

Ganz ähnliche Verhältnisse finden auch bei der Fläche statt, welche durch die Gleichung:

$$z=\frac{1}{c}(x^2\operatorname{arctang}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctang}\frac{x}{y})\tag{17}$$

dargestellt wird, und von welcher die von mir gewählte Function

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

das Aenderungsgesetz zweiter Ordnung in Bezug auf x und y ausdrückt. Denn man zieht aus (17) zuerst die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{c}(2x\operatorname{arctang}\frac{y}{x}-y),\quad \frac{dz}{dy}=\frac{1}{c}(x-2y\operatorname{arctang}\frac{x}{y}),$$

und daraus folgt:

$$\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dy}=\frac{d.\frac{dz}{dy}}{dx}=\frac{1}{c}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Auch diese Fläche besteht aus einer unendlichen Anzahl spiralförmiger Windungen, welche niemals in sich selbst zurückkehren, sondern die Achse immer enger umschliessen, dabei aber

immer durch den Anfangspunkt gehen, so dass z immer Null ist für $x=0$ und $y=0$. Man überzeugt sich davon, wenn man die Gleichung (17) zuerst auf die Form bringt:

$$cz=(x^2+y^2)\operatorname{arctang}\frac{y}{x}-\tfrac{1}{2}\pi y^2 \qquad (18)$$

und sie dann auf Cylinder-Coordinaten bezieht, indem man x^2+y^2 durch r^2, x durch $r\cos\omega$, y durch $r\sin\omega$ ersetzt, wodurch sie die Form

$$cz=r^2(\omega-\tfrac{1}{2}\pi\sin^2\omega)$$

annimmt. Diese Gleichung zeigt, dass z für $r=0$ immer Null ist, dass z aber für ein constantes r mit ω wächst, dass also eine Cylinderfläche vom Halbmesser r von unserer Fläche nach einer schraubenförmig aufsteigenden Spirale geschnitten wird. Schneiden wir dieselbe dagegen durch eine zur Ebene der xy parallele Ebene im Abstande $z=c$ von dieser letzteren, so zeigt die Gleichung

$$r=\pm\frac{c}{\omega-\frac{1}{2}\pi\sin^2\omega},$$

dass die Projection der Schnittcurve in der Ebene der xy eine gegen den Anfangspunkt convergirende Spirale ist, welche für jeden Umgang acht schwache Aus- und Einbiegungen besitzt. Endlich dürfte noch zu erwähnen sein, dass die Gleichung (18), wenn $y=kx$ gesetzt wird, die Form

$$cz=x^2[(1+k^2)\operatorname{arctang}k-\tfrac{1}{2}\pi k^2]$$

erhält; sie zeigt so, dass jede durch die Achse der z gelegte Ebene unsere Fläche nach einer unendlichen Anzahl von Parabeln schneidet, welche alle die Achse der z zur gemeinschaftlichen Achse und den Anfangspunkt als gemeinschaftlichen Scheitel haben; von einer Kugelfläche begrenzt, bildet demnach diese Fläche gleichsam einen spiralförmig gefüllten Blumenkelch und ist gewiss eine sehr interessante Erscheinung unter den geometrischen Flächen. Für unsern jetzigen Zweck genügt es, sich aus dieser Darstellung zu überzeugen, dass auch hier vier Punkte, deren Projectionen in der Ebene der xy den Anfangspunkt einschliessen, nicht nach einander folgend durch ein krummliniges Viereck verbunden werden können, und dass davon die Verschiedenheit in den Werthen des Integrals

$$U=\int_{-a}^{+a}dx\int_{-b}^{+b}dy\cdot\frac{1}{c}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

herrührt, wenn man in anderer Ordnung integrirt, gerade wie im vorhergehenden Falle, obgleich hier die Ordinate z für $x=0$, $y=0$ immer den bestimmten Werth Null hat und das Aenderungsgesetz

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{1}{c}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

immer endliche und reelle Werthe behält.

Die Ursache für den Unterschied in den Werthen eines doppelten Integrals muss demnach in der Beschaffenheit der Integralfunction selbst gesucht werden, darin, dass das unbestimmte Integral für denselben Werth der Veränderlichen mehrere Werthe erhalten, und dass man daher für dieselben Grenzwerthe der unabhängigen Veränderlichen verschiedene Combinationen von entsprechenden Werthen des Integrals bilden kann. Wenn übrigens ein solches Integral, welches der durch die Formel (1) bezeichneten Klasse angehört, und für welches sich verschiedene Werthe ergeben, in der Anwendung vorkommen sollte, so werden die näheren Umstände, welche mit der Bedeutung des Integrals verbunden sind, unter Berücksichtigung unsers obigen Satzes immer auf den richtigen Werth führen. Dagegen ist das von Cauchy benutzte und auch von Anderen nachgeahmte Verfahren, den Durchgang durch Unendlich dadurch zu umgehen, dass man sogenannte verschwindende Grössen einschiebt, und statt direct zwischen $+x_1$ und $-x_1$ zu integriren, zwischen $+x_1$ und $+\varepsilon$, dann zwischen $-\varepsilon$ und $-x_1$ integrirt, nicht nur gänzlich zwecklos, sondern führt auch zu ganz falschen Ergebnissen. Zerlegt man z. B. das Integral

$$U=\int_{-1}^{+1}dx\int_{-1}^{+1}dy\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

zuerst in

$$U=\int_{-1}^{+1}dx\left(\int_{+\varepsilon}^{+1}dy\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\int_{-1}^{-\varepsilon}dy\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

und dann in *)

*) Man wende hier nicht ein, dass die zweite Zerlegung überflüssig sei, weil das erste unbestimmte Integral $\frac{y}{x^2+y^2}$ nicht mehr unendlich wird zwischen den Grenzen $+1$ und -1 für x; die Function $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ wird auch nicht unendlich zwischen den Grenzen $+1$ und -1 für y, so

$$U=\int_{+\delta}^{+1} dx\left(\int_{+\varepsilon}^{+1} dy.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\int_{-1}^{-\varepsilon} dy.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$+\int_{-1}^{-\delta} dx\left(\int_{+\varepsilon}^{+1} dy.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\int_{-1}^{-\varepsilon} dy.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

so ergibt sich nach und nach:

$$U=2\int_{+\delta}^{+1} dx.\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\right)+2\int_{-1}^{-\delta} dx.\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\right)$$

$$=4(\tfrac{1}{4}\pi-\operatorname{arctang}\delta-\operatorname{arctang}\frac{1}{\varepsilon}+\operatorname{arctang}\frac{\delta}{\varepsilon}).$$

Lässt man zuerst $\varepsilon=0$ werden und dann δ, so wird

$$U=\pi,$$

wie bei der unmittelbaren Integration; setzt man aber zuerst $\delta=0$ und dann $\varepsilon=0$, so erhält man:

$$U=-\pi:$$

macht man endlich $\delta=\nu\varepsilon$ und setzt dann $\varepsilon=0$, so folgt:

$$U=4\operatorname{arctang}\nu-\pi,$$

worin nun ν alle möglichen Werthe annehmen kann. Mit solchen Künsteleien kann man also allerlei herausbringen, selbst die grössten Widersprüche, wie ich schon in der Einleitung zu meiner „Mechanik" gezeigt habe, nur nicht viel Brauchbares, wenigstens nie mehr als auf gewöhnlichem einfachen Wege gefunden wird.

Durch die vorhergehenden Erörterungen wird, in Verbindung mit dem, was ich in der Einleitung zu meiner Mechanik über die Integrale gesagt habe, zur Genüge dargethan sein, dass es doch endlich an der Zeit sein dürfte, sich von der mangelhaften Vorstellung und der einseitigen Bedeutung, welche man bisher mit den Integralen zu verbinden pflegte, loszureissen und einer allge-

---

lange x unbestimmt bleibt, wie es für die erste Integration doch in der That der Fall ist, und offenbar haben die Werthe $x=0$ und $y=0$ gleichen Antheil am Unendlichwerden der letzteren Function. Jedenfalls kann nach der Theorie von Cauchy diese zweite Zerlegung nicht nachtheilig sein.

meinen anschaulichen Bedeutung der Integrale mehr Rücksicht zuzuwenden, als der viel verarbeiteten Unterbrechung der Stetigkeit, zu welcher indessen der Durchgang durch Unendlich nicht einmal gerechnet werden kann; man sollte doch endlich einmal zur Einsicht kommen, dass für geschlossene Integralausdrücke die geträumten Schwierigkeiten beim Durchgang durch Unendlich nicht im Mindesten grösser sind, als die für den Durchgang des Aenderungsgesetzes durch Null, und dass diese Schwierigkeiten, wenn man sie noch so nennen darf, nur an der Bedeutung des Integrales haften, endlich, was hier noch besonders hervorzuheben bleibt, dass nicht der geringste vernünftige Grund vorhanden ist, wegen eines besonderen Werthes, welchen das Aenderungsgesetz zweiter oder höherer Ordnung für gleichzeitige bestimmte Werthe sämmtlicher oder mehrerer unabhängiger Veränderlichen annimmt, einen Zweifel in Betreff des Werthes des entsprechenden mehrfachen Integrals zu hegen, da man es bei jeder einzelnen Integration immer nur mit einer Veränderlichen zu thun und, wenn es die Bedeutung dieses Integrals erfordert, darauf zu achten hat, ob und wo das Aenderungsgesetz dieses Integrals zwischen seinen Grenzen Null oder unendlich wird, indem dabei die übrigen Veränderlichen, in Bezug auf welche nachher noch integrirt werden soll, ganz allgemeine Werthe behalten, während die Veränderlichen, in Bezug auf welche bereits integrirt worden ist, entweder durch bestimmte Werthe oder durch Functionen der neuen Veränderlichen ersetzt sind; jedes Integral ist Aenderungsgesetz für das zunächst in Bezug auf eine andere Veränderliche auszuführende; es hat eine ganz andere Form und eine ganz andere Bedeutung als das frühere Aenderungsgesetz; es kann desshalb für die Integration gar nie in Frage kommen, was ein Aenderungsgesetz höherer Ordnung in Bezug auf mehrere unabhängige Veränderliche für gleichzeitig festgesetzte Werthe dieser letztern werden mag, oder irgend ein Zweifel über den Werth eines mehrfachen Integrals entstehen, wenn jenes Aenderungsgesetz für solche gleichzeitig bestimmte Werthe der Veränderlichen einen besonderen Werth erhalten sollte.

Während man früher den Fehler beging, unbegrenzte Reihen, welche nur analytische Nothbehelfe zur annähernden Darstellung oder Berechnung einer Function sind, einer geschlossenen Function gleichzustellen, ist man in Betreff der Integrale in den entgegengesetzten Fehler verfallen, indem man auch die Integrale in geschlossenen Ausdrücken auf den Rang von Näherungswerthen oder endlosen Reihen herabgezogen hat, weil man sich eben nicht von der Vorstellung trennen konnte, dass im

Integral eine Summe sein müsse, und zwar eine Summe einer unendlichen Anzahl von Nullen oder vielmehr einer unendlichen Anzahl von Gliedern, deren Werth zwischen Etwas und Nichts gleichsam in der Mitte schweben und weder das eine noch das andere sein sollte. Für die angenäherte Integration muss man sich allerdings mit Reihen und Summen behelfen, und ist dann allerdings auf solche Grenzen beschränkt, zwischen denen sich auf dem eingeschlagenen Wege noch angenäherte Werthe darstellen lassen; man rechnet dann aber immer mit der ganz bestimmten sehr kleinen Grösse Δx oder $\frac{b-a}{n}$, worin n eine bestimmte sehr grosse ganze Zahl bedeutet; mit einer sogenannten unendlich kleinen Grösse, welche nicht Nichts und nicht Etwas ist (und diese liegt doch auch dem Cauchy'schen Begriffe des Integrals zu Grunde) hat noch Niemand gerechnet und wird Niemand rechnen; sie ist eine blosse Fiction, mit welcher sich die Mathematiker nur zu lange schon getragen haben.

Die höhere Analysis, namentlich die Theorie der Integralrechnung, ist viel einfacher, als sie bisher dargestellt worden; aber das Einfache bleibt immer das, was am spätesten gefunden, und, wenn sich einmal gewisse Ansichten eingenistet haben, am schwersten erkannt wird.

Nachschrift des Herausgebers.

Dem Wunsche des Herrn Verfassers, vorstehenden Aufsatz im Archive abdrucken zu lassen, habe ich gern entsprochen, ohne dass daraus der Schluss gezogen werden darf, dass ich alle darin ausgesprochenen Ansichten zu den meinigen mache. G.

XXX.

Über das allgemeine Niveau der Meere.

Von
Herrn Professor und Director [illegible] Littrow
in Wien.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Mittelländisches Meer höher als adriatisches um 0.04 Toisen.

Aus der Triangulation der Pyrenäen zwischen Perpignan und Bayonne fand Coraboeuf [1]), im allgemeinen übereinstimmend mit älteren Bestimmungen von Delambre [2]):

Atlantischer Ocean höher als mittelländisches Meer um 0.46 T.

Das während der französischen Occupation eines Theiles von Deutschland unter Delcros von Frankreich aus bis Darmstadt geführte und später durch deutsche Geometer über Westphalen, Preussen und die Niederlande bis Amsterdam fortgesetzte trigonometrische Nivellement [3]) ergab:

Nordsee höher als atlantischer Ocean und Mittelmeer um 0.10 T.

oder nach Obigem:

Nordsee tiefer als atlantischer Ocean um 0.13 T.

Der Höhenunterschied zwischen Nord- und Ostsee kann nicht als festgestellt angesehen werden, so lange die betreffenden Ergebnisse der schleswig-holsteinischen Vermessungen nicht bekannt gemacht sind, was nach einer Nachricht, die ich vom Herrn Professor Olufsen in Kopenhagen erhalten, erst in einigen Jahren geschehen dürfte. Einstweilen erfreut sich die gegenwärtig gangbare, aus der Nivellirung des Holsteiner Canales [4]) abgeleitete Angabe:

Ostsee höher als Nordsee um 8 Par. Fuss oder 1.3 T.

noch des meisten Anscheines von Bürgschaft. Diese auffallend grosse Höhen-Differenz hat übrigens gerade bei zwei so vielfältig zusammenhängenden Meeren sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich. In der That wurde dieselbe auch früher, z. B. nach einer Zusammenstellung von Woltmann [5]), nur zu 1 F. 2 Z. in gleichem Sinne wie oben angenommen, während aus der durch die österreichisch-russische Verbindungs Triangulation gebotenen Anknüpfung des adriatischen Meeres mit der Ostsee [6]) unter Zugrundelegung obiger Daten für die Niveau-Unterschiede vom adriatischen,

---

1) Description géométrique de la France. Tome I. p. 334.

2) Annales de Chimie et de Physique. Tome I. p. 65.

3) Bulletins des Séances de la Classe des Sciences de l'Académie R. de Bruxelles. Année 1851. p. 355.

4) Poggendorff's Annalen der Physik. Band XVIII. Seite 131.

5) Poggendorff's Annalen der Physik. Band II. Seite 446.

6) Siehe den oben citirten Bericht Seite 11.

Mittelmeer, atlantischen Ocean und Nordsee sich ergibt: Ostsee tiefer als Nordsee um 1.86 T., was ich nur anführe, um die völlige Unsicherheit zu zeigen, welche auf diesem Punkte noch herrscht, ohne einer auf so wenig natürliche Weise abgeleiteten Zahl irgend weitere Wichtigkeit beilegen zu wollen. Eine vorläufige Entscheidung hierüber wird uns die in kurzem zu erwartende Veröffentlichung der aus der schwedisch-russischen Vermessung folgenden Niveaudifferenz zwischen dem botnischen und dem Eismeere geben.

Für das letzte Glied der ganzen um Europa laufenden Kette von Meereshöhen bleibt, da eine unmittelbare Verbindung des schwarzen Meeres mit dem Mittelmeere noch gänzlich fehlt, eben nur das Resultat des trigonometrischen, durch General-Lieutenant v. Tenner in Russland ausgeführten, an sich gewiss vortrefflichen, aber durch seine grosse Ausdehnung immerhin gefährdeten Nivellement [1]) von Memel bis an die Donau-Mündungen:

Ostsee höher als schwarzes Meer um 0.53 T.,

wodurch frühere, übrigens immer bezweifelte Vermuthungen einer besonders tiefen Lage des baltischen gegen das azowsche Meer völlig widerlegt werden.

Fasst man sämmtliche gegebene Zahlen zusammen und bezieht man alles auf einen und denselben Spiegel, z. B. den des atlantischen Oceans, so findet man:

Mittelmeer	tiefer	als	atlantischer	Ocean	um	0.46 T.
Adriatisches Meer	„	„	„	„	„	0.50 „
Nordsee	„	„	„	„	„	0.13 „
Ostsee	höher	„	„	„	„	1.2 „
Schwarzes Meer	„	„	„	„	„	0.7 „

wobei zu bemerken ist, dass beide letzte durch ihre verhältnissmässige Grösse hervortretende Daten auf der unsicheren Differenz zwischen Nord- und Ostsee beruhen.

Bedenkt man übrigens, dass auch die verlässlichsten unter diesen Daten durch Operationen gefunden sind, die oft Hunderte von Meilen zurückzulegen hatten, so kann man obige Zahlen überhaupt nicht eigentlich als streng nachgewiesene und wirklich bestehende Niveau-Unterschiede der genannten Meere betrachten,

---

[1]) Bulletin de la Classe Physico-Mathématique de l'Académie I. des Sciences de St. Pétersbourg. Tome XI. p. 132.

sondern es dient solche Uebersicht mehr, zu zeigen, dass wir bis jetzt keinen Grund haben, irgend bedeutendere Höhenunterschiede zwischen den mittleren Spiegeln der verschiedenen europäischen Meere anzunehmen.

Noch vor ganz kurzer Zeit wäre einer Verallgemeinerung solcher Annahme auf alle unter einander communicirenden Meere hauptsächlich die bis dahin adoptirte Höhe des rothen Meeres im Wege gestanden. Heute besteht dieser Widerspruch nicht mehr. Da die einzige hierüber existirende amtliche Quelle [1]), so viel mir bekannt, nur als Manuscript gedruckt und sehr selten ist — ich verdanke deren endliche Auffindung der Gefälligkeit des Herrn Ministerialrathes v. Negrelli — so sehe ich mich bemüssigt, die wichtigsten Momente aus der neuesten Geschichte dieser oft besprochenen geographischen Frage in Kürze mitzutheilen.

Bis vor etwa fünf Jahren hatten die Resultate der Nivellirung, welche unter J. M. Lepère im Jahre 1799, bei Gelegenheit von Napoleon's Expedition nach Aegypten, vorgenommen wurde, volle Geltung. Diese Arbeit war mitten unter den Wechselfällen des Krieges, eilig, ohne alle Controle und mit einer mehrmonatlichen Unterbrechung ausgeführt worden, indessen hatten die Geschicklichkeit der dabei verwendeten Geometer, die Uebereinstimmung ihrer Ergebnisse mit Schriftstellern des Alterthums und andere Umstände lange Zeit hindurch den Glauben an die Richtigkeit jener Resultate unerschüttert erhalten. Bei näherer Betrachtung aber musste man sich gestehen, dass der aus dem Nivellement von 1799 folgende Höhenunterschied von mehr als 9 Mètres für zwei etwa 16 deutsche Meilen von einander entfernte Meere auf keine Weise zu erklären sei. Den herrschenden Winden, welche eine lange Weile als die plausibelste Ursache jener Niveaudifferenz galten, konnte dieselbe nicht zugeschrieben werden, da sich bei genauerer Untersuchung zeigte, dass diese beständigen Winde im rothen Meere von Norden wehen und also gerade das Gegentheil des hier gefundenen Resultates (rothes Meer höher als Mittelmeer) hätten bewirken müssen. In Folge dieser Zweifel vereinigten sich endlich im Jahre 1847, wo das alte Project eines Durchstiches der Landenge von Suez wieder auftauchte, drei Brigaden von Ingenieuren, eine englische unter R. Stephenson, eine österreichische unter Negrelli und eine französische

---

[1]) Société d'études de l'isthme de Suez, travaux de la brigade française. Rapport de l'ingénieur, 1847. Auszüge dieses Berichtes findet man in Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome XXXI. pag. 484. und XXXVII. p. 81.

unter Talabot zu umständlicher Terrain-Erforschung des Isthmus. Die beiden erstgenannten hatten die Aufgabe, die Küsten am mittelländischen und rothen Meere aufzunehmen, die letzte sollte das Innere des Landes untersuchen. Die Ausrüstung dieser französischen Brigade, die ihre Operationen unter unmittelbarer Leitung von Bourdaloue am 25. September 1847 begann und am 6. Januar 1848 schloss, war eben so vortrefflich, als das ganze Verfahren umsichtig und Vertrauen verdienend. Die Messungen waren so angeordnet, dass sie sich stets selbst controlirten und überdies wurde das ganze Nivellement durch eine beiläufige Wiederholung geprüft und richtig befunden.

Es ergab sich bei mittlerem Spiegel:

Rothes Meer bei Suez höher als Mittelmeer bei Tineh um 0.80 Mètres oder 0.41 T.,

somit auch hier ein so zu sagen unmerklicher Niveau-Unterschied. Dieses überraschende Ergebniss veranlasste eine genaue Untersuchung des Nivellement von 1799, und es gelang, mit voller Evidenz die Ursachen nachzuweisen, welche dessen so sehr abweichendes Resultat hervorgerufen hatten. Der Vollständigkeit wegen führe ich noch an, dass wenn man die Fluthhöhen von Alexandrien und Tineh gleich voraussetzt, woran wohl nicht gezweifelt werden kann, die grössten Höhen-Differenzen beider Meere sich stellen wie folgt:

Höchste (Aequinoctial-)Fluth bei Suez höher als bei Tineh um 1.22 T.
Niederste Ebbe „ „ tiefer „ „ „ „ 0.23 „

so dass sogar diese vorübergehenden Niveau-Unterschiede in ihrem grössten Werthe kaum das Viertheil der früher für die mittleren Spiegel behaupteten, also für beständig gehaltenen Differenz erreichen. Nach einer Mittheilung von Breton [1]) hat Linant de Bellefonds, Generaldirector der Strassen- und Brückenbauten in Aegypten, mit den von Bourdaloue zurückgelassenen Instrumenten vor kurzem das Nivellement zwischen diesen beiden Meeren neuerdings und zwar wieder so vorgenommen, dass die Operation in allen ihren Theilen controlirt war. Das Resultat stimmt mit dem Obigen auf 0.18 Mètres, um welche Grösse nämlich Linant das rothe Meer niedriger als Bourdaloue fand. Ebenso unerheblich waren die Abweichungen von den früheren Ergebnissen für mehrere andere Punkte der Landenge. Da auf diese Art

[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Tome XXXVII. p. 281.

jene Niveaudifferenz gleichsam fünfmal bestimmt wurde, so kann man von den Einwürfen, welche Favier [1]) nicht auf eigentliche Messungen, sondern auf blosse Conjecturen hin gegen das Nivellement von 1847 neuerlich vorgebracht, wohl kaum eine wesentliche Aenderung erwarten.

Nicht in gleicher Weise sicher abgeschlossen ist eine Frage, die man bei Beschäftigung mit diesem Gegenstande kaum übergehen kann, nämlich der Niveau-Unterschied zwischen stillem und atlantischem Ocean. Lloyd und Falmarc [2]), die 1829 im Auftrage von Bolivar die Landenge von Panama erforschten, fanden durch eine, eigentlicher Controle entbehrende, aber wie es scheint mit grosser Vorsicht angestellte Nivellirung von etwa 19 deutschen Meilen Länge:

Stilles Meer höher als atlantisches um 0.55 T.

Aus einem im Auftrage des damaligen französischen Ministeriums der auswärtigen Angelegenheiten (Guizot) von Courtines 1843 ausgeführten Nivellement [3]), welches von N. Garella zwar nicht vollständig wiederholt, aber wenigstens zum Theile controlirt und bestätigt wurde, ergab sich:

Stilles Meer höher als atlantisches um 1.49 T.

Die Abweichung dieses Resultates vom Lloyd'schen schreibt Garella hauptsächlich der Unsicherheit in der Bestimmung des mittleren Spiegels im stillen Meere zu. Auch Chevalier bestreitet die von Lloyd angenommene Fluthhöhe des stillen Oceans, findet dieselbe aber zu hoch, was obige Abweichung beider Messungen noch vergrössern würde. Legt man einstweilen für das stille Meer das Mittel dieser beiden Bestimmungen zu Grunde und bezieht man wieder obige Angabe für das rothe Meer auf den atlantischen Ocean, so hat man folgende Ergänzungen zu der früheren Zusammenstellung:

Rothes Meer tiefer als atlantisches Meer um 0.05 T.
Stiller Ocean höher „ „ „ „ 1.02 „

---

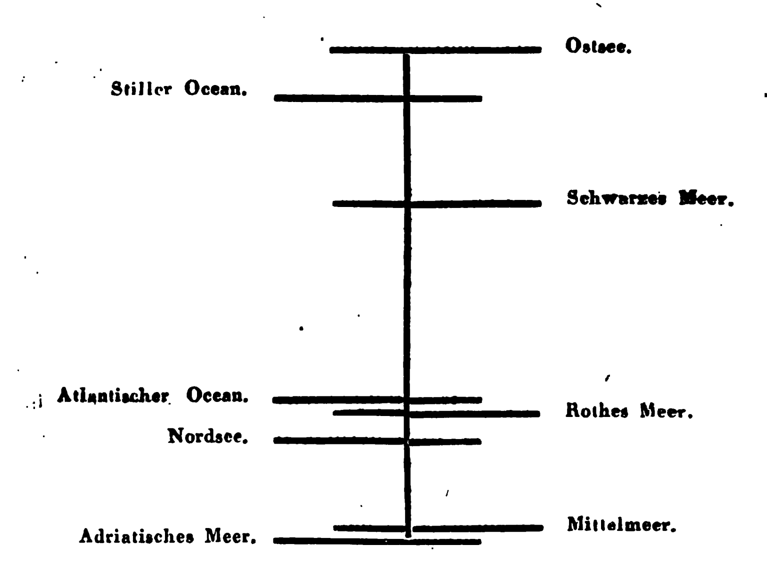
[1]) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. Tome XXXVII, p. 78. und Moigno, Kosmos, Vol. III. p. 340.

[2]) M. Chevalier, l'isthme de Panama, Paris 1844, p. 112. und London Philos. Transactions 1830, p. 63.

[3]) N. Garella, projet d'un canal de jonction de l'océan pacifique et de l'océan atlantique à travers de l'isthme de Panama, Paris 1845, pag. 81.

Grössen, die wieder innerhalb der zu erwartenden Beobachtungsfehler liegen. Ich habe übrigens **Humboldt's** bekannte barometrische Bestimmung [1]), wornach das stille Meer um 3 Mètres **tiefer** als das atlantische läge, hier absichtlich nicht mit in Rechnung gezogen, da nach ihres berühmten Urhebers eigenem Urtheile diese Bestimmung eben nur die Kleinheit dieses Niveau-Unterschiedes ganz im Allgemeinen zu zeigen im Stande war.

Nachstehende graphische Zusammenstellung (1.45 P. Z. = 1 T.) diene zur Verdeutlichung des Ganzen.



Man sieht hier auf den ersten Blick, dass die beiden unsichersten Bestimmungen (Ostsee und stiller Ocean), so wie die von der ersten derselben abhängige Messung des schwarzen Meeres sich am meisten von den übrigen, genauen Daten entfernen, die, was wohl zu beachten, ganz nahe an einander fallen.

Wir können demnach den oben aufgestellten Satz, dass wir bisher völlig entscheidender Gründe entbehren, bei den europäischen Meeren irgend bedeutendere bleibende Höhen-Differenzen anzunehmen, so weit unsere heutige Erfahrung reicht, auf alle mit einander communicirenden Meere überhaupt ausdehnen.

---

[1]) A. de **Humboldt** et A. **Bonpland**, voyage aux régions équinoxiales du nouveau continent. Tome III. p. 556.

Ueberblickt man das hier Vorgetragene, so findet man, dass wir in der Kenntniss dieses Gegenstandes etwa seit denselben Arago [1]) vor nun kaum zwei Decennien, bei Gelegenheit einer anderen Untersuchung behandelte, bedeutende Fortschritte gemacht haben: das adriatische Meer ist mit dem mittelländischen, so wie baltischen, dieses mit dem schwarzen Meere, das rothe Meer mit dem Mittelmeere genau verbunden, zwischen stillem und atlantischem Ocean eine neue Messung ausgeführt worden. Alle diese Fortschritte aber haben im allgemeinen auf eine Verminderung der bisher angenommenen Niveau-Differenzen (in der grössten gegenseitigen Excedenz der einzelnen Meere etwa von 6 auf 1.5 T.) geleitet und somit unseren Ansichten eine und dieselbe Richtung gegeben, das sicherste Zeichen, dass wir auf dem Wege zur Wahrheit sind. Und so dürfen wir zuversichtlich erwarten, in nächster Zukunft die lang gehegte, auf unrichtige Beobachtung hin gefasste Meinung von sehr ungleichen Spiegelhöhen verschiedener Meere, an der man um so fester gehalten zu haben scheint, je weniger von vornherein irgend klare Gründe zu ihren Gunsten sprachen, ganz aufgegeben, und alle damit zusammenhängenden Hypothesen fallen zu sehen. Schon Arago hat mit dem Scharfblicke, der alle seine Arbeiten auszeichnete, statt der bis dahin gewöhnlichen Herleitung gewisser Meeresströmungen aus Niveau-Differenzen andere Erklärungsweisen als nothwendig erkannt, und darauf hingewiesen, dass die früher beliebten Voraussetzungen von unverhältnissmässig starker Verdunstung wenigstens für das mittelländische Meer ganz unnütz seien, ein Schicksal, das ähnlichen, noch im Schwange gehenden Annahmen von nichtcompensirten Zuflüssen der Nordsee vielleicht in Kurzem ebenfalls bevorsteht.

---

[1]) Annuaire du bureau des Longitudes pour 1836, p. 312.

XXXI.

Bemerkungen über die Rectification der Ellipse.

Zu Klügel's math. Wörterb. Supplem. 2te Abth. S. 838.

Von

Herrn Director *Strehlke*

zu Danzig.

Unter Voraussetzung der dort gewählten Bezeichnungen ist der elliptische Bogen:

$$s = \int_0^{\varphi} \partial\varphi . \sqrt{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}.$$

Wird die Grösse unter dem Quadratwurzelzeichen mit K bezeichnet, so hat man:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi . \cos\varphi^2}{\sqrt{K}} + \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi . \sin\varphi^2}{\sqrt{K}} = \frac{\theta}{\mu}, \qquad (1)$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi . \cos\varphi^2}{\sqrt{K}} - \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi . \sin\varphi^2}{\sqrt{K}} = \frac{-z.\theta}{\mu(a^2 - b^2)} + \frac{16.Z}{a^2 - b^2}, \qquad (2)$$

wo μ die Grenze für die Grössen:

$$\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(a+b), \\ b' &= \sqrt{ab}, \\ a'' &= \tfrac{1}{2}(a'+b'), \\ b'' &= \sqrt{a'b'}, \\ a''' &= \tfrac{1}{2}(a''+b''), \\ b''' &= \sqrt{a''b''}, \\ &\vdots \\ a^{\infty} &= b^{\infty} = \mu, \text{ *)} \end{aligned}$$

---

*) Für die Berechnung von $b^{(n+1)}$ ohne Logarithmen sei bemerkt, dass, wenn $a^{(n)} = \alpha + k$, $b^{(n)} = \alpha + k'$:

$$z = 2(a'^2 - b'^2) + 4(a''^2 - b''^2) + 8(a'''^2 - b'''^2) + \ldots,$$

$$= \lambda'.\cos\varphi.\sin\varphi' + 2\lambda''.\cos\varphi'.\sin\varphi'' + 4\lambda'''.\cos\varphi''.\sin\varphi''' + \ldots,$$

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{a'} = \frac{1}{8}(a-b),$$

$$\lambda'' = \frac{\lambda'^2}{a''} = \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{8.a''},$$

$$\lambda''' = \frac{\lambda''^2}{a'''} = \frac{(a-b)^4}{8^4.a''^2.a'''},$$

u. s. w.

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen (1) und (2) Multiplication mit a^2 und b^2 erhält man:

$$2s = \frac{\theta}{\mu}(a^2 + b^2) - \frac{z\theta}{\mu} + 16Z,$$

wenn man für z den durch a, b, a', b' u. s. w. ausgedrück- Werth setzt:

$$= \frac{\theta}{\mu}\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2a'b' - 2(a''-b'')^2 - 4(a'''-b''')^2 - 8\right) + 16Z.$$

S. 836. a. a. O. ist, wenn $\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}.\operatorname{tang}\varphi$,

$$\sin\varphi' = \frac{a(\cos\psi - \cos\varphi)}{(a-b)\sin\varphi.\cos\psi},$$

dem man statt des Verhältnisses $\frac{b}{a}$ $\operatorname{tang}\psi\operatorname{cotg}\varphi$ setzt:

$$\sin\varphi' = \frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)},$$

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\sqrt{\cos\varphi.\cos\psi}}.$$

ler $\operatorname{tang}\psi' = \frac{b'}{a'}.\operatorname{tang}\varphi'$, so hat man:

$$+\frac{k+k'}{2},\ b^{(n+1)} = \alpha + \frac{k+k'}{2} - \frac{(k-k')^2}{8\alpha}$$

$$\frac{1}{16\alpha^2}(k-k')^2(k+k') + \ldots,$$

chen Theil von $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, k und k' die Ergän- d $b^{(n)}$ bedeuten.

$$\sin\varphi'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\psi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\psi')},$$

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\psi')}{\sqrt{\cos\varphi'.\cos\psi'}},$$

u. s. w.

$$\varphi^x = \theta.$$

Wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so verschwindet Z und man hat für den elliptischen Quadranten q den folgenden Ausdruck:

$$q = \frac{\pi}{\mu}\left[\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{2}a'b' - \tfrac{1}{2}(a''-b'')^2 + (a'''-b''')^2 - 2(a^{IV}-b^{IV})^2 - 4(a^V-b^V)^2 \ldots\right].$$

Berechnet man die Glieder $(a''-b'')^2$, $(a'''-b''')^2$ u. s. w. durch λ''', λ^{IV}...., so braucht man nur die zur Bestimmung von μ bereits benutzten Logarithmen.

Für eine Ellipse, deren

$$a = 1$$
$$b = \tfrac{1}{2},$$

ist:

$a' = 0,75$
$b' = 0,70710\ 67811\ 8655....$
$a'' = 0,72855\ 33905\ 9327....$
$b'' = 0,72823\ 76575\ 6098....$
$a''' = 0,72839\ 55240\ 771\ ...$
$b''' = 0,72839\ 55069\ 698\ ....$
$a^{IV} = 0,72839\ 55155\ 234\ .... = b^{IV} = \mu.$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\pi}{\mu}\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 = 0,06739\ 11139\ 84....$$

$$\frac{\pi}{\mu}.\tfrac{1}{2}a'b' = 1,14366\ 51285\ 62....$$

$$-\frac{\pi}{\mu}.\tfrac{1}{2}(a''-b'')^2 = -0,00000\ 02149\ 77....$$

$$-\frac{\pi}{\mu}(a'''-b''')^2 = -(0,00000\ 00171\ 07)^2.\frac{\pi}{\mu},$$

und endlich

$$q = 1{,}21105\ \ 60275\ \ 69.$$

Legendre *) hat

$$q = 1{,}21105\ \ 60275\ \ 68.$$

In den meisten Fällen wird man bei 7 Decimalen mit dem Ausdrucke

$$q = \frac{\pi}{\mu}\left[\left(\frac{a-b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{4}\right) \cdot \sqrt{ab}\right]$$

ausreichen.

XXXII.

Darstellung der algebraischen Gleichung des *n*ten Grades nur durch ihre Ableitungen und constante Funktionen.

Von

Herrn *L. Mossbrugger*,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

I. Da jede Ableitung einer Funktion eine Beziehung zu der Funktion selbst hat und jene wieder in Beziehung zu ihren Ableitungen steht u. s. f., so geht daraus hervor, dass sich die Funktion durch ihre Ableitungen darstellen lässt, wie dieses schon bei dem Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatz geschehen ist; jedoch kommen bei der Entwickelung des erstern die Ableitungen in Verbindung mit der Veränderlichen x und deren Potenzen vor, bei der letztern hingegen kommen jene Ableitungen für gewisse Werthe von x, gewöhnlich für $x=0$, in Verbindung mit der Veränderlichen x vor. In unserer gegenwärtigen Untersuchung wollen wir die algebraische Gleichung des $n$ten Grades blos durch ihre Ableitungen in Verbindung mit constanten Funktionen der Coefficienten jener Gleichung darzustellen suchen.

*) Exercices Tom III. p. 344.

Diese Gleichung ist:

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0. \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\overset{\prime}{y} = n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \ldots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1},$$

$$\overset{\prime\prime}{y} = n(n-1) x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3) a_2 x^{n-4} + \ldots$$
$$\ldots + 3.2.a_{n-3} x + 2.1 a_{n-2},$$

$$\overset{(n-2)}{y} = n(n-1) \ldots 3.x^2 + (n-1)(n-2) \ldots 2 a_1 x + (n-2)(n-3) \ldots 2.1.a_2,$$

$$\overset{(n-1)}{y} = n(n-1) \ldots 2x + (n-1)(n-2) \ldots 2.1 a_1,$$

$$\overset{(n)}{y} = n(n-1) \ldots 2.1.$$

Setzen wir in diesen Ausdrücken $x = -\frac{a_1}{n}$ und bezeichnen allgemein das Produkt $n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1)$ mit $[n]^{!m}$, so erhalten wir:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overset{(n-1)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}=0,\\
&\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}=[n-2]^{n-4|}\left\{-\frac{(n-1)}{n}a_1^2+2a_2\right\},\\
&\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}=2[n-3]^{n-6|}\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}a_1^3-\frac{3(n-2)}{n}a_1a_2+3a_3\right\},\\
&\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}=3[n-4]^{n-8|}\left\{-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}a_1^3+\frac{4(n-2)(n-3)}{n^2}a_1^2a_2-\frac{4.2(n-3)}{n}a_1a_3+4.2.1a_4\right\},\\
&\quad\vdots\\
&\overset{(n-m)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}=(m-1)[n-m]^{n-2m|}.\left\{
\begin{aligned}
&\mp\frac{[n-1]^{m-1|}a_1^m}{n^{m-1}}\pm\frac{m[n-2]^{m-2|}}{n^{m-2}}a_1^{m-2}a_2\mp\frac{m[m-2]^{1|}[n-3]^{m-3|}}{n^{m-3}}a_1^{m-3}a_3\\
&\pm\frac{m[m-2]^{2|}[n-4]^{m-4|}}{n^{m-4}}a_1^{m-4}a_4\mp\ldots+\frac{m[m-2]^{m-4|}[n-m+2]^{2|}}{n^2}.a_1^2a_{m-2}\\
&-\frac{m[m-2]^{m-3|}[n-m+1]^{1|}}{n}a_1a_{m-1}+m[m-2]^{m-2|}a^m.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
\right\}\quad(2)
$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Dann ist aber:

[illegible]

oder auch:

[illegible]

$$+\frac{2}{n(n-1)(n-2)} \ldots \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} a_1^3 - \frac{3(n-2)}{n} a_1 a_2 + 3a_3 ;$$

folglich ist:

$$\frac{y^{(n-1)}}{[n]^{n-1}} = \frac{y^{(n-1)}}{[n]^{n-1}} \cdot \frac{y^{(n-2)}}{[n]^{n-2}} + \frac{2y^{(n-1)}}{n(n-1)[n]^{n-1}} \cdot \frac{\left(y-\frac{a_1}{n}\right)^{(n-2)}}{[n-2]^{n-2}}$$

$$+\frac{1}{n(n-1)(n-2)} \frac{\left(y-\frac{a_1}{n}\right)^{(n-3)}}{[n-3]^{n-3}},$$

woraus

$$\overset{(n-3)}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y} \cdot \overset{(n-2)}{y}}{3[n]^{n-1}} + \frac{2\overset{(n-1)(n-2)}{y \cdot y_{-\frac{a_1}{n}}}}{3[n]^{n-1}} + \overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}.$$

Ferner ist

$$\frac{\overset{(n-4)}{y}}{[n]^{n-4}} = x^4 + \frac{4a_1x^3}{n} + \frac{12a_2x^2}{n(n-1)} + \frac{24a_3x}{n(n-1)(n-2)} + \frac{24a_4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

oder

$$\frac{\overset{(n-4)}{y}}{[n]^{n-4}} = (x+\frac{a_1}{n})\{x^3 + \frac{3a_1x^2}{n} + \frac{6a_2x}{n(n-1)} + \frac{6a_3}{n(n-1)(n-2)}\}$$

$$+ \frac{3}{n(n-1)}(x+\frac{a_1}{n})^2\{-\frac{(n-1)}{n}a_1^2 + 2a_2\}$$

$$+ \frac{6(x+\frac{a_1}{n})}{n(n-1)(n-2)}\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}a_1^3 - \frac{3(n-2)}{n}a_1a_2 + 3a_3\right\}$$

$$+ \frac{3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\Big\{-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}a_1^4$$

$$+ \frac{4(n-2)(n-3)}{n^2}a_1^2a_2 - \frac{4.2(n-3)}{n}a_1a_3 + 4.2.1.a_4\Big\},$$

oder wenn wir die Funktionszeichen einführen:

$$\frac{\overset{(n-4)}{y}}{[n]^{n-4}} = \frac{\overset{(n-1)}{y} \cdot \overset{(n-3)}{y}}{[n]^{n-1}[n]^{n-3}} + \frac{3}{n(n-1)} \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2}{\{[n]^{n-1}\}^2} \cdot \frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{n-4}}$$

$$+ \frac{3\overset{(n-1)(n-3)}{y \cdot y_{-\frac{a_1}{n}}}}{n(n-1)(n-2)[n]^{n-1}[n-3]^{n-6}} + \frac{\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{n(n-1)(n-2)(n-3)[n-4]^{n-8}}.$$

Weil aber

$$\frac{[n]^{n-4}}{[n]^{n-1}[n]^{n-3}} = \frac{1}{4[n]^{n-1}}$$

und

$$\frac{3[n]^{n-4}}{n(n-1)[n-2]^{n-4}\{[n]^{n-1}\}^2} = \frac{3}{4.3\{[n]^{n-1}\}^2},$$

$$\frac{3[n]^{n-4}}{n(n-1)(n-2)[n]^{n-1}[n-3]^{n-6}} = \frac{3}{4[n]^{n-1}}$$

und

$$\frac{[n]^{!n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)[n-4]^{!n-5}}=1$$

ist, so ist:

$$\overset{(n-4)}{y}=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-3)}{y}}{4[n]^{!n-1}}+\frac{3\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}.\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{4.3\{[n]^{!n-1}\}^{2}}+\frac{3\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{4[n]^{!n-1}}+\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}.$$

Auf gleiche Art finden wir:

$$\overset{(n-5)}{y}=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-4)}{y}}{5[n]^{!n-1}}+\frac{4\{\overset{(n-1)}{y}\}^{3}\ \overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5.4.3\{[n]^{!n-1}\}^{3}}+\frac{6\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}.\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5.4\{[n]^{!n-1}\}^{2}}$$
$$+\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5[n]^{!n-1}}+\overset{(n-5)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{(n-6)}{y}=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-5)}{y}}{6[n]^{!n-1}}+\frac{5\{\overset{(n-1)}{y}\}^{4}.\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{6.5.4.3\{[n]^{!n-1}\}^{4}}+\frac{10\{\overset{(n-1)}{y}\}^{3}\ \overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{6.5.4\{[n]^{!n-1}\}^{3}}$$
$$+\frac{10\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}.\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{6.5\{[n]^{!n-1}\}^{2}}+\frac{5\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-5)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{6[n]^{!n-1}}+\overset{(n-6)}{y}_{-\frac{a}{n}}.$$

Es ist hieraus das Gesetz der Coefficienten, so wie das der Funktionen leicht erkennbar, so dass also allgemein, wenn $\overset{m}{{}^{n}\mathfrak{B}}$ den $m$ten Binomialcoefficienten der $n$ten Potenz bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}\overset{(n-m)}{y}=&\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-m+1)}{y}}{m[n]^{!n-1}}+\frac{\overset{1}{{}^{m-1}\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{m-2}.\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[m]^{!m-2}\{[n]^{!n-1}\}^{m-2}}+\frac{\overset{2}{{}^{m-1}\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{m-3}.\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[m]^{!m-3}\{[n]^{!n-1}\}^{m-3}}\\&+\frac{\overset{3}{{}^{m-1}\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{m-4}.\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[m]^{!m-4}\{[n]^{!n-1}\}^{m-4}}+\ldots+\frac{\overset{m-3}{{}^{m-1}\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\cdot\overset{(n-m+2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[m]^{!2}\{[n]^{!n-1}\}^{2}}\\&+\frac{\overset{m-2}{{}^{m-1}\mathfrak{B}}\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-m+1)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[m]^{!1}[n]^{!n-1}}+\overset{(n-m)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}.\end{aligned}\right\}(3$$

Setzt man hierin $m=n-2$, $m=n-1$, $m=n$, so kommt:

$$\overset{''}{y}=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'''}{y}}{(n-2)[n]^{n-1|1}}+\frac{{}^{n-3}\overset{1}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-4}\cdot\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{n-4|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-4}}+\frac{{}^{n-3}\overset{2}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-5}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{n-5|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-5}}$$

$$+\ldots+\frac{{}^{n-3}\overset{n-5}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\cdot\overset{IV}{y}}{[n-2]^{2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{{}^{n-3}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'''}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{1|1}[n]^{n-1|1}}+\overset{''}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{'}{y}=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{''}{y}}{(n-1)[n]^{n-1|1}}+\frac{{}^{n-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-3}\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-1]^{n-3|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-3}}+\frac{{}^{(n-2)}\overset{2}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-4}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-1]^{n-4|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-4}}$$

$$+\ldots+\frac{{}^{n-2}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\overset{'''}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-1]^{2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{{}^{n-2}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{''}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-1]^{1|1}[n]^{n-1|1}}+\overset{'}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'}{y}}{n[n]^{n-1|1}}+\frac{{}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-2}\cdot\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{n-2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-2}}+\frac{{}^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-3}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{n-3|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-3}}\\&+\ldots+\frac{{}^{n-1}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\cdot\overset{''}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{{}^{n-1}\overset{n-2}{\mathfrak{B}}\cdot\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{1|1}[n]^{n-1|1}}+y_{-\frac{a_1}{n}}.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

II. Aus den in I. gefundenen Gleichungen lassen sich leicht folgende ableiten:

$$\overset{(n-2)}{y}=\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}}{2[n]^{n-1|1}}+\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{(n-3)}{y}=\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{3}}{3.2\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{3\overset{(n-1)}{y}\,\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{3[n]^{n-1|1}}+\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{(n-4)}{y}=\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{4}}{4.3.2\{[n]^{n-1|1}\}^{3}}+\frac{6\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\cdot\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{4.3\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{4\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{4[n]^{n-1|1}}+\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{(n-5)}{y}=\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{5}}{5.4.3.2\{[n]^{n-1|1}\}^{4}}+\frac{10\{\overset{(n-1)}{y}\}^{3}\,\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5.4.3\{[n]^{n-1|1}\}^{3}}+\frac{10\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\,\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5.4\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}$$

$$+\frac{5\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{5[n]^{n-1|1}}+\overset{(n-5)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n}}{\{[n]^{n-1|1}\}^{n}}+\frac{{}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-2}\cdot\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{n-2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-2}}+\frac{{}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}\cdot\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-3}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{n-3|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-3}}\\&+\frac{{}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-4}\cdot\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{n-4|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{n-4}}+\ldots+\frac{{}^{n}\overset{(n-2)}{\mathfrak{B}}\{\overset{(n-1)}{y}\}^{2}\overset{''}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{2|1}\{[n]^{n-1|1}\}^{2}}+\frac{{}^{n}\overset{n-1}{\mathfrak{B}}\,\overset{(n-1)}{y}\,\overset{'}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n]^{1|1}[n]^{n-1|1}}+y_{-\frac{a_1}{n}}.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Die Richtigkeit dieser letzten Gleichung und also auch aller vorhergehenden, woraus sie entstanden ist, lässt sich leicht durch die Maclaurin'sche Reihe beweisen; denn diese ist allgemein:

$$y=y_\alpha+y'_\alpha(x-\alpha)+\frac{y''_\alpha}{1.2}(x-\alpha)^2+\frac{y'''_\alpha}{1.2.3}(x-\alpha)^3 \ldots+\frac{\overset{(n-3)}{y}_\alpha}{[n-3]^{!n-3}}(x-\alpha)^{n-3}$$

$$+\frac{\overset{(n-2)}{y}_\alpha}{[n-2]^{!n-2}}(x-\alpha)^{n-2}+\frac{\overset{(n-1)}{y}_\alpha}{[n-1]^{!n-1}}(x-\alpha)^{n-1}+\frac{\overset{(n)}{y}_\alpha}{[n]^{!n}}(x-\alpha)^n.$$

Setzen wir hierin $\alpha=-\frac{a_1}{n}$ und bemerken, dass $\overset{(n-1)}{y}=(x+\frac{a_1}{n})[n]^{!n-1}$, also $\overset{(n-1)}{y}_\alpha=(\alpha+\frac{a_1}{n})[n]^{!n-1}$; dieses aber wird für $\alpha=\varkappa-\frac{a_1}{n}$ zu Null; ferner ist $\frac{\overset{(n)}{y}_\alpha}{[n]^{!n-1}}$ für jeden Werth von α gleich 1, und alle nach dem letzten Gliede jener Reihe folgenden Glieder werden für unsern Fall zu Null. Es wird also bei unserer Annahme von y und α die Maclaurin'sche Reihe zu:

$$y=y_{-\frac{a_1}{n}}+y'_{-\frac{a_1}{n}}(x+\frac{a_1}{n})+\frac{y''_{-\frac{a_1}{n}}}{1.2}(x+\frac{a_1}{n})^2+\frac{y'''_{-\frac{a_1}{n}}}{1.2.3}(x+\frac{a_1}{n})^3+\ldots$$

$$\ldots+\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}(x+\frac{a_1}{n})^{n-3}+\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{!n-2}}\cdot(x+\frac{a_1}{n})^{n-2}+(x+\frac{a_1}{n})^n.$$

Es ist aber nach I. $x+\frac{a_1}{n}=\frac{\overset{(n-1)}{y}}{[n]^{!n-1}}$, also:

$$y=y_{-\frac{a_1}{n}}+y'_{-\frac{a_1}{n}}\frac{\overset{(n-1)}{y}}{[n]^{!n-1}}+\frac{y''_{-\frac{a_1}{n}}}{1.2}\cdot\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2}{\{[n]^{!n-1}\}^2}+\frac{y'''_{-\frac{a_1}{n}}}{1.2.3}\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3}{\{[n]^{!n-1}\}^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-3]^{!n-3}}\cdot\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-3}}{\{[n]^{!n-1}\}^{n-3}}+\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}}{[n-2]^{!n-2}}\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-2}}{\{[n]^{!n-1}\}^2}+\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^n}{\{[n]^{!n-1}\}^n}.$$

Nun ist aber

$$\frac{{}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}}{[n]^{!n-2}}=\frac{n(n-1)}{1.2.n(n-1)(n-2)\ldots.3.2}=\frac{1}{(n-2)(n-3)\ldots.3.2}$$

$$=\frac{1}{(n-2)(n-3)\ldots.3.2.1}=\frac{1}{[n-2]^{!n-2}},$$

folglich ist das vorletzte Glied dieser Reihe mit dem zweiten in No. (5) identisch; ferner ist

$$\frac{{}_n\overset{3}{\mathfrak{B}}}{[n]!^{n-3}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.n(n-1)(n-2)(n-3)....4} = \frac{1}{(n-3)(n-4)....4.3.2.1}$$

$$= \frac{1}{[n-3]!^{n-3}},$$

woraus die Identität des dritten Gliedes in No. (5) mit dem drittletzten dieser Reihe hervorgeht; auf gleiche Weise wird die Identität der übrigen Glieder von dieser Reihe mit jenen der Reihe (5) hergeleitet.

III. Um der Auflösung unserer eigentlichen Aufgabe näher zu kommen, bemerken wir, dass nach I.:

$$\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}} = \overset{(n-2)}{y} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2}{2[n]!^{n-1}}$$

ist. Führen wir diesen Werth von $\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ in der zweiten Gleichung II. ein, so erhalten wir:

$$\overset{(n-3)}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3}{3\{[n]!^{n-1}\}^2} + \overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

also ist auch:

$$\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}} = \overset{(n-3)}{y} - \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-1}} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3}{3\{[n]!^{n-1}\}^2}.$$

Dieser Werth von $\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ und den obigen von $\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ in der dritten Gleichung II. eingeführt, gibt:

$$\overset{(n-4)}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-3)}{y}}{[n]!^{n-1}} - \frac{1}{1.2}\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\overset{(n-2)}{y}}{\{[n]!^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^4}{4.2\{[n]!^{n-1}\}^3} + \overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

also

$$\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}} = \overset{(n-4)}{y} - \frac{\overset{(n-1)}{y}\ \overset{(n-3)}{y}}{[n]!^{n-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\ \overset{(n-2)}{y}}{\{[n]!^{n-1}\}^2} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^4}{4.2\{[n]!^{n-1}\}^3}.$$

Führen wir ferner diesen Werth von $\overset{(n-4)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ und jene von $\overset{(n-3)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ und $\overset{(n-2)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$ in der vierten Gleichung von II. ein, so erhalten wir:

$$\overset{(n-5)}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-4)}{y}}{[n]^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\,\overset{(n-3)}{y}}{1.2\{[n]^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3\,\overset{(n-2)}{y}}{3.2.1\{[n]^{n-1}\}^3}$$

$$- \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^5}{5.3.2.1\{[n]^{n-1}\}^4} + \overset{(n-5)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}$$

Fahren wir auf diese Weise fort, so erhalten wir allgemein:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(n-m)}{y} &= \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{(n-m+1)}{y}}{[n]^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\cdot\overset{(n-m+2)}{y}}{2.1\{[n]^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3\cdot\overset{(n-m+3)}{y}}{3.2.1\{[n]^{n-1}\}^3} - + \ldots \\ &\ldots \pm \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{m-2}\cdot\overset{(n-2)}{y}}{[m-2]^{m-2}\{[n]^{n-1}\}^{m-2}} \\ &\mp \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{m}}{m[m-2]^{m-2}\{[n]^{n-1}\}^{m-1}} + \overset{(n-m)}{y}_{-\frac{a_1}{n}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Das obere Zeichen gilt für ein **ungerades**, das untere für ein **gerades** m.

Aus dieser Gleichung lassen sich endlich leicht folgende ableiten, wenn man $m=n-2$, $m=n-1$, $m=n$ setzt:

$$\overset{''}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'''}{y}}{[n]^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\,\overset{IV}{y}}{2.1\{[n]^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3\,\overset{V}{y}}{3.2.1\{[n]^{n-1}\}^3} - + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-4}\,\overset{(n-2)}{y}}{[n-4]^{n-4}\{[n]^{n-1}\}^{n-4}} \mp \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-2}}{(n-2)[n-4]^{n-4}\{[n]^{n-1}\}^{n-3}} + \overset{''}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\overset{'}{y} = \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{''}{y}}{[n]^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\cdot\overset{'''}{y}}{2.1.\{[n]^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3\cdot\overset{IV}{y}}{3.2.1\{[n]^{n-1}\}^3} - + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-3}\cdot\overset{(n-2)}{y}}{[n-3]^{n-3}\{[n]^{n-1}\}^{n-3}} \mp \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-1}}{(n-1)[n-3]^{n-3}\{[n]^{n-1}\}^{n-2}} + \overset{'}{y}_{-\frac{a_1}{n}},$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\overset{(n-1)}{y}\cdot\overset{'}{y}}{[n]^{n-1}} - \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^2\,\overset{''}{y}}{2.1\{[n]^{n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^3\,\overset{'''}{y}}{3.2.1\{[n]^{n-1}\}^3} - + \ldots \\ &\ldots \pm \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n-2}\cdot\overset{(n-2)}{y}}{[n-2]^{n-2}\{[n]^{n-1}\}^{n-2}} \mp \frac{\{\overset{(n-1)}{y}\}^{n}}{n[n-2]^{n-2}\{[n]^{n-1}\}^{n-1}} + y_{-\frac{a_1}{n}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Das obere Zeichen gilt für ein **ungerades**, das untere für ein **gerades** m. In der Gleichung (7) ist nun die algebraische

Gleichung des $n$ten Grades nur durch ihre Ableitungen und die Constante $y_{-\frac{a_1}{n}}$ dargestellt.

IV. Um eine noch allgemeinere Darstellung der Gleichung I. (1) zu geben, behalten wir alle früheren Bezeichnungen bei und nehmen an, es sei μ eine ganz beliebige ganze oder gebrochene, jedoch positive Grösse, so haben wir nach I.:

$$\frac{\overset{(n-1)}{y}}{[n]!} = \left(\frac{a_1}{n} - \mu\right) + x + \mu,$$

oder, da

$$\frac{a_1}{n} - \mu = \frac{\overset{(n-1)}{y_{-\mu}}}{[n]!^{n-1}}$$

ist:

$$\frac{\overset{(n-1)}{y}}{[n]!^{n-1}} = \frac{\overset{(n-1)}{y_{-\mu}}}{[n]!^{n-1}} + x + \mu.$$

Ferner ist:

$$\frac{\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-2}} = x^2 + \frac{2a_1}{n}x + \frac{2a_2}{n(n-1)} = \mu^2 - \frac{2a_1\mu}{n} + \frac{2a_2}{n(n-1)} + \frac{2a_1\mu}{n} + \frac{2a_1 x}{n}$$
$$- 2\mu x - 2\mu^2 + x^2 + 2\mu x + \mu^2$$

oder

$$\frac{\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-2}} = \mu^2 - \frac{2a_1\mu}{n} + \frac{2a_2}{n(n-1)} + \left(\frac{a_1}{n} - \mu\right)(x+\mu)\frac{[n]!^{n-1}}{[n]!^{n-2}} + (x+\mu)^2,$$

also auch:

$$\frac{\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-2}} = \frac{\overset{(n-2)}{y_{-\mu}}}{[n]!^{n-2}} + \frac{\overset{(n-1)}{y_{-\mu}}(x+\mu)}{[n]!^{n-2}} + (x+\mu)^2.$$

Um die ferneren Entwickelungen allgemeiner und leichter zu machen, nehmen wir wieder den Maclaurin'schen Satz zu Hülfe, nach welchem:

$$y = y_{-\mu} + \frac{\overset{'}{y_{-\mu}}}{1}(x+\mu) + \frac{\overset{''}{y_{-\mu}}}{1.2}(x+\mu)^2 + \frac{\overset{'''}{y_{-\mu}}}{3.2.1}(x+\mu)^3$$
$$+ \ldots + \frac{\overset{(n-2)}{y_{-\mu}}}{[n-2]!^{n-2}}(x+\mu)^{n-2} + \frac{\overset{(n-1)}{y}}{[n-1]!^{n-1}}\cdot(x+\mu)^{n-1} + \frac{\overset{(n)}{y_{-\mu}}}{[n]!^{n}}(x+\mu)^n + \ldots$$

ist.

Nach diesem finden wir leicht, dass:

$$\frac{\overset{(n-3)}{y}}{[n]!^{n-3}}=\frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-3}}+\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-3}}(x+\mu)+\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{2.1.[n]!^{n-3}}.(x+\mu)^2+(x+\mu)^3,$$

$$\frac{\overset{(n-4)}{y}}{[n]!^{n-4}}=\frac{\overset{(n-4)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-4}}+\frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-4}}(x+\mu)+\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{2.1[n]!^{n-4}}(x+\mu)^2$$
$$+\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}.(x+\mu)^3}{3.2.1[n]!^{n-4}}+(x+\mu)^4,$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\overset{(n-m)}{y}}{[n]!^{n-m}}=\frac{\overset{(n-m)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-m}}+\frac{\overset{(n-m+1)}{y}_{-\mu}(x+\mu)}{[n]!^{n-m}}+\frac{\overset{(n-m+2)}{y}_{-\mu}(x+\mu)^2}{2.1[n]!^{n-m}}+\frac{\overset{(n-m+3)}{y}_{-\mu}(x+\mu)^3}{3.2.1[n]!^{n-m}}\\+\ldots+\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}(x+\mu)^{m-1}}{[m-1]!^{m-1}[n]!^{n-m}}+(x+\mu)^m,\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\vdots$$

$$\frac{y'}{[n]!^1}=\frac{y'_{-\mu}}{[n]!^1}+\frac{y''_{-\mu}(x+\mu)}{[n]!^1}+\frac{y'''_{-\mu}(x+\mu)^2}{2.1[n]!^1}+\ldots+\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}(x+\mu)^{n-2}}{[n-2]!^{n-2}[n]!^1}+(x+\mu)^{n-1},$$

$$\left.\begin{aligned}y=y_{-\mu}+\frac{y'_{-\mu}}{1}(x+\mu)+\frac{y''_{-\mu}(x+\mu)^2}{2.1}+\frac{y'''_{-\mu}(x+\mu)^3}{[3]!^3}+\ldots\\ \ldots+\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}(x+\mu)^{n-1}}{[n-1]!^{n-1}}+(x+\mu)^n.\end{aligned}\right\}(9)$$

V. Wir finden oben aus IV.:

$$x+\mu=\frac{\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}.$$

Dieser Werth von $x+\mu$ in dem Ausdruck für $\frac{\overset{(n-2)}{y}}{[n]!^{n-2}}$ in IV. substituirt, gibt:

$$(x+\mu)^2=\frac{1}{[n]!^{n-2}}\left[(\overset{(n-2)}{y}-\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})-(\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right].$$

Der Werth von $x+\mu$ und dieser letzte von $(x+\mu)^2$ in dem Ausdruck für $\frac{\overset{(n-3)}{y}}{[n]!^{n-3}}$ in IV. eingeführt, gibt:

$$(x+\mu)^3=\frac{1}{[n]!^{n-3}}\left[(\overset{(n-3)}{y}-\overset{(n-3)}{y}_{-\mu})-(\overset{(n-2)}{y}-\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right.$$
$$\left.+(\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2}-\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right\}\right].$$

Auf gleiche Art finden wir:

$$(x+\mu)^4=\frac{1}{[n]!^{n-4}}\Bigg[(\overset{(n-4)}{y}-\overset{(n-4)}{y}_{-\mu})-(\overset{(n-3)}{y}-\overset{(n-3)}{y}_{-\mu})\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}+(\overset{(n-2)}{y}-\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{\{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2}-\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right\}$$
$$-(\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^3}{\{[n]!^{n-1}\}^3}-\frac{2\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2}+\frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right\}\Bigg],$$

$$(x+\mu)^5=\frac{1}{[n]!^{n-5}}\Bigg[(\overset{(n-5)}{y}-\overset{(n-5)}{y}_{-\mu})-(\overset{(n-4)}{y}-\overset{(n-4)}{y}_{-\mu})\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}+(\overset{(n-3)}{y}-\overset{(n-3)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2}-\frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right\}$$
$$-(\overset{(n-2)}{y}-\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^3}{\{[n]!^{n-1}\}^3}-\frac{2\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2}+\frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}\right\}$$
$$+(\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})\left\{\frac{(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^4}{\{[n]!^{n-1}\}^4}-\frac{3(\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^2\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^3}+\frac{2\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\cdot\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2}-\frac{\overset{(n-4)}{y}_{-\mu}}{[n]!^{n-1}}+\frac{(\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2}\right\}\Bigg].$$

Wir können nach dem bisher Gefundenen allgemein annehmen, dass

$$\left.\begin{aligned}(x+\mu)^m=\frac{1}{[n]!^{n-m}}\Bigg[&(\overset{(n-m)}{y}-\overset{(n-m)}{y}_{-\mu})-(\overset{(n-m+1)}{y}-\overset{(n-m+1)}{y}_{-\mu})K_1+(\overset{(n-m+2)}{y}-\overset{(n-m+2)}{y}_{-\mu})K_2-(\overset{(n-m+3)}{y}-\overset{(n-m+3)}{y}_{-\mu})K_3+(\overset{(n-m+4)}{y}-\overset{(n-m+4)}{y}_{-\mu})K_4\\&-+\ldots\pm(\overset{(n-2)}{y}-\overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{m-2}\mp(\overset{(n-1)}{y}-\overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{m-1}\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Das obere Zeichen gilt für ein gerades, das untere für ein ungerades m. Das Gesetz, nach welchem die Funktionendifferenzen gebildet sind, ist offenbar; das Verfahren, wie jeder folgende der Coefficienten aus dem vorhergehenden gebildet wird, soll in der folgenden Nummer gezeigt werden.

VI. Wir haben in V. bereits gefunden, dass:

$$K_1 = \frac{\overset{(n-1)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}, \quad K_2 = \frac{(\overset{(n-1)}{y-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2} - \frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}};$$

also ist auch:

$$K_2 = K_1{}^2 - \frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}},$$

folglich:

$$\frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}} = K_1{}^2 - K_2.$$

Da ferner

$$K_3 = \frac{(\overset{(n-1)}{y-\mu})^3}{\{[n]!^{n-1}\}^3} - \frac{2\overset{(n-1)}{y-\mu}\cdot\overset{(n-2)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2} + \frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}$$

oder

$$K_3 = K_1 K_2 - \frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}\left(K_1 - \frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{\underset{y-n}{(n-2)}}\right),$$

mithin:

$$K_3 = K_1 K_2 - (K_1{}^2 - K_2) K_1 + \frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}};$$

folglich ist:

$$\frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}} = K_3 - 2K_1 K_2 + K_1{}^3.$$

In der Entwickelung von $(x+\mu)^5$ in No. V. sehen wir, dass:

$$K_4 = \frac{(\overset{(n-1)}{y-\mu})^4}{\{[n]!^{n-1}\}^4} - \frac{3(\overset{(n-1)}{y-\mu})^2\,\overset{(n-2)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^3} + \frac{2\overset{(n-1)}{y-\mu}\,\overset{(n-3)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2} - \frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}} + \frac{(\overset{(n-2)}{y-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^2}.$$

Hieraus finden wir leicht:

$$K_4=K_1K_3-\frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_2+\frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}\Big(K_1-\frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{\underset{y-\mu}{(n-3)}}\Big)$$

oder

$$K_4=K_1K_3-K_2(K_1{}^2-K_2)+(K_3-2K_1K_2+K_1{}^3)K_1-\frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}},$$

also

$$\frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}=K_1{}^4-3K_1{}^2K_2+2K_1K_3-K_4+K_2{}^2.$$

Setzt man in V. die Entwickelung von $x+\mu$ noch eine Potenz weiter fort, so findet man:

$$K_5=\frac{(\overset{(n-1)}{y-\mu})^5}{\{[n]!^{n-1}\}^5}-\frac{4(\overset{(n-1)}{y-\mu})^3.\overset{(n-2)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^4}+\frac{3(\overset{(n-1)}{y-\mu})^2.\overset{(n-3)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^3}-\frac{2\overset{(n-1)}{y-\mu}.\overset{(n-4)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2}$$

$$+\frac{3\overset{(n-1)}{y-\mu}(\overset{(n-2)}{y-\mu})^2}{\{[n]!^{n-1}\}^3}-\frac{2\overset{(n-2)}{y-\mu}\,\overset{(n-3)}{y-\mu}}{\{[n]!^{n-1}\}^2}+\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}$$

oder auch:

$$K_5=K_1K_4-\frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_3+\frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_2-\frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}\Big(K_1-\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{\underset{y-\mu}{(n-4)}}\Big),$$

woraus

$$K_5=-K_1{}^5+4K_1{}^3K_2-3K_1{}^2K_3+2K_1K_4-3K_1K_2{}^2+2K_2K_3+\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}},$$

also

$$\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}=K_1{}^5-4K_1{}^3K_2+3K_1{}^2K_3-2K_1K_4+3K_1K_2{}^2-2K_2K_3+K_5.$$

Aus dem Bisherigen sehen wir, dass allgemein:

$$\left.\begin{aligned}K_m=K_1K_{m-1}-\frac{\overset{(n-2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_{m-2}+\frac{\overset{(n-3)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_{m-3}-\frac{\overset{(n-4)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_{m-4}\\ +-+\ldots\pm\frac{\overset{(n-m+2)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}K_2\mp\frac{\overset{(n-m+1)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}\Big(K_1-\frac{\overset{(n-m)}{y-\mu}}{\underset{y-\mu}{(n-m+1)}}\Big);\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

wo das obere Zeichen für ein ungerades, das untere für ein gerades m gilt.

VII. Wenn wir mit einer genaueren Betrachtung der Werthe der $\frac{\overset{(n-m)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}$ die Bemerkung verbinden, dass K_1 eine, K_2 zwei, K_3 drei etc., K_m m Dimensionen hat, so können wir bei den Bestimmungen in VI. auf eine allgemeinere Weise verfahren.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir der Kürze und besseren combinatorischen Uebersicht wegen:

K_1 mit 1, also K_1^5 mit 11111, K_1^6 mit 111111, etc.,
K_2 mit 2, also K_2^4 mit 2222, K_2^5 mit 22222, etc.,

so dass z. B. $K_1^3K_2^2K_4^2 = 1112244$ wäre.

Wir sehen aber aus dem Werth von $\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}$, dass er aus der Verbindung der Elemente 1, 2, 3, 4, 5 zur Summe 5 entstanden ist, oder, wenn wir die combinatorische Bezeichnung gebrauchen, sich durch

$$^5V[1....] = {}^4_1V[1....] + {}^3_2V[1....] + {}^2_3V[1....] + {}^1_4V[1....] + 5$$

darstellen lässt, oder da:

$$1{,}1111 + 1{,}112 + 1{,}121 + 1{,}13 + 1{,}211 + 1{,}22 + 1{,}31 + 1{,}4 = {}^4_1V[1....],$$
$$2{,}111 + 2{,}12 + 2{,}21 + 2{,}3 = {}^3_2V[1....],$$
$$3{,}11 + 3{,}2 = {}^2_3V[1....],$$
$$4{,}1 = {}^1_4V[1....],$$
$$5 = 5,$$

also

$$^5V[1....] = 1{,}1111 + \{1{,}112 + 1{,}121 + 1{,}211 + 2{,}111\} + \{1{,}13 + 1{,}31 + 3{,}11\}$$
$$+ \{1{,}4 + 4{,}1\} + \{1{,}22 + 2{,}12 + 2{,}21\} + \{2{,}3 + 3{,}2\} + 5.$$

Es ist also nach obiger Bezeichnung und nach dieser Formel, wenn wir die Abwechslung der Zeichen wie in VI. berücksichtigen:

$$\frac{\overset{(n-5)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}} = K_1^5 - 4K_1^3K_2 + 3K_1^2K_3 - 2K_1K_4 + 3K_1K_2^2 - 2K_2K_3 + K_5,$$

wie oben.

Zur besseren Verständigung wollen wir noch den Werth von $\frac{\overset{(n-7)}{y-\mu}}{[n]!^{n-1}}$ auf die ebengezeigte Art herleiten. Es ist:

$${}^7V[1....] = {}^6_1V[1....] + {}^5_2V[1....] + {}^4_3V[1....] + {}^3_4V[1....] + {}^2_5V[1....] + {}^1_6V[1....] + 7,$$

$${}_1V[1....] = 1,111111 + 1,11112 + 1,11121 + 1,11211 + 1,12111 + 1,21111$$
$$+ 1,1122 + 1,1212 + 1,1221 + 1,2112 + 1,2121 + 1,2211 + 1,1113$$
$$+ 1,1131 + 1,1311 + 1,3111 + 1,123 + 1,132 + 1,213 + 1,231 + 1,321$$
$$+ 1,312 + 1,222 + 1,33 + 1,141 + 1,411 + 1,114 + 1,24 + 1,42 + 1,51$$
$$+ 1,15 + 1,6,$$

$${}^5_2V[1....] = 2,11111 + 2,1112 + 2,1121 + 2,1211 + 2,2111 + 2,122 + 2,212$$
$$+ 2,221 + 2,113 + 2,131 + 2,311 + 2,32 + 2,23 + 2,14 + 2,41 + 2,5,$$

$${}^4V[1....] = 3,1111 + 3,112 + 3,121 + 3,211 + 3,13 + 3,31 + 3,22 + 3,4,$$

$${}^3_4V[1....] = 4,111 + 4,12 + 4,21 + 4,3,$$

$${}^2_5V[1....] = 5,11 + 5,2,$$

$${}^1_6V[1....] = 6,1,$$

$$7 = 7.$$

Nimmt man die gleichbedeutenden zusammen, so hat man:

$$1,111111 = K_1^7,$$

$$1,11112 + 1,11121 + 1,11211 + 1,12111 + 1,21111 + 2,11111 = 6K_1^5K_2,$$

$$1,1113 + 1,1131 + 1,1311 + 1,3111 + 3,1111 = 5K_1^4K_3,$$

$$1,1122 + 1,1212 + 1,1221 + 1,2112 + 1,2121 + 1,2211 + 2,1112 + 2,1121$$
$$+ 2,1211 + 2,2111 = 10K_1^3K_2^2,$$

$$1,114 + 1,141 + 1,411 + 4,111 = 4K_1^3K_4,$$

$$1,123 + 1,132 + 1,213 + 1,231 + 1,321 + 1,312 + 2,113 + 2,131 + 2,311$$
$$+ 3,112 + 3,121 + 3,211 = 12K_1^2K_2K_3,$$

$$1,15 + 1,51 + 5,11 = 3K_1^2K_5,$$

$$2,122 + 1,222 + 2,212 + 2,221 = 4K_2^3K_1,$$

$$1,24 + 1,42 + 2,14 + 2,41 + 4,12 + 4,21 = 6K_1K_2K_4,$$

$$1,6 + 6,1 = 2K_1K_6,$$

$$1,33 + 3,13 + 3,31 = 3K_3^2K_1,$$

$$2,23 + 2,32 + 3,22 = 3K_2^2K_3,$$

$$2,5 + 5,2 = 2K_2K_5,$$

$$3,4 + 4,3 = 2K_3K_4,$$

$$7 = K_7.$$

Berücksichtigen wir die gehörige Abwechslung der Zeichen, so folgt hieraus, dass:

$$\frac{\overset{(n-7)}{y_{-\mu}}}{[n]^{!n-1}} = K_1{}^7 - 6K_1{}^5K_2 + 5K_1{}^4K_3 - 4K_1{}^3K_4 + 10K_1{}^3K_2{}^2 - 12K_1{}^2K_2K_3$$
$$+ 3K_1{}^2K_5 - 4K_1K_2{}^3 + 6K_1K_2K_4 - 2K_1K_6 + 3K_2{}^2K_3 - 2K_2K_5$$
$$+ 3K_2{}^2K_3 - 2K_3K_1 + K_7.$$

Die allgemeine Combinationsform, wornach diese Ausdrücke bestimmt werden können, ist:

$$\left.\begin{array}{l} {}^nV[1....] = {}^{n-1}\underset{1}{V}[1....] + {}^{n-2}\underset{2}{V}[1....] + {}^{n-3}\underset{3}{V}[1....] + {}^{n-4}\underset{4}{V}[1....] \\ + ... + {}^{n-r}\underset{r}{V}[1....] + ... + {}^2\underset{n-2}{V}[1....] + {}^1\underset{n-1}{V}[1....] + n. \end{array}\right\} (12)$$

VIII. Setzen wir in IV. Formel (10) nach einander $m=n-2$, $m=n-1$, $m=n$, so erhalten wir:

$$(x+\mu)^{n-2} = \frac{1}{[n]^{!2}} \left\{ \begin{array}{l} (\overset{''}{y} - \overset{''}{y}_{-\mu}) - (\overset{'''}{y} - \overset{'''}{y}_{-\mu})K_1 + (\overset{IV}{y} - \overset{IV}{y}_{-\mu})K_2 \\ - + ... \pm (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{n-4} \mp (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{n-3} \end{array} \right\},$$

$$(x+\mu)^{n-1} = \frac{1}{[n]^{!1}} \left\{ \begin{array}{l} (\overset{'}{y} - \overset{'}{y}_{-\mu}) - (\overset{''}{y} - \overset{''}{y}_{-\mu})K_1 + (\overset{'''}{y} - \overset{'''}{y}_{-\mu})K_2 \\ - + ... \mp (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{n-3} \pm (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{n-2} \end{array} \right\},$$

$$(x+\mu)^n = \left\{ \begin{array}{l} (y - y_{-\mu}) - (\overset{'}{y} - \overset{'}{y}_{-\mu})K_1 + (\overset{''}{y} - \overset{''}{y}_{-\mu})K_2 - (\overset{'''}{y} - \overset{'''}{y}_{-\mu})K_3 \\ + - + ... \pm (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{n-2} \mp (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{n-1} \end{array} \right\}. (13)$$

Das obere Zeichen gilt für ein g e r a d e s, das untere für ein u n g e r a d e s n.

Diese Formel (13) drückt eine mir noch nicht bekannte Form des Binomiums aus, die Werthe der K_1, K_2, K_3 etc. können nach den obigen Anleitungen bestimmt werden.

Bemerken wir, dass $[2]^{!1}[n]^{!n-2} = [3]^{!2}[n]^{!n-3} = [4]^{!3}[n]^{!n-4} = [5]^{!4}[n]^{!n-5} = ... [n]^{!n-1}$, so folgt aus den Gleichungen in V.:

$$\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2 = [2]^{!1}[n]^{!n-1}[(\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}) - (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_1],$$

$$\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^3 = [3]^{!2}\{[n]^{!n-1}\}^2[(\overset{(n-3)}{y} - \overset{(n-3)}{y}_{-\mu}) - (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_1 + (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_2],$$

$$\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n+1)}{y}\}^4 = [4]^{!3}\{[n]^{!n-1}\}^3\Big[(\overset{(n-4)}{y} - \overset{(n-4)}{y}_{-\mu}) - (\overset{(n-3)}{y} - \overset{(n-3)}{y}_{-\mu})K_1 + (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_2$$
$$- (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_3\Big],$$

folglich, weil allgemein $[n]^{!n-1}\{[n]^{!n-1}\}^{n-1} = \{[n]^{!n-1}\}^n$ ist:

$$(\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^{n-1} = [n-1]^{!n-2}\{[n]^{!n-1}\}^{n-2}\Big[(y' - y'_{-\mu}) - (y'' - y''_{-\mu})K_1 + (y''' - y'''_{-\mu})K_2 - + - + - \ldots \mp (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{n-3} \pm (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{n-2}\Big].$$

$$(\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})^n = \{[n]^{!n-1}\}^n\Big[(y - y_{-\mu}) - (y' - y'_{-\mu})K_1 + (y'' - y''_{-\mu})K_2 - + - \ldots \ldots \pm (\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu})K_{n-2} \mp (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})K_{n-1}\Big]. \quad (14)$$

Das obere Zeichen gilt für ein **gerades**, das untere für ein **ungerades** n.

IX. Aus den vorhergehenden Gleichungen in VIII. erhalten wir:

$$\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2}{[2]^{!1}[n]^{!n-1}} + \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\} K_1$$

folglich, da $\overset{(n-2)}{y}_{-\mu} = [n]^{!n-1}\{K_1^2 - K_2\}$, so ist:

$$\overset{(n-2)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2}{[2]^{!1}[n]^{!n-1}} + \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\} K_1 + [n]^{!n-1}\{K_1^2 - K_2\}.$$

Auf gleiche Art finden wir aus jenen Gleichungen, wenn wir den Werth von $\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}$ substituiren und statt $\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}$ seinen früher gefundenen Werth $[n]^{!n-1}\{K_1^3 - 2K_1K_2 + K_3\}$ setzen:

$$\overset{(n-3)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^3}{[3]^{!2}\{[n]^{!n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2 . K_1}{[2]^{!1}[n]^{!n-1}} + (\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu})(K_1^2 - K_2)$$
$$+ [n]^{!n-1}\{K_1^3 - 2K_1K_2 + K_3\};$$

ebenso finden wir:

$$\overset{(n-4)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^4}{[4]^{!3}\{[n]^{!n-1}\}^3} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^3 . K_1}{[3]^{!2}\{[n]^{!n-1}\}^2} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2}{[2]^{!1}[n]^{!n-1}} . (K_1^2 - K_2)$$
$$+ \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}(K_1^3 - 2K_1K_2 + K_3) + [n]^{!n-1}\{K_1^4 - 3K_1^2K_2 + 2K_1K_3 - K_4 + K_2^2\}.$$

Wir sehen aber aus den bis jetzt entwickelten Werthen von $\overset{(n-2)}{y}$, $\overset{(n-3)}{y}$, $\overset{(n-4)}{y}$, dass die Coefficienten der fortlaufenden Potenzen von $\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}$ nichts anderes sind als die in VI. gefundenen Werthe von

$$\frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}}, \quad \frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}}, \quad \frac{\overset{(n-3)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}}, \quad \frac{\overset{(n-4)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}};$$

wir können also allgemein schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \overset{(n-m)}{y} = & \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^m}{[m]^{!m-1}\{[n]^{!n-1}\}^{m-1}} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{m-1}}{[m-1]^{!m-2}\{[n]^{!n-1}\}^{m-2}} . \frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}} \\ & + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{m-2}}{[m-2]^{!m-3}\{[n]^{!n-1}\}^{m-3}} . \frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}} + \ldots + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^2}{[2]^{!1}[n]^{!n-1}} . \frac{\overset{(n-m+2)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}} \\ & + \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\} . \frac{\overset{(n-m+1)}{y}_{-\mu}}{[n]^{!n-1}} + \overset{(n-m)}{y}_{-\mu} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$\overset{\prime}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-1}}{[n-1]^{n-2|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-2}} + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-2}}{[n-2]^{n-3|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-3}} \cdot \frac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}}$$

$$+ \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-3}}{[n-3]^{n-4|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-4}} \cdot \frac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} + \dots + \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{2}}{[2]^{1|}[n]^{n-1|}} \cdot \frac{\overset{\prime\prime\prime}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}}$$

$$+ \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\} \frac{\overset{\prime\prime}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} + \overset{\prime}{y}_{-\mu},$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n}}{\{[n]^{n-1|}\}^{n}} + \dfrac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-1}}{[n-1]^{n-2|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-2}} \cdot \dfrac{\overset{(n-1)}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} \\ \quad + \dfrac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-2}}{[n-2]^{n-3|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-3}} \cdot \dfrac{\overset{(n-2)}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} + \dots + \dfrac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{2}}{[2]^{1|}[n]^{n-1|}} \cdot \dfrac{\overset{\prime\prime}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} \\ \quad + \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\} \cdot \dfrac{\overset{\prime}{y}_{-\mu}}{[n]^{n-1|}} + y_{-\mu}. \end{array}\right\} \quad (16)$$

X. Will man endlich die Funktion y durch alle ihre Ableitungen dargestellt erhalten, so hat man aus VIII.:

$$\overset{(n-2)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{2}}{[2]^{1|}[n]^{n-1|}} + \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_1 + \overset{(n-2)}{y}_{-\mu},$$

$$\overset{(n-3)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{3}}{[3]^{2|}\{[n]^{n-1|}\}^{2}} + \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_1 - \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_2 + \overset{(n-3)}{y}_{-\mu},$$

$$\overset{(n-4)}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{4}}{[4]^{3|}\{[n]^{n-1|}\}^{3}} + \{\overset{(n-3)}{y} - \overset{(n-3)}{y}_{-\mu}\}K_1 - \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_2$$
$$+ \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_3 + \overset{(n-4)}{y}_{-\mu},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{\prime\prime\prime}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-3}}{[n-3]^{n-4|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-4}} + \{\overset{IV}{y} - \overset{IV}{y}_{-\mu}\}K_1 - \{\overset{V}{y} - \overset{V}{y}_{-\mu}\}K_2$$
$$+ - + \dots \pm \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_{n-5} \mp \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_{n-4} + \overset{\prime\prime\prime}{y}_{-\mu},$$

$$\overset{\prime\prime}{y} = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-2}}{[n-2]^{n-3|}\{[n]^{n-1|}\}^{n-3}} + \{\overset{\prime\prime\prime}{y} - \overset{\prime\prime\prime}{y}_{-\mu}\}K_1 - \{\overset{IV}{y} - \overset{IV}{y}_{-\mu}\}K_2$$
$$+ - + \dots \mp \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_{n-4} \pm \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_{n-3} + \overset{\prime\prime}{y}_{-\mu},$$

$$y' = \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n-1}}{[n-1]^{!n-2}\{[n]^{!n-1}\}^{n-2}} + \{y'' - y''_{-\mu}\}K_1 - \{y''' - y'''_{-\mu}\}K_2$$
$$+ - + \dots \pm \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_{n-3} \mp \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_{n-2} + y'_{-\mu},$$

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \frac{\{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}^{n}}{\{[n]^{!n-1}\}^{n}} + \{y' - y'_{-\mu}\}K_1 - \{y'' - y''_{-\mu}\}K_2 \\ & + - + \dots \mp \{\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu}\}K_{n-2} \pm \{\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu}\}K_{n-1} + y_{-\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Das obere Zeichen gilt für ein g e r a d e s, das untere für ein u n g e r a d e s n.

Wir können diesen Gleichungen auch eine andere Gestalt geben, wenn wir bemerken, dass nach I.

$$\overset{(n-1)}{y} - \overset{(n-1)}{y}_{-\mu} = \int \overset{(n)}{y}dx - \int^{-\mu} \overset{(n)}{y}dx = \int_{-\mu}^{x} \overset{(n)}{y}dx,$$

und ebenso:

$$\overset{(n-2)}{y} - \overset{(n-2)}{y}_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} \overset{(n-1)}{y}dx,$$

$$\overset{(n-3)}{y} - \overset{(n-3)}{y}_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} \overset{(n-2)}{y}dx,$$

$$\vdots$$

$$\overset{(n-m)}{y} - \overset{(n-m)}{y}_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} \overset{(n-m+1)}{y}dx,$$

$$\vdots$$

$$y'' - y''_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} y'''dx,$$

$$y' - y'_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} y''dx,$$

$$y - y_{-\mu} = \int_{-\mu}^{x} y'dx;$$

mithin ist:

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{2}}{[2]!^{1}[n]!^{n-1}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-2)}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{3}}{[3]!^{2}\{[n]!^{n-1}\}^{2}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-3)}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{4}}{[4]!^{3}\{[n]!^{n-1}\}^{3}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-2)}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx+K_3\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{IV}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{n-3}}{[n-3]!^{n-4}\{[n]!^{n-1}\}^{n-4}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{V}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{VI}{y}dx$$
$$+\ldots\pm K_{n-5}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx\mp K_{n-4}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{'''}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{n-2}}{[n-2]!^{n-3}\{[n]!^{n-1}\}^{n-3}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{IV}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{V}{y}dx$$
$$+\ldots\mp K_{n-4}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx\pm K_{n-3}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\int_{-\mu}^{x}\overset{''}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{n-1}}{[n-1]!^{n-2}\{[n]!^{n-1}\}^{n-2}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{'''}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{IV}{y}dx$$
$$+\ldots\pm K_{n-3}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx\mp K_{n-2}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx,$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\mu}^{x}\overset{'}{y}dx=\frac{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^{n}}{\{[n]!^{n-1}\}^{n}}+K_1\int_{-\mu}^{x}\overset{''}{y}dx-K_2\int_{-\mu}^{x}\overset{'''}{y}dx\\ +\ldots\mp K_{n-2}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx\pm K_{n-1}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Weil $[1]^{1|1}[n]^{n|n}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx=\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx$, so erhalten wir durch Addition:

$$\{[1]^{1|1}[n]^{n|n}-[2]^{1|1}[n]^{n|n-1}K_1+[3]^{2|2}\{[n]^{n|n-1}\}^2K_2-[4]^{3|3}\{[n]^{n|n-1}\}^3K_3+\ldots\mp\{[n]^{n|n-1}\}^nK_{n-1}\}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx$$

$$+\{[2]^{1|1}[n]^{n|n-1}-[3]^{2|2}\{[n]^{n|n-1}\}^2K_1+[4]^{3|3}\{[n]^{n|n-1}\}^3K_2-\ldots\pm\{[n]^{n|n-1}\}^nK_{n-2}\}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-1)}{y}dx$$

$$+\{[3]^{2|2}\{[n]^{n|n-1}\}^2-\{[4]^{3|3}\{[n]^{n|n-1}\}^3K_1+[5]^{4|4}\{[n]^{n|n-1}\}^4K_2-\ldots\mp\{[n]^{n|n-1}\}^nK_{n-3}\}\int_{-\mu}^{x}\overset{(n-2)}{y}dx$$

$$\vdots$$

$$+\{[n-1]^{n-2|n-2}\{[n]^{n|n-1}\}^{n-2}-\{[n]^{n|n-1}\}^nK_1\}\int_{-\mu}^{x}\overset{''}{y}dx+\{[n]^{n|n-1}\}^n\int_{-\mu}^{x}\overset{'}{y}dx=\frac{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\cdot\left\{\left\{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx\right\}^n-1\right\}}{\int_{-\mu}^{x}\overset{(n)}{y}dx-1}\,. \quad (19)$$

XXXIII.

Miscellen.

Gelegentliche Bemerkung des Herausgebers.

Die schöne Abhandlung des Herrn Oskar Werner in dem vorigen Hefte, welche auch eine grosse Anzahl sehr bemerkenswerther goniometrischer Relationen enthält, veranlasst mich zu der folgenden gelegentlichen Bemerkung.

Herr Oskar Werner bedient sich in dieser Abhandlung durchgängig der Bezeichnung $\sin x^n$, $\cos x^n$, u. s. w. statt der in neuerer Zeit hin und wieder gebräuchlich gewordenen Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w., und nach meiner Ueberzeugung mit dem vollkommensten Rechte. Ich habe schon in mehreren meiner früheren Schriften auf die Unzweckmässigkeit der von französischen Mathematikern eingeführten Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. aufmerksam gemacht, und will meine Gründe für diese Ansicht in der Kürze hier wiederholen.

1. Die Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. ist **streng genommen falsch**, denn $\sin x$, $\cos x$, u. s. w. sind wie alle ähnliche Symbole in der Mathematik einfache Symbole und keineswegs als getrennte oder trennbare Symbole aufzufassen, weshalb man durchaus $\sin x^n$, $\cos x^n$, u. s. w., nicht $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. schreiben muss.

2. Die Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. ist **unpraktisch und unzweckmässig**, am allermeisten auch für den Druck, und nimmt sich schlecht aus, namentlich wenn die Exponenten zusammengesetzte Grössen, wie etwa $8m-2n+6k+5h$ u. s. w. sind, wie man hoffentlich bei Vergleichung zweier Ausdrücke wie

$$\sin^{8m-2n+6k+5h} x \quad \text{und} \quad \sin x^{8m-2n+6k+5h}$$

zugeben wird.

3. Die Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. ist **inconsequent.** Denn wenn man $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. statt $\sin x^n$, $\cos x^n$, u. s. w. schreiben will, müsste man doch der Consequenz wegen wohl auch jedenfalls $\sqrt[n]{}^k x$ statt $(\sqrt[n]{x})^k$, ferner $\Delta^m y$ statt Δy^m *) schreiben, da doch Jeder weiss, dass $\Delta^m y$ in der Mathematik schon eine himmelweit verschiedene, sehr bestimmte und allgemein recipirte Bedeutung erhalten hat. Man schreibt ganz richtig Δy^m, weil man an dem allgemeinen Grundsatze festhält, dass Δy ein einfaches untrennbares Symbol ist.

4. Die Bezeichnung $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. ist **schädlich** für junge Mathematiker, namentlich wenn sie auf Schulen sich schon dergleichen Dinge angewöhnen, weil gerade diejenigen deutschen Mathematiker, welche im trigonometrischen Calcul die grösste Gewandtheit besitzen oder besessen haben, wie Gauss, Bessel, Encke, J. F. Pfaff **), u. s. w. sich, so viel ich weiss, dieser Bezeichnung nie bedient haben, und man doch annehmen muss, dass junge Mathematiker sich dereinst zu dem Studium der classischen Werke dieser Männer, die in dergleichen Dingen als hauptsächlichste Autoritäten gelten müssen, wenden werden. Deshalb sollte man am wenigsten auf **deutschen** Gymnasien, Realschulen, u. s. w. den Schülern dergleichen Dinge angewöhnen.

Ich habe dies hier gelegentlich wieder einmal zur Sprache bringen wollen, zufällig veranlasst durch die schöne Abhandlung des Herrn Oskar Werner, werde übrigens natürlich im Archiv wie bisher auch fernerhin fortfahren, der entgegengesetzten Ansicht ihr Recht widerfahren und jedem Autor bereitwilligst seine Art und Weise zu lassen. Meine Schüler in meinen Vorlesungen verlassen die Schreibart $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. immer sehr bald wieder, wenn ihnen dieselbe auf der Schule leider angewöhnt worden ist, und gerade diejenigen, welche die meiste Gewandtheit und Eleganz im Calcul sich zu erwerben im Stande sind, kommen immer sehr bald zu der aus völliger Ueberzeugung gewonnenen Ansicht, dass sie sich bei $\sin x^n$, $\cos x^n$, u. s. w. unendlich weit besser stehen, als bei $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w. Dies ist wenigstens meine Erfahrung. Da die Subjectivität des Lehrers bei solchen Dingen immer viel thut, mögen vielleicht Andere hiervon abweichende Erfahrungen gemacht haben. G.

*) Soll es $\Delta(y^m)$ heissen, so schreibt man bekanntlich kurz $\Delta . y^m$.

**) Dieser ausgezeichnete Mathematiker eiferte immer sehr gegen $\sin^n x$, $\cos^n x$, u. s. w.

Herr Director Strehlke in Danzig schreibt mir unter dem 21. März 1854 Folgendes:

„Als eine Ergänzung einer früheren Mittheilung über die Zahl π *) lege ich ein Blatt der Elbinger Anzeigen bei, worin die Berechnung der Zahl auf 400 Decimalstellen enthalten ist. Professor Richter schreibt mir, dass über die Richtigkeit der 332sten und 333sten noch ein Zweifel vorhanden ist.“ G.

Es ist nach 4maliger Berechnung in 400 Decimalstellen:

π = 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280
34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095
50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461
28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603
48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066
06315 58817 48815 20920 09882 92540 91715 36436 78925
90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094

Richter.

Auszug aus einem Briefe des Herrn Professor Dr. Wolfers in Berlin an den Herausgeber.

Für die Oberfläche der Zone vom Aequator bis zur Breite φ findet man bekanntlich leicht den Ausdruck:

$$2b^2\pi \sin\varphi \{1+\frac{2}{3}e^2\sin\varphi^2+\frac{3}{5}e^4\sin\varphi^4+\frac{4}{7}e^6\sin\varphi^6+\text{etc.}\},$$

und hieraus für $\varphi = 90^0$ die Oberfläche des halben Sphäroids:

$$(1) \qquad = 2b^2\pi\{1+\frac{2}{3}e^2+\frac{3}{5}e^4+\frac{4}{7}e^6+\text{etc.}\}.$$

Dieser letztere Ausdruck wird weit convergenter, wenn man statt der halben kleinen Axe b die halbe grosse a mittelst

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

einführt, indem alsdann der Ausdruck (1) übergeht in:

---

*) Thl. XXI. S. 119.

$$(2)\cdot\qquad 2a^2\pi\{1-\frac{1}{3}e^2-\frac{1}{3.5}e^4-\frac{1}{5.7}e^6-\text{etc.}\}.$$

Diese zwei Formeln können unter andern als Controlle dienen, wenn man einmal die Oberfläche eines Sphäroids zu berechnen hat.

Berlin den 20. November 1853.

Herr Professor Grunert hat mir ein Schreiben des Herrn Ubbo Meyer mitgetheilt, worin dieser, und zwar mit vollem Rechte, in Bezug auf eine von mir veröffentlichte Ergänzung des Jacobi'schen Theorems die Priorität für sich in Anspruch nimmt. Die erwähnte Arbeit entstand beim ersten Studium der elliptischen Functionen aus dem Bemühen, den Beweis für das von Jacobi hinterlassene Theorem abzukürzen, und wenn Herr Professor Grunert dieselbe aufnahm *), so ist dies wohl nur deshalb geschehen, weil der von mir aufgestellte Ausdruck nicht ganz conform mit demjenigen des Herrn Meyer ist, und weil vielleicht auch der von mir gewählte Gang für einen solchen, der sich lieber der bisherigen Darstellungsweise anschliessen will, einiges Interesse haben könnte. Essen.

Schreiben des Herrn Ubbo H. Meyer an den Herausgeber.

Eine Abhandlung des Herrn Essen über die „Ergänzung des ersten Jacobi'schen Theorems von den elliptischen Functionen" in Ihrem Archive T. XXI. Nr. 20. hat mir Veranlassung zu einigen Bemerkungen gegeben, welche ich die Ehre habe, Ihnen hiermit mitzutheilen.

Wie Sie wissen, kann man, dem Jacobi'schen Theoreme gemäss, die Constanten $\mu, k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ so bestimmen, dass ψ, als Function von φ gegeben durch die Gleichung

(1)

$$\sin\psi=\frac{\sin\varphi}{\mu}\,\frac{(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_2})(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_4})\ldots(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-1}})}{(1-c^2\sin^2\alpha_2\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\alpha_4\sin^2\varphi)\ldots(1-c^2\sin^2\alpha_{p-1}\sin^2\varphi)},$$

*) Ich habe diese und einige andere, auch spätere, Arbeiten des Herrn Essen aufgenommen, weil ihre Selbstständigkeit unverkennbar und weil sie mir eben wegen dieser Unabhängigkeit von anderweitigen Untersuchungen lehrreich zu sein schienen. Sehr lieb ist es mir auch jetzt, dass auf diese Weise die Aufmerksamkeit auf Herrn Ubbo H. Meyer's, dem jedenfalls die Priorität der Erfindung gebührt, treffliche Arbeiten von Neuem hingelenkt wird. G.

der Gleichung

$$(2)\quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \mu \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

Genüge leistet. Es gilt diess aber nur, wenn p eine ungerade Zahl ist. Das Jacobi'sche Theorem würde deshalb ergänzt sein, wenn man durch eine ähnliche Gleichung wie (1) der Gleichung (2) genügen könnte für eine gerade Zahl p.

Nun hat Herr Essen gefunden, dass, wenn für eine gerade Zahl p ψ als Function von φ gegeben ist, durch die Gleichung

$$\cos\psi = \frac{\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-1}}\right)}{(1-c^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi)\ldots(1-c^2\sin^2\alpha_{p-1}\sin^2\varphi)},$$

dadurch nicht der Gleichung (1), sondern der Gleichung

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \mu \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}}$$

genügt wird.

Hieraus geht hervor, dass dadurch keine Ergänzung des Jacobi'schen Theorems gefunden ist, obschon es keine Schwierigkeit hat, aus dem gefundenen Satze eine Ergänzung zu erreichen. Man braucht nämlich nur zu setzen:

$$\cos\psi = \frac{\cos\varpi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varpi}},$$

woraus

$$\sin\psi = \sqrt{1-k^2}\,\frac{\sin\varpi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varpi}},$$

$$\sqrt{1-k^2\cos^2\psi} = \sqrt{1-k^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varpi}};$$

und es findet sich leicht:

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = \int_0^\varpi \frac{d\varpi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varpi}}.$$

Also wird der Gleichung

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \mu \int_0^\varpi \frac{d\varpi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varpi}}$$

Genüge geleistet durch

$$\frac{\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}}=\frac{(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_1})\ldots.(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-1}})}{(1-c^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi)\ldots.(1-c^2\sin^2\alpha_{p-1}\sin^2\varphi)};$$

und um die Ergänzung des Jacobi'schen Theorems zu vollenden, muss man noch aus der letzten Gleichung den Ausdruck von $\sin\psi$ in $\sin\varphi$ ableiten.

Es scheint mir aber durchaus nutzlos, eine solche Transformation vorzunehmen, indem ich glaube, diese Sache im Archive (Thl. XVII. S. 85. sqq.) ziemlich erschöpfend dargestellt zu haben. Das erste der dortigen Theoreme (S. 85. u. 86.) gilt allgemein für jede ganze Zahl; das zweite (S. 93. u. 94.) gilt für eine gerade Zahl und das dritte (S. 94.) für eine ungerade Zahl. Dieses ist das nämliche wie das Jacobi'sche, und so ist das zweite — wenn man es so nennen will — die Ergänzung: denn beide sind im ersten enthalten und werden daraus abgeleitet durch die Zahl, im Besonderen entweder als eine gerade oder als eine ungerade zu betrachten. Aus dem zweiten Theoreme müssen sich also die Resultate des Herrn Essen ableiten lassen. Wirklich braucht man bloss seine Bezeichnung einzuführen.

Setzt man nämlich $\sin\varphi=P_x$, $\cos\varphi=Q_x$, $\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}=R_x$, $\sin\overline{\omega}=P_{\theta x,k}$, $\cos\overline{\omega}=Q_{\theta x,k}$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}=R_{\theta x,k}$, so hat man, da $\partial_x P_x=Q_x R_x$ u. folglich $\partial_x\varphi=\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}$, $\partial_x\overline{\omega}=\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}$ ist, sogleich

$$\theta\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\overline{\omega}}\frac{d\overline{\omega}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}}.$$

Schreibt man überdiess p, μ und $\sin\alpha_m$ statt n, $\frac{1}{\theta}$, $P_{\frac{m}{n}\tau}$, so gehen die Formeln des zweiten Theorems über in:

$$\sin\overline{\omega}=\frac{1}{\mu}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_2})\ldots.(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-2}})}{(1-c^2\sin^2\alpha_2\sin^2\varphi)\ldots.(1-c^2\sin^2\alpha_{p-2}\sin^2\varphi)}$$

$$\cos\overline{\omega}=\frac{(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_1})(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_3})\ldots.(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-1}})}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,(1-c^2\sin^2\alpha_2\sin^2\varphi)\ldots.(1-c^2\sin^2\alpha_{p-2}\sin^2\varphi)}$$

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}$$

$$=\frac{(1-c^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\alpha_3\sin^2\varphi)\ldots.(1-c^2\sin^2\alpha_{p-1}\sin^2\varphi)}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}\,(1-c^2\sin^2\alpha_2\sin^2\varphi)\ldots.(1-c^2\sin^2\alpha_{p-2}\sin^2\varphi)}$$

woraus

$$\cos\psi = \frac{\cos\overline{\omega}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\overline{\omega}}}$$

$$= \frac{(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_1})(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_3})\,....\,(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha_{p-1}})}{(1-c^2\sin^2\alpha_1\sin^2\varphi)(1-c^2\sin^2\alpha_3\sin^2\varphi)....(1-c^2\sin^2\alpha_{p-1}\sin^2\varphi)},$$

und diese ist die nämliche Gleichung des Herrn Essen, welche also ohne Transformation bloss durch Hinschreiben aus den vorigen Formeln abgeleitet wird.

Ich habe diese Bemerkungen nicht gemacht, um die Arbeit des Herrn Essen zu schmälern; denn er wird Mühe genug gehabt haben, die richtige Formel durch Tatonniren zu finden. Mit mir war diess anders, da die Theoreme nicht wie das Jacobi'sche aus der Luft gefallen erscheinen, sondern im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden sich wie von selbst ergaben. (Archiv. T. XVI. S. 395. sqq.) Nicht also um den Herrn Essen zu tadeln, schreibe ich Ihnen, vielmehr möchte ich ihn seiner Geschicklichkeit wegen auffordern, seine Untersuchungen auf diesem Gebiete fortzusetzen; aber damit er sich nicht die Mühe gebe, zu suchen, was ein Anderer schon gefunden hat, würde es ihm vielleicht zu empfehlen sein, auf meine Aufsätze (Archiv. T. XVI. No. 33. T. XVII. No. 3. und No. 19.), die er nicht gelesen zu haben scheint, Rücksicht zu nehmen. Aus dem letzten Aufsatze wird er z. B. sehen können, dass auch für die elliptischen Functionen der zweiten und dritten Art ähnliche Theoreme gefunden sind.

Dass ich nicht dem Herrn Essen, sondern Ihnen diese Bemerkungen mittheile, geschieht erstens, weil ich voraussetze, dass Sie mit dem Herrn Essen in Correspondenz stehen oder wenigstens mit ihm bekannt sind, und es ihm angenehmer sein wird, solche Bemerkungen von einem Bekannten, als von einem Unbekannten zu erfahren; zweitens weil ich doch auch Ihnen die Sachlage vorzulegen wünschte, damit Sie als Herausgeber des Archivs die Veranlassung zu einem Prioritätsstreite, dem ich ganz abgeneigt bin, beseitigen möchten *): Sie sind um so mehr darauf

*) Herr Ubbo H. Meyer wird aber gewiss entschuldigen, dass ich mir die Erlaubniss genommen habe, diesen seinen lehrreichen Brief, den ich vorher auch Herrn Essen mitgetheilt habe, im Archive abdrucken zu lassen. G.

angewiesen, weil beide Abhandlungen in Ihrem Archive abgedruckt erschienen sind.

Schliesslich erlaube ich mir noch eine Bemerkung über die „Berichtigung" (Archiv. T. XXI. S. 344.). Ich habe die Abhandlung des Herrn Professor Dienger (Archiv. T. XI. Nr. 50.), wovon in der Berichtigung die Rede ist, nicht zur Hand, und kann also nicht beurtheilen, ob die dort gefundenen Formeln richtig sind; so viel ist aber gewiss, dass die in der Berichtigung mitgetheilten Formeln es nicht sind.

Es ist nämlich nicht bloss $x=(m\,\mathrm{sn}\,a)^2$, sondern auch $x=\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)^2$ eine Wurzel der Gleichung

$$x^2-\frac{2}{1+\mathrm{cn}\,2a}x+m^2\frac{1-\mathrm{cn}\,2a}{1+\mathrm{cn}\,2a}=0.$$

Die richtigen Formeln und deren Herleitung habe ich gezeigt im Archive T. XVII. S. 103.: man braucht bloss $\mathrm{sn}\,a$, $\mathrm{cn}\,a$, $\mathrm{dn}\,a$, m statt P_a, Q_a, R_a, c zu schreiben, um in der Bezeichnung des Herrn Dienger zu bekommen:

$$(\mathrm{sn}\,a)^2=\frac{1-\mathrm{cn}\,2a}{1+\mathrm{dn}\,2a}=\frac{1}{m^2}\,\frac{1-\mathrm{dn}\,2a}{1+\mathrm{cn}\,2a},$$

$$(\mathrm{cn}\,a)^2=\frac{\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{cn}\,2a}{1+\mathrm{dn}\,2a}=\frac{1-m^2}{m^2}\,\frac{1-\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{dn}\,2a-\mathrm{cn}\,2a},$$

$$(\mathrm{dn}\,a)^2=\frac{\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{cn}\,2a}{1+\mathrm{cn}\,2a}=\overline{1-m^2}\,\frac{1-\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{dn}\,2a-\mathrm{cn}\,2a}.$$

Eine Correctur der Berichtigung wird also jedenfalls nothwendig sein *).

Groningen, 23. März 1854. Ubbo H. Meyer.

Von dem Herausgeber.

Wenn man die auf den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC senkrecht stehenden Höhen dieses Dreiecks respective durch α, β, γ und etwa die Entfernungen des Fusspunktes der Höhe α von den Spitzen C und B des Dreiecks respective durch x und $a-x$, welche Differenz positiv oder negativ sein kann,

*) Man vergleiche auch Archiv. Thl. XXII. S. 362. G.

bezeichnet; so hat man nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie die beiden Gleichungen:

$$\cos b = \cos\alpha\cos x,$$

$$\cos c = \cos\alpha\cos(a-x);$$

oder

$$\cos b = \cos\alpha\cos x,$$

$$\cos c = \cos\alpha\cos a\cos x + \cos\alpha\sin a\sin x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\cos x = \frac{\cos b}{\cos\alpha},\quad \sin x = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\cos\alpha\sin a}.$$

Also ist

$$\left(\frac{\cos b}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos c - \cos a\cos b}{\cos\alpha\sin a}\right)^2 = 1$$

oder

$$\sin a^2\cos b^2 + (\cos c - \cos a\cos b)^2 = \cos\alpha^2\sin a^2,$$

folglich

$$\cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a\cos b\cos c = \cos\alpha^2\sin a^2.$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle:

$$\sin\alpha^2\sin a^2 = 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c,$$

und folglich zugleich auch für die beiden anderen Seiten und die denselben entsprechenden Höhen:

$$\sin\alpha\sin a = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c},$$

$$\sin\beta\sin b = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c},$$

$$\sin\gamma\sin c = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c}.$$

Also ist

$$\sin\alpha\sin a = \sin\beta\sin b = \sin\gamma\sin c$$

oder:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \sin b : \sin a,$$

$$\sin\beta : \sin\gamma = \sin c : \sin b,$$

$$\sin\gamma : \sin\alpha = \sin a : \sin c.$$

Im sphärischen Dreieck verhalten sich also die Sinus der Höhen umgekehrt wie die Sinus der entsprechenden Grundlinien, d. h. wie die Sinus der Seiten, auf denen die Höhen senkrecht stehen.

Im ebenen Dreieck verhalten sich bekanntlich die Höhen umgekehrt wie die entsprechenden Grundlinien.

Ueber den drei Seiten des Dreiecks ABC (Taf. VI. Fig. 5.) seien ausserhalb desselben Quadrate beschrieben und deren Mittelpunkte A', B', C' durch gerade Linien verbunden, wodurch das Dreieck $A'B'C'$ entsteht. Man soll die Flächenräume der beiden Dreiecke $ABC = \Delta$ und $A'B'C' = \Delta'$ mit einander vergleichen.

Man bezeichne wie gewöhnlich die Seiten des Dreiecks ABC durch a, b, c und ihre Gegenwinkel durch A, B, C, so ist

$$A'B = A'C = \frac{a}{\sqrt{2}},\quad B'C = B'A = \frac{b}{\sqrt{2}},\quad C'A = C'B = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

und

$$\angle B'AC' = 90^0 + A,\quad \angle C'BA' = 90^0 + B,\quad \angle A'CB' = 90^0 + C.$$

Nun ist offenbar:

$$AB'CA'BC' = \Delta + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$= \Delta + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

und

$$AB'CA'BC' = \Delta' + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}.\sin(90^0 + A)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}.\sin(90^0 + B)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}.\sin(90^0 + C)$$

$$= \Delta' + \frac{1}{4}(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C).$$

Dies giebt die Gleichung:

$$\Delta + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \Delta' + \frac{1}{4}(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$$

oder

$$\Delta' - \Delta = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 - bc\cos A - ca\cos B - ab\cos C).$$

Nun ist aber bekanntlich

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$

also

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C),$$

folglich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C).$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\Delta' - \Delta = \frac{1}{4}(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C).$$

Nun ist

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

also, wenn man hiermit in die vorstehende Gleichung dividirt:

$$\frac{\Delta'}{\Delta} - 1 = \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C),$$

folglich

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C).$$

Diese Relation findet man aus dem „Programme de l'université de Dublin. 1848." mitgetheilt in den Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem et Gerono. T. VIII. 1849. p. 47.

Weil $A + B + C = 180^0$ ist, so ist

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} - \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}$$
$$= \frac{\sin(A+B)^2 - \sin A\sin B\cos(A+B)}{\sin A\sin B\sin C}$$
$$= \frac{1 - \cos(A+B)\{\cos(A+B) + \sin A\sin B\}}{\sin A\sin B\sin C}$$
$$= \frac{1 + \cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Also ist auch

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=1+\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{2\sin A\sin B\sin C}$$

oder

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=1+\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C+\cot A\cot B\cot C).$$

Ist $A=90^0$, so ist

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=1+\frac{1}{2}\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C=1+\frac{1}{2\sin B\sin C}$$

$$=1+\frac{1}{2\sin B\cos B}=1+\frac{1}{2\sin C\cos C}$$

$$=1+\frac{1}{\sin 2B}=1+\frac{1}{\sin 2C}$$

$$=\frac{1+\sin 2B}{\sin 2B}=\frac{1+\sin 2C}{\sin 2C}$$

$$=\frac{1+\cos(90^0-2B)}{\sin 2B}=\frac{1+\cos(90^0-2C)}{\sin 2C}$$

$$=\frac{2\cos(45^0-B)^2}{\sin 2B}=\frac{2\cos(45^0-C)^2}{\sin 2C}.$$

Für $B=C=45^0$ ist im vorhergehenden Falle

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=2,\quad \varDelta'=2\varDelta.$$

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist $A=B=C=60^0$, also

$$\sin A=\sin B=\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos A=\cos B=\cos C=\frac{1}{2},$$

$$\cot A=\cot B=\cot C=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

also

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}}=1+\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

G.

Die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel sei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

und x, y seien die Coordinaten eines gegebenen Punktes in derselben, so ist bekanntlich

$$\frac{xu}{aa} \pm \frac{yv}{bb} = 1$$

die Gleichung der durch den Punkt (xy) gehenden Berührenden. Fällen wir nun vom Mittelpunkte der Curve auf diese Berührende ein Perpendikel, so hat dessen Gleichung die Form

$$v = Au,$$

und nach den Lehren der analytischen Geometrie ist

$$1 \mp \frac{b^2x}{a^2y} A = 0,$$

also

$$A = \pm \frac{a^2y}{b^2x},$$

folglich die Gleichung des in Rede stehenden Perpendikels:

$$v = \pm \frac{a^2y}{b^2x} u.$$

Daher hat man jetzt, wenn u, v die Coordinaten des Durchschnittspunkts des Perpendikels und der Berührenden bezeichnen, zu deren Bestimmung die beiden Gleichungen:

$$v = \pm \frac{a^2y}{b^2x} u, \quad \frac{xu}{aa} \pm \frac{yv}{bb} = 1.$$

Will man nun die Gleichung des geometrischen Orts des Durchschnittspunkts des Perpendikels und der Berührenden finden, so muss man aus diesen beiden Gleichungen x und y bestimmen und die erhaltenen Werthe in die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

einführen. Man bringt aber die beiden obigen Gleichungen leicht auf die Form:

$$\frac{b^2x}{a^2y} v = \pm u, \quad \frac{a^2y}{b^2x} v = \pm \frac{a^2}{x} \mp u;$$

oder auf die Form:

$$\frac{a^2y}{b^2x} u = \pm v, \quad \frac{b^2x}{a^2y} u = \frac{b^2}{y} \mp v;$$

und erhält hieraus sogleich durch Multiplication:

$$v^2=\frac{a^2u}{x}-u^2,\quad u^2=\pm\frac{b^2v}{y}-v^2;$$

also

$$x=\frac{a^2u}{u^2+v^2},\quad y=\pm\frac{b^2v}{u^2+v^2};$$

folglich

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2u}{u^2+v^2}\right)^2\pm\frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2v}{u^2+v^2}\right)^2=1,$$

d. i.

$$\frac{a^2u^2\pm b^2v^2}{(u^2+v^2)^2}=1$$

oder

$$a^2u^2\pm b^2v^2=(u^2+v^2)^2.$$

Für $a=b$, d. h. für den Kreis oder die gleichseitige Hyperbel wird diese Gleichung:

$$a^2(u^2\pm v^2)=(u^2+v^2)^2.$$

Für den Kreis ist also

$$a^2=u^2+v^2,$$

d. h. der Ort ein dem gegebenen Kreise der Grösse und Lage nach gleicher Kreis, wie es sein muss. Für die gleichseitige Hyperbel ist

$$a^2(u^2-v^2)=(u^2+v^2)^2$$

oder

$$u^2+v^2=a\sqrt{u^2-v^2},$$

d. h. der Ort eine Lemniscate.

G.

Literarischer Bericht
LXXXV.

Nautik.

Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie an der k. k. Marine-Akademie. Von Dr. F. Schaub, prov. Professor der nautischen Astronomie an der k. k. Handels- und nautischen Akademie und der k. k. Marine-Akademie in Triest. Triest, Buchdruckerei des Oesterreichischen Lloyd. Triest. 1853. 8.

Es ist höchst erfreulich zu sehen, wie mit dem Aufschwunge der Schifffahrt in Deutschland auch die nautischen Wissenschaften eine immer grössere Anzahl von Bearbeitern in unserem Vaterlande gefunden haben. Ein neues Zeichen dieser Wahrnehmung ist der vor uns liegende treffliche „Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie an der k. k. Marine-Akademie zu Triest von Herrn Professor Dr. Schaub daselbst", den wir daher etwas ausführlicher, als sonst in diesen Literarischen Berichten zu geschehen pflegt, besprechen wollen.

Jeder, wer mit den nautischen Wissenschaften nur etwas näher bekannt ist, weiss, dass der Schiffer den Ort des Schiffes auf dem Meere auf doppelte Weise zu bestimmen pflegt: einmal durch Messungen auf der Erde mittelst der Logleine, des Kompasses und des Stunden- oder Minuten-Glases; und dann durch Beobachtungen am Himmel mittelst des Sextanten, des Spiegelkreises, Prismenkreises u. s. w. und des Chronometers. Die erste Methode, deren Bestimmungen natürlich immer nur relative sein können, ist in gewisser Rücksicht den Operationen des Feldmessers

vergleichbar, dessen Messkette und Boussole der Logleine und dem Kompass des Schiffers entsprechen; die zweite Methode entspricht den astronomischen Ortsbestimmungen, welche der Astronom auf seiner Sternwarte vornimmt, und unterscheidet sich von diesen nur dadurch, dass das Observatorium des Seefahrers auf einem sehr schwankenden Grunde errichtet ist, wodurch natürlich auch eine besondere Eigenthümlichkeit der astronomischen Instrumente des Schiffers bedingt wird, die, weil sie bei den Beobachtungen nur mit freier Hand gehalten und gebraucht werden können, sämmtlich auf das Princip der Reflexion gegründet sein müssen, wobei der Meerhorizont die Stelle des künstlichen Quecksilberhorizonts des Astronomen vertritt. Der Inbegriff aller der letzteren Methoden nun, durch welche der Ort des Schiffes mittelst astronomischer Beobachtungen am Himmel bestimmt wird, verbunden mit der für den Schiffer höchst wichtigen genauen Kenntniss der Einrichtung und des Gebrauchs der betreffenden Instrumente, ist die „nautische Astronomie“, eine überaus wichtige Wissenschaft, von welcher ein grosser Theil des Glücks und der Wohlfahrt des Menschengeschlechts abhängt, wobei nicht unbeachtet bleiben darf, dass die Resultate der Methoden der nautischen Astronomie weit genauer sind als die durch Messungen auf der Erde mittelst des Logs, nebst dem Minutenglase, und des Kompasses erhaltenen relativen Ortsbestimmungen, das sogenannte Besteck, weshalb auch diese letzteren von dem Schiffer nur die Gissung (Schätzung), ja wohl auch die todte oder blinde Rechnung genannt zu werden pflegen, wonach er zwischen gegisster und beobachteter (d. h. astronomisch bestimmter) Breite und Länge zu unterscheiden gewohnt ist.

Der so eben in ihrem Verhältniss zu den übrigen Theilen der Schifffahrtskunde etwas näher charakterisirten nautischen Astronomie ist nun der vorliegende Leitfaden lediglich gewidmet, und wir müssen gestehen, dass wir demselben in Bezug auf zweckmässige Kürze, Einfachheit und Deutlichkeit der Darstellung, dem Gegenstande ganz angemessene strengwissenschaftliche Anordnung, überhaupt in Bezug auf den in demselben uns in sehr erfreulicher Weise überall entgegen tretenden wissenschaftlichen Geist, der in den Lehrbüchern der Schifffahrtskunde leider nur zu oft vermisst wird *), endlich in Bezug auf höchst verständige Aus-

*) M. s. z. B. A complete Epitome of Practical Navigation by J. W. Norie, welches in England so beliebt ist, dass uns schon die fifteenth (stereotype) Edition (London 1852) vorliegt, aber in der That eigentlich die ganze Schifffahrtskunde zu wenig mehr als einem blossen Gedächtnisskram macht.

wahl des praktisch wirklich Brauchbaren, ein geeigneteres Compendium für den Unterricht in der nautischen Astronomie auf Marine-Akademieen und ähnlichen Lehranstalten nicht zur Seite zu stellen wissen. Freilich aber nimmt dieser Leitfaden auch ein ziemliches Maass mathematischer Vorkenntnisse in Anspruch, indem er ausser einer vollständigen Kenntniss der sogenannten Elementar-Mathematik — natürlich und hauptsächlich mit Einschluss der sphärischen Trigonometrie — auch eine genügende Bekanntschaft mit den Anfangsgründen der Differentialrechnung und der Lehre von den Kegelschnitten voraussetzt, woraus zugleich ein sicherer Schluss auf die Vortrefflichkeit der Lehranstalten, welchen der Herr Verfasser seine Kräfte in erfreulichster Weise widmet, und auf die tüchtige wissenschaftliche — theoretische und praktische — Bildung der kaiserl. österreichischen Marineoffiziere gezogen werden kann. Uebrigens sind im Interesse derjenigen nautischen Lehranstalten, welche sich dieses Leitfadens bedienen wollen, aber nur ein geringeres Maass mathematischer Vorkenntnisse als die k. k. Marine-Akademie zu Triest bei ihren Zöglingen vorauszusetzen sich berechtigt halten dürfen, alle diejenigen Partieen des Buchs, welche die Kenntniss der Differentialrechnung, der Lehre von den Kegelschnitten, u. s. w. in Anspruch nehmen, mit kleinerer Schrift gedruckt, und die ganze Darstellung ist so gehalten worden, dass alles Uebrige auch ohne diese, höhere Kenntnisse voraussetzenden, Theile des Buchs vollständig verständlich ist, so wie denn überall, wie wir schon bemerkt haben, der Herr Verfasser sich einer möglichst einfachen und leichten, aber doch überall strengwissenschaftlichen, Darstellung befleissigt hat.

Um nun noch den Inhalt dieses allen nautischen Lehranstalten sehr zu empfehlenden Leitfadens etwas genauer anzugeben, bemerken wir, dass der Herr Verfasser mit einer sehr deutlichen Erläuterung der nothwendigsten astronomischen Lehren — natürlich und vorzüglich auch der verschiedenen Arten der Zeit, der Zeitgleichung u s. w. — beginnt. Hierauf wendet er sich zu der Einrichtung und dem Gebrauch der Ephemeriden, wobei er mit Recht als ein in Bezug auf Vollständigkeit und praktische Zweckmässigkeit, auch nach unserer Meinung, noch unübertroffenes Muster den Nautical Almanac zu Grunde legt, und hierbei zugleich auch in §. 23. auf S. 22—S. 26. der Theorie der Interpolation seine Aufmerksamkeit widmet, letzteres in sehr einfacher und verständlicher Weise. Weil nun alle astronomische Beobachtungen auf der See hauptsächlich auf Höhenmessungen der Gestirne beruhen, so werden zunächst die verschiedenen Correctionen: Refraction, Kimmtiefe, Parallaxe (diese auch mit Rück-

sicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde) und Halbmesser, welche an jeder unmittelbar gemessenen Höhe, bevor sie in die Rechnung eingeführt werden darf, angebracht werden müssen, in einer für den hier beabsichtigten Zweck völlig ausreichenden Weise deutlich besprochen und späterhin die zur Höhenmessung erforderlichen Instrumente, hauptsächlich der Sextant und die trefflichen patentirten Pistor'schen Reflexions-Instrumente, natürlich mit besonderer Rücksicht auf die Fehler, denen dieselben unterworfen sind, und die erforderlichen Correctionen, ihrer Einrichtung und ihrem Gebrauche nach beschrieben. Sehr zweckmässig hat der Herr Verfasser der sorgfältigen Betrachtung des so wichtigen sphärischen Dreiecks zwischen Zenith, Pol und Gestirn, auf welches fast alle astronomischen Beobachtungen zurückkommen, und das wir selbst daher schon längst in unseren astronomischen Vorlesungen, in Ermangelung eines besseren, mit dem besonderen Namen des charakteristischen sphärischen Dreiecks auszuzeichnen uns erlaubt haben, — gewiss zum grossen Vortheil für seine Schüler, — ein besonderes Kapitel gewidmet. Dann folgen die verschiedenen Methoden der Zeitbestimmung: A. Gebrauch der Chronometer. B. Zeitbestimmung durch eine einzelne Höhe. C. Zeitbestimmung durch correspondirende Höhen; und hierauf die verschiedenen, für den Gebrauch auf der See zweckmässigen Methoden der Breitenbestimmung: A. durch eine Meridianhöhe; B. durch Circummeridianhöhen; C. durch zwei Höhen ausser dem Meridian und die Zwischenzeit (Methoden von Douwes und Littrow, mit Rücksicht auf die Veränderung des Orts des segelnden Schiffes während der Zwischenzeit der Beobachtungen); durch den Polarstern. Hieran schliessen sich, in natürlicher organischer Gliederung, die beiden auf der See vorzugsweise anwendbaren Methoden der Längenbestimmung: A. durch Chronometer; B. durch Monddistanzen. Zur Reduction der Monddistanzen sind als besonders einfach die Methode von Bremiker (Astron. Nachr. Nr. 716.) und die von Witschell gelehrt worden, wobei wir jedoch den Wunsch auszusprechen nicht unterlassen wollen, dass es dem Herrn Verfasser gefallen haben möchte, die Borda'sche Methode nicht ganz zu übergehen, wenn auch nur ihrer historischen Merkwürdigkeit wegen, da sie, — zuerst in der für die Geschichte der nautischen Astronomie höchst wichtigen Schrift: Description et usage du cercle de réflexion etc. Par le Chevalier de Borda. Paris. 1787. 4. p. 76—p. 80. entwickelt, — sich fast in allen späteren Lehrbüchern der Schifffahrtskunde findet; wobei es uns aber nicht in den Sinn kommen kann, dem Herrn Verfasser wegen dieser Auslassung einen Vorwurf zu machen, indem unsere Meinung nur ist, dass manchen

Lehrern an nautischen Lehranstalten die Aufnahme auch dieser Methode angenehm gewesen sein würde. Den Beschluss des Buchs machen die Bestimmung der Variation des Kompasses, wobei wir für weniger kundige Leser bemerken, dass der Schiffer das Variation nennt, was man sonst mit dem Namen der Declination oder Abweichung der Magnetnadel zu bezeichnen pflegt; endlich das Hauptsächlichste über Ebbe und Fluth, die für den Schiffer so wichtige Bestimmung der Hafenzeit, d. h. der Zeit, um welche an einem gegebenen Orte an den Neu- und Vollmondstagen die Fluth später eintritt, als der Meridiandurchgang des Monds an diesem Orte, so wie überhaupt alles Dasjenige, was in dieser Beziehung für die Schifffahrt von Bedeutung ist. Alle vorgetragenen theoretischen Lehren sind durch vollständig ausgerechnete Beispiele genügend erläutert worden.

Man wird aus dem Vorhergehenden entnehmen, dass in dem vorliegenden, in jeder Beziehung, auch in Rücksicht auf seine äussere Ausstattung, sehr ansprechenden und zweckmässigen Buche, welches wir als Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie sehr geeignet und für einen Beweis von der Vortrefflichkeit der Lehranstalt, für welche es vorzugsweise bestimmt ist, überhaupt für ein erfreuliches Zeichen der Zeit halten, Nichts übergangen ist, was für den betreffenden Unterricht irgend von Bedeutung sein kann, weshalb wir nur unserer vollkommensten Ueberzeugung folgen, wenn wir dasselbe nochmals allen Lehrern der Nautik zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen.

Aber Etwas, und zwar etwas sehr Wichtiges, möchte **auf den ersten Anblick** doch mancher Lehrer der nautischen Astronomie in diesem Leitfaden vermissen. Es ist nämlich allgemein gewöhnlich geworden, den Lehrbüchern der Navigation eine grössere oder geringere Anzahl nautischer Tafeln beizufügen. Dies hat unser Herr Verfasser unterlassen, und zwar nach unserer Meinung mit vollstem Rechte. Denn erstens gehören diese Tafeln an sich nicht in das Lehrbuch, und es wird sowohl der Gebrauch des Lehrbuchs durch die angehängten Tafeln, als noch vielmehr der Gebrauch der Tafeln durch das denselben vorangehende Lehrbuch, wegen des grossen Umfangs, den das Buch durch diese Verbindung nothwendig erhalten muss, sehr unbequem gemacht. Zweitens aber, und das ist in diesem Falle die Hauptsache, lag dem Herrn Verfasser bei Abfassung seines Leitfadens eine treffliche Sammlung nautischer Tafeln schon vor, die er seinem Buche in zweckmässigster Weise zu Grunde legen, an welche er das Lehrbuch anschliessen konnte, was er auch in der Vorrede besonders zu bemerken nicht unterlassen hat. Hierin finden

wir eine natürliche Veranlassung, mit der vorstehenden Anzeige die Anzeige des folgenden Werks zu verbinden:

Nautische Tafeln, der k. k. Kriegsmarine gewidmet. Triest, 1853. 12°.

Wenn auch der hohe Herausgeber dieser in jeder Beziehung trefflichen und ausgezeichneten Tafeln Sich auf dem Titel nicht genannt hat, so glauben wir doch, da die Sache in österreichischen Zeitungen offen besprochen worden ist, die schuldige Bescheidenheit und Ehrerbietung nicht zu verletzen, wenn wir den Namen desselben hier nicht verschweigen. Der Herausgeber dieser Tafeln, welche alle Offiziere der k. k. österreichischen Kriegsmarine als Geschenk erhalten, ist Seine kaiserl. königl. Hoheit, der Durchlauchtigste Herr Erzherzog Ferdinand Maximilian von Oesterreich, der Bruder Seiner Majestät des jetzt regierenden Kaisers von Oesterreich, welcher in der k. k. österreichischen Marine den Rang eines Fregatten-Kapitains bekleidet. Möchte es auch in diesem Falle fast unbescheiden erscheinen, über das vorliegende Werk ein Urtheil abzugeben und näher zu begründen, so können wir uns doch nicht versagen, hier auszusprechen, wie sehr sich jedes deutsche Herz erhoben fühlen muss, wenn es bei Personen, welche die Vorsehung auf den höchsten Gipfel der Macht und der Ehre gestellt hat, eine so tiefe theoretische und praktische Kenntniss eines wissenschaftlichen oder technischen Fachs, so vielen Eifer für dessen allseitige Förderung erblickt, wie aus dem uns vorliegenden obigen Buche in deutlichster Weise hervorleuchten.

Diese, in kleinem, für ihren Zweck äusserst bequemem Format gedruckten Tafeln haben folgenden Inhalt: I. Logarithmen der Zahlen. Diese Tafeln erstrecken sich, natürlich mit Einschluss der nöthigen Proportionaltheile, von 1 bis 10000. II. Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten von Minute zu Minute. — Die Logarithmen in diesen beiden Tafeln sind fünfstellige und die Tafeln selbst sind äusserst einfach und bequem eingerichtet, so dass sie auch bei andern als nautisch-astronomischen Rechnungen sehr vortheilhafte Anwendung finden können, indem es längst anerkannt ist, dass fünfstellige Logarithmen für nautische und auch für viele andere Zwecke vollständig ausreichend sind und besondere Bequemlichkeit gewähren. Die meisten anderen nautischen Tafeln enthalten, um den Schiffern die Kenntniss der Rechnung mit Logarithmen zu ersparen, auch die sogenannten natürlichen Linien; dass diese hier ganz weggelassen werden konnten, ist wieder ein Beweis von der tüchtigen wissenschaftlichen

Vorbildung der Offiziere der k. k. österreichischen Marine. III. Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit. IV. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit. V. Verwandlung des Bogens in Zeit. VI. Verwandlung der Zeit in Bogen. VII. Winkel der Compassstriche mit dem Meridiane. VIII. Breitenunterschiede und Abweichungen nach Strichen. IX. Verwandlung der Abweichung in Längenunterschied. X. Vergrösserte Breiten. XI. Mittlere Refraction. XII. Correction der Refraction für Temperatur. XIII. Correction der Refraction für Barometerstand. XIV. Halbmesser und Höhenparallaxe der Sonne. XV. Kimmtiefe. XVI. Logarithmen für correspondirende Sonnenhöhen. XVII. Zur Reduction auf den Meridian. XVIII. Breitenbestimmung durch den Polarstern. XIX. Vergrösserung des Mondhalbmessers. XX. Verkürzung des verticalen Halbmessers. XXI. Verkürzung des schrägen Halbmessers. XXII. Correction der Horizontal-Parallaxe des Mondes wegen Abplattung der Erde. XXIII. Unterschied der geographischen und geocentrischen Breite. XXIV. Höhenparallaxe des Mondes. XXV. Erste Verbesserung der durch Approximation berechneten wahren Monddistanz. XXVI. Zweite Verbesserung der durch Approximation berechneten wahren Monddistanz. XXVII. Halbe Tag- und Nachtbogen. XXVIII. A. Morgen- und Abendweiten. B. Correction der Morgen- und Abendweiten wegen Refraction und Kimmtiefe. XXIX. Zeitgleichung im mittleren Mittage. XXX. Mittlere Rectascension der Sonne. XXXI. Declination der Sonne. XXXII. Halbmonatliche Ungleichheit der Zeit des hohen Wassers. XXXIII. Breite und Länge der vorzüglichsten Seestädte und Landspitzen, Hafenzeiten und Höhe der Springfluthen. XXXIV. Vergleichung einiger Längenmaasse. Anhang. Kurze Anleitung zur Auflösung der wichtigsten nautischen Aufgaben.

Eine sehr deutliche Erklärung der Tafeln, in welcher auch die Formeln, auf die ihre Berechnung sich gründet, angegeben werden, ist denselben vorangeschickt.

Jeder Kundige sieht auf den ersten Blick, mit welcher Vollständigkeit, Umsicht und tiefen Kenntniss des praktischen Bedürfnisses in diesen schönen Tafeln, — die selbst den Gebrauch einer Ephemeride zum Theil entbehrlich machen, ja auch bei nicht bloss für das nautische Bedürfniss angestellten astronomischen Beobachtungen mit Nutzen gebraucht werden können, — ohne über den Kreis des wirklich Anwendbaren und Anwendung Findenden hinauszugehen, Alles zusammengestellt ist, was dem Seefahrer irgend erwünscht sein kann, und wir wüssten in der That, um sich eine gründliche wissenschaftliche Kenntniss der nautischen Astronomie, in theoretischer und praktischer Rücksicht,

zu erwerben, keine bessern Hülfsmittel zu empfehlen, als den obigen Leitfaden der nautischen Astronomie und diese ausgezeichneten Tafeln.

Ganz besondere Freude macht es uns im Interesse unserer Leser endlich, diese Anzeige mit den folgenden Worten des Herrn Verfassers des Leitfadens für den Unterricht in der Nautischen Astronomie aus der Vorrede zu demselben schliessen zu können: „Die im Texte citirten Nummern der Tafeln beziehen sich auf das Werk: „„Nautische Tafeln, der k. k. Kriegsmarine gewidmet““, welches sich in den Händen aller Offiziere, Cadetten und Zöglinge der k. k. Kriegsmarine befindet. Durch die hohe Gnade des Herausgebers jener Tafeln bin ich in die Lage gesetzt, auch denjenigen Lesern des Leitfadens, welche die Tafeln noch nicht besitzen, dieselben unentgeltlich zu verabfolgen, wenn sie sich durch ihre Buchhandlung an mich wenden wollen.“

Mögen diese Werke den von ihren Herausgebern beabsichtigten Nutzen im vollsten Maasse und in den weitesten Kreisen stiften!

Literarischer Bericht
LXXXVI.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (zu Wien). Dritter Jahrgang. 1853. — Vierter Jahrgang. 1854. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei.

Die beiden ersten Jahrgänge dieses Almanachs sind im Literarischen Bericht Nr. LXVIII. S. 873. und Nr. LXXVII. S. 961. angezeigt worden. So wie jene beiden ersten Jahrgänge enthalten auch diese beiden neuen Jahrgänge, ausser den an sich interessanten Nachrichten über die k. k. Akademie der Wissenschaften, reichhaltige Beiträge zur mathematischen und naturwissenschaftlichen Literatur, und verdienen in dieser Beziehung jedenfalls sorgfältige Beachtung. Ferner enthält der Jahrgang 1853 einen interessanten Aufsatz des Herrn Professor Kreil: „Die Meteorologie in Oesterreich", so wie, neben den Verzeichnissen der Schriften anderer Mitglieder der Akademie, auch ein vollständiges Verzeichniss aller Werke und Abhandlungen Leopold v. Buch's. — Jahrgang 1854 enthält einen schönen Vortrag Sr. Excell. des Hrn. Ministers v. Baumgartner: „Ueber die Wissenschaften des Geistes und deren Verhältniss zu den Wissenschaften der Natur; ferner eine sehr interessante Rede des Herrn Professor Unger: „Die Pflanze und die Luft" und den sehr ausführlichen Bericht des General Sekretärs der Akademie, des Herrn Prof. Dr. Anton Schrötter, über die Wirksamkeit der

Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften und die in derselben seit 30. Mai 1852 vor sich gegangenen Veränderungen, welcher von den Arbeiten der Kaiserlichen Akademie ein höchst erfreuliches Bild liefert und deutlich zeigt, wie kräftig und eifrig durch dieselbe seit der Zeit ihrer Gründung die Wissenschaften nach den verschiedensten Richtungen hin gefördert worden sind. Wir empfehlen diese Almanache wegen ihres mehrfach interessanten Inhalts nochmals der Beachtung unserer Leser.

In den Gelehrten Anzeigen, herausgegeben von Mitgliedern der Kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1853. Nr. 68., Nr. 69. und Nr. 70. ist die Rede abgedruckt, welche der Vorstand der Kön. Akademie, Herr Geheime Rath v. Thiersch, am 26sten November zur Vorfeier des auf den 28sten November fallenden Geburtstages Sr. Majestät des Königs von Bayern gehalten hat. In dieser sehr schönen Rede, welche den vielfachen Schutz und die Förderung, die des Königs von Bayern Majestät den Wissenschaften in grossartigster Weise zu Theil werden lassen, in würdigster Weise schildert, werden auch die wissenschaftlichen und sonstigen Verdienste des jüngst verstorbenen Dominique François Jean Arago, geboren in der Nähe von Perpignan am 26. Februar 1786, zwar kurz, aber doch in so interessanter Weise geschildert, dass wir unsere Leser darauf hinzuweisen nicht unterlassen können.

In den Unterhaltungen für Dilettanten und Freunde der Astronomie, Geographie und Meteorologie, herausgegeben von Dr. G. A. Jahn. Jahrgang 1853. Nr. 19. 20. 21. 22. 24. 26. 27. 28. 31. 35. 38. 39. 40. 43. 44. findet man eine ausführliche Lebensbeschreibung des der Wissenschaft leider zu früh entrissenen trefflichen Jos. Joh. v. Littrow, auf welche wir unsere Leser aufmerksam machen. Dieselbe ist ein Auszug aus der von Herrn Director C. L. v. Littrow in Wien verfassten Lebensbeschreibung seines verstorbenen Vaters, die sich im III. Bande von „J. J. v. Littrow's vermischten Schriften. Stuttgart 1846.“ findet.

Arithmetik.

Die unbestimmte Analytik. Von Doctor Hermann Scheffler. Erste Abtheilung. 1 Rtlr. 15 Sgr. Zweite Abtheilung. 1 Thlr. 10 Sgr. Hannover. Helwing. 1854. 8.

Der Herr Verfasser hat in diesem empfehlenswerthen Werke die unbestimmte Analytik mit Einschluss der Theorie der Zahlen einer neuen Behandlung unterworfen, insbesondere ein neues Lehrbuch dieses interessanten Theils der reinen Mathematik geliefert, welches auch an eigenthümlichen Untersuchungen nicht arm ist, und dadurch einen neuen erfreulichen Beweis von dem schon bei verschiedenen anderen Untersuchungen bewährten Scharfsinne des Herrn Verfassers liefert. Die fünf ersten Abschnitte enthalten den mehr elementaren Theil und sind in der ersten Abtheilung zusammengefasst worden, welche auch für sich verkäuflich ist, was jedenfalls der zu wünschenden weiteren Verbreitung des Werkes sehr förderlich sein wird. Die zweite Abtheilung enthält den höheren Theil, hauptsächlich die eigentliche Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen. Ausser diesem allgemeinen Urtheile müssen wir uns leider mit der folgenden Angabe des Hauptinhalts begnügen: I. Endliche Kettenbrüche. II. Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade mit ganzen Zahlen. III. Theorie der Ungleichheiten vom ersten Grade. IV. Unendliche periodische Kettenbrüche. V. Auflösung der unbestimmten Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Unbekannten in ganzen Zahlen. VI. Die Congruenz der Zahlen. VII. Auflösung 1) der homogenen Gleichungen vom zweiten Grade mit drei Unbekannten sowohl in ganzen, wie in rationalen Zahlen und 2) der allgemeinen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen. VIII. Allgemeine Gleichungen vom zweiten Grade mit drei und mehr Unbekannten. IX. Komplexe Zahlen und die daraus gebildeten Kettenbrüche und unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade. X. Unendliche Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen vom zweiten Grade und Grundlehren der Kongruenz in komplexen Zahlen.

Es thut uns leid, den Inhalt nicht noch näher angeben zu können, was eben wegen seiner grossen Reichhaltigkeit in den einzelnen Theilen unmöglich ist. Wir empfehlen das Buch nochmals sorgfältiger Beachtung und sind der Meinung, dass es jetzt kein geeigneteres Hülfsmittel als das vorliegende Buch giebt, wenn man sich eine möglichst streng systematische Uebersicht der gesammten unbestimmten Analytik und Zahlenlehre nach ihrem neueren Zustande verschaffen will, da die Untersuchungen über diesen wichtigen Theil der Analysis in einer grossen Menge einzelner Abhandlungen zerstreut sind. Mag dem Herrn Verfasser auch vielleicht Einiges entgangen sein, so wird man ihm deshalb eben wegen der grossen Menge noch vereinzelt dastehender Untersuchungen einen Vorwurf zu machen nicht geneigt sein. Möge das Werk also, insbesondere als Lehrbuch, die verdiente Beachtung finden.

Die merkwürdigen Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen, ihr Bildungsgesetz und ihr Gebrauch in der unbestimmten Analytik. Von C. A. W. Berkhan, Oberlehrer am Gymnasio zu Blankenburg. Eisleben. Reichardt. 1853. 8. 10 Sgr.

Zahlen a, b, c, welche der Bedingung $a^2+b^2=c^2$ genügen, nennt der Herr Verfasser pythagorische Zahlen, und mit den Eigenschaften dieser Zahlen beschäftigt sich das von uns mit Vergnügen gelesene Schriftchen, in welchem der Herr Verfasser seinen Gegenstand mit Liebe und Sorgfalt in ganz elementarer Weise — und eine andere war ja hier auch gar nicht angebracht — behandelt hat. Wir sind der Meinung, dass die in diesem Schriftchen bewiesenen Sätze und aufgelösten Aufgaben, wenn dieselben auch nicht sämmtlich neu sind, manches Interessante darbieten, und namentlich auch auf Schulen sehr zweckmässig bei dem Unterrichte in der Algebra und unbestimmten Analytik als Uebungen der Schüler benutzt werden können, aus welchem Grunde wir hauptsächlich das Schriftchen der Aufmerksamkeit der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten um so lieber empfehlen, je mehr sich dergleichen kleine Schriften öfters der Beachtung zu entziehen pflegen.

Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Arithmetik und Algebra nebst vier Tafeln über die Vergleichung der vorzüglichsten Maasse, Gewichte und Münzen mit den österreichischen und französischen. Herausgegeben von Dr. Joseph Salomon, ö. o. Professor am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Vierte verbesserte und vermehrte Auflage. Wien. Gerold. 1853. 8. 1 Rthlr. 15 Sgr.

Da diese verdienstliche, sehr reichhaltige Aufgabensammlung längst von der vortheilhaftesten Seite bekannt und vielfach in Gebrauch ist, so glauben wir uns hier mit der Anzeige von dem Erscheinen einer vierten Auflage, zu der wir dem vielfach verdienten Herrn Verfasser von Herzen Glück wünschen, begnügen zu können. Möge dieselbe noch lange fortfahren, zur Förderung des mathematischen Unterrichts auf höheren Lehranstalten beizutragen!

Aufgaben aus der Differenzial- und Integral-Rechnung nebst den dazu gehörigen Auflösungen von James Haddon und James Hann, Lehrern der Mathematik an der King's College School in London. Aus dem Englischen übersetzt von Herrmann Breithaupt. Mit einem Vorwort von Julius Weisbach. Freiberg. Wolf. 1854. 8.

Die vor uns liegende erste Abtheilung hat auch den besonderen Titel:

Aufgaben aus der Differenzial-Rechnung nebst den dazu gehörigen Auflösungen von James Haddon. Mit 4 Figurentafeln. Freiberg. Wolf. 1854. 20 Sgr.

Diese Aufgabensammlung enthält, wie sich bei einem englischen Buche von vorn herein erwarten liess, besonders viele Aufgaben zu der Lehre von den Maximis und Minimis und zu der Lehre von den Curven, überhaupt vorzugsweise geometrische Aufgaben. Die reine Differentialrechnung ist eher dürftig als reich bedacht. Auf Seite 21. ist der allgemeine Ausdruck des Restes der Taylor'schen Reihe zwar angegeben (bei dem Maclaurinschen Satze, Seite 24., fehlt er), aber Beispiele für die Beurtheilung der Grösse des Restes in besonderen Fällen, die bei dem gegenwärtigen Zustande der höheren Analysis nach unserer Ansicht von so grosser Bedeutung sind, finden wir nicht; vielmehr sind die Reihenentwickelungen nur in der gewöhnlichen alten unvollständigen Weise ausgeführt, und über die Convergenz und Divergenz der Reihen findet sich, so weit unsere nur flüchtige Durchsicht reicht, nirgends ein Wort. Wir glauben uns daher mit der Anzeige der Existenz dieses Buchs begnügen zu können; sind es nicht vielleicht die allerdings in ziemlich grosser Anzahl vorkommenden geometrischen Aufgaben, welche die Veranlassung zu der Uebertragung desselben auf deutschen Boden gegeben haben, oder etwa der Grund, dass man eigentlich überhaupt nicht genug solche Aufgabensammlungen haben kann: so wissen wir uns, bei den schon vorhandenen, in mehrfacher Beziehung ausgezeichneten Aufgabensammlungen von Sohncke, Rogner u. A. keine rechte Veranlassung zu dieser Uebersetzung zu denken. Wahrscheinlich wird uns aber darüber Herr Julius Weisbach in seiner bei der zweiten Abtheilung zu erwartenden, unzweifelhaft sehr lehrreichen Vorrede, vielleicht gar mit besonders dankenswerther Rücksicht auf die aus seinen Grundlehren der höheren Analysis. Braunschweig. 1849. hervorgehenden Ansichten über wahre mathematische Strenge und Evidenz, die jedoch wohl schwerlich den Restbetrachtungen in der Differentialrechnung, die wir nun einmal unbedingt für den wesentlichsten Theil der neueren Differentialrechnung halten, Gnade zu Theil werden lassen dürften, genügende Auskunft geben, bis zu deren Erscheinen wir daher unser unmaassgebliches Urtheil mit gewohnter Bescheidenheit zurückhalten wollen.

Geometrie.

Unter dem Titel: „Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden u. s. w. ist von dem Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen, Dr. Zehme, bei Julius Bädeker (Iserlohn und Elberfeld) ein kleines Buch erschienen, welches den Freunden der Mathematik empfohlen zu werden verdient. Der Verfasser nennt wohl mit Recht eine specielle Behandlung der Cycloiden, deren Bedeutung und Wichtigkeit in der Technik bekannt sind, ein didaktisches Bedürfniss für technische Schulen. Allerdings wird Jeder, der die Eigenschaften dieser Curven studirt hat, sich leichter in viele technische Arbeiten und Constructionen hineinfinden, deren Begründung ihm sonst fehlen würde. Hierzu kommt, dass die technischen Lehrbücher viele Constructionen angeben, ohne nur eine derselben elementar zu begründen. Daher muss die Erläuterung der Eigenschaften der Cycloiden in synthetischem Zusammenhange wohl als Bedürfniss, namentlich für technische Schulen anerkannt werden. Auch in anderer Beziehung dürfte das Buch von Nutzen sein. Auf unseren Gewerbeschulen werden die Kegelschnitte gelehrt, sie bilden eine specielle Klasse von Curven, die an ihnen auftretenden Krümmungskreise, Evoluten und Evolventen hingegen haben eine allgemeine Bedeutung. Wegen des Mangels analytischer Vorbildung der Schüler ist es sicher wünschenswerth, dass die Begriffe letzterer Curven an einzelnen Beispielen festgestellt werden, und da kann man kein besseres wählen, als die Cycloiden, wie uns der Verfasser durch die elementare Behandlung derselben zeigt. So hat die Curvenbehandlung auf elementaren technischen Schulen durch das Buch eine Erweiterung und Verallgemeinerung erhalten. Die Art und Weise der Behandlung ist als eine durchaus gelungene zu bezeichnen, in welcher Beziehung wir namentlich auf die eigenthümliche Beweisführung zu den §§. 11., 12., 26. und 27. aufmerksam machen. Den Inhalt betreffend, so scheint sich neben Bekanntem auch manches Neue zu finden, z. B. die harmonischen Beziehungen der Evolute zur Curve, die einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes der Epi- und Hypocycloiden u. dgl. Haben wir bisher hauptsächlich auf den elementaren Theil des Buches Rücksicht genommen, so finden wir die Anreihung des zweiten analytischen Theiles keineswegs unangemessen, da es namentlich für Anfänger von Interesse und Nutzen sein muss, zwei vollkommen parallel gehende Behandlungsweisen desselben Gegenstandes zur Vergleichung neben einander zu haben. Die Ausstattung kann eine treffliche genannt werden.

C. H.

Astronomie.

Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. v. Littrow. Vierte Auflage. Nach dem neuesten Zustande der Wissenschaft bearbeitet von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte zu Wien. Sechste Lieferung. Stuttgart. Hoffmann. 8.

Die fünf ersten Lieferungen dieses Werks sind im Literarischen Berichte Nr. LXXIV., Nr. LXXVIII. und Nr. LXXXIII. angezeigt worden. Diese sechste Lieferung bildet den Schluss des Werkes und enthält die schon in der fünften Lieferung, als vierten Theil der gesammten Astronomie, begonnene Beobachtende Astronomie, also hauptsächlich die Beschreibung und den Gebrauch der astronomischen Instrumente und die Darstellung der verschiedenen Beobachtungsmethoden. Wir wüssten in der That kein Werk zu nennen, aus welchem sich alle Diejenigen, welche nicht Astronomen von Fach sind, eine eben so überaus deutliche Anschauung von der Construction und dem Zweck der verschiedenen astronomischen Instrumente nach ihrem neuesten Zustande und von den verschiedenen Einrichtungen, welche man auf Sternwarten findet, verschaffen könnten, als aus dem vorliegenden, in so vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke. Nachdem der Herr Verfasser den Leser mit den unvollkommenen Werkzeugen, deren sich die Astronomen des Alterthums bedienten, dem Triquetrum des Ptolemäus, dem Astrolabium, den Armillarsphären oder Armillen bekannt gemacht und die Natur und den Zweck der am häufigsten vorkommenden astronomischen Beobachtungen sehr deutlich erläutert hat, geht er über zu der Beschreibung des Mauerquadranten, der dioptrischen Fernröhre, der grossen Spiegeltelescope von Herschel und Rosse, die so wie alle übrigen Instrumente auch in sehr schönen Abbildungen dem Leser zur deutlichsten Anschauung gebracht werden; zu dem Mittagsrohr oder Passagen-Instrumente, dem Dipleidoscop von Dent, dem Passagen-Prisma von Steinheil; den Sonnenuhren, dem Gnomon, wobei die grosse zu Delhi errichtete Sonnenuhr, deren zur Weltaxe paralleler, durch eine Mauer, auf welche eine grosse Treppe hinaufführt, dargestellter Stift nicht weniger als 118 englische Fuss beträgt, abgebildet ist; dem Meridiankreise oder Mauerkreise von Reichenbach und Troughton, dem Theodolit, dem Aequatorial, dem Spiegelsextanten, den verschiedenen Arten der Mikrometer, endlich zu den Pendeluhren und Chronome-

tern, dem Log und anderen nautischen Instrumenten, dem Vernier oder Nonius, u. s. w. Alle diese Instrumente sind nicht bloss im Allgemeinen, sondern nach allen ihren einzelnen Theilen nebst ihren Nebeninstrumenten: Niveau's, Fadenkreuzen, u. s. w. sehr genau beschrieben, und die Bestimmung aller einzelnen Theile ist überall nachgewiesen worden. Ausserdem beschreibt der Herr Verfasser noch die Einrichtung einer Sternwarte in allgemeiner baulicher Beziehung, und hat dazu sehr zweckmässig als Beispiele die grösste und kleinste der jetzt bestehenden berühmteren Sternwarten, nämlich die Sternwarten zu Pulkowa und Altona, deren Grundrisse, so wie auch die äussere Ansicht der ersteren, mitgetheilt worden sind, gewählt. Mit Betrachtungen über den Nutzen der Astronomie wird das Werk geschlossen. Dann folgen aber noch eine grössere Anzahl von Nachträgen, in welchen die während des Drucks gemachten neuen astronomischen Entdeckungen sehr vollständig mitgetheilt werden.

Wir können am Ende dieser Anzeige nur nochmals wiederholen, dass wir das vorliegende, nun beendigte Werk in seiner neuen Gestalt für das vollständigste Werk über Astronomie in populärer Darstellung halten, aus welchem jeder nur mit den allerersten Elementarlehren der Mathematik bekannte Liebhaber der Astronomie sich auf die leichteste, lehrreichste und angenehmste Weise eine sehr vollständige Kenntniss dieser herrlichen Wissenschaft erwerben und einen sehr deutlichen Begriff von allen Arbeiten der Astronomen verschaffen, ja auch sich selbst zu sehr vielen astronomischen Beobachtungen, zu deren Benutzung nicht tiefer gehende mathematische Kenntnisse erfordert werden, geschickt machen kann. Jedenfalls hat der Herr Verfasser durch diese neue Bearbeitung eines der ausgezeichnetsten Werke seines um die Wissenschaft hochverdienten, leider derselben zu früh entrissenen Vaters, so wie auch durch die neue Herausgabe des Himmelsatlasses (s. Literar. Ber. Nr. LXXXIII. S. 3.) ein grosses, die wärmste Anerkennung hervorrufendes Verdienst um unsere Literatur im Allgemeinen, um alle die, welche durch astronomische Studien ohne tiefe mathematische Vorstudien eine höhere geistige Ausbildung sich anzueignen beabsichtigen und eben dadurch um die sehr zu wünschende allgemeinere Verbreitung Geist und Herz so sehr veredelnder astronomischer Kenntnisse unter den gebildeten Ständen erworben. Indem wir dem Herrn Verfasser zu der glücklichen Vollendung dieses so sehr verdienstlichen Werkes von Herzen Glück wünschen, geben wir uns der zuversichtlichen Hoffnung hin, dass seine auf die Ausarbeitung desselben verwandte grosse Mühe durch den Nutzen, den das Werk unzweifelhaft in den wei-

testen Kreisen stiften wird, im reichlichsten Maasse belohnt werden wird.

Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. Von P. A. Hansen. Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. Hirzel. 1853. 1 Rthlr.

Wir müssen uns, dem Zwecke dieser Literarischen Berichte gemäss, leider begnügen, im Folgenden nur den Hauptinhalt dieser an eleganten analytischen Entwickelungen überaus reichen Abhandlung, welche wir mit dem grössten Vergnügen und der vielfachsten Belehrung gelesen haben, mit den eigenen Worten des geehrten Herrn Verfassers in der Kürze anzugeben: „Es zerfällt diese Abhandlung in mehrere Theile, die mit einander in Verbindung stehen. Bezeichnet man den Radius Vector der Ellipse mit r; die wahre, excentrische und mittlere Anomalie bezüglich mit f, ε und g, so werden im §. I. die Producte $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ in Reihen entwickelt, die nach $\cos if$ und bez. $\sin if$ fortschreiten. Im §. II. wird die Entwickelung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung ausgeführt. Im §. III. die Entwickelung von $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$, die sowohl durch die Verbindung des Inhalts der beiden vorigen Paragraphen, wie direct erhalten wird. Der §. IV. giebt die Entwickelung von $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$ nach $\cos hg$ und $\sin hg$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung. Der §. V. enthält die Entwickelung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung, und zwar werden diese einestheils durch den Inhalt der vorigen Paragraphen und anderntheils unmittelbar erhalten. Im §. VI. endlich entwickele ich $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, und zwar auch einestheils aus dem Inhalte der vorigen Paragraphen und anderntheils unmittelbar. — Bei diesen Entwickelungen bediene ich mich stets der zu den Anomalien gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, wodurch an Einfachheit viel gewonnen wird und neue Formen aufgefunden werden, die ohne diese Hülfsmittel schwer zu finden sein würden.“

An diese Angabe des Hauptinhalts der vorliegenden wichtigen Abhandlung erlauben wir uns die folgende gelegentliche all-

gemeine Bemerkung zu knüpfen. Abhandlungen, welche wie die vorliegende eine astronomische Grundlage haben, werden von den sogenannten reinen Mathematikern gewöhnlich als für sie unverständlich und wohl gar auch unwichtig bei Seite gelegt und nicht gelesen. Mag diese Ansicht nun auch zuweilen mehr oder weniger gegründet sein, so sollte man doch dabei einen sorgfältigen Unterschied machen. Der Inhalt der vorliegenden, in jeder Beziehung trefflichen und ausgezeichneten Abhandlung z. B. ist im Grunde so rein mathematisch, wie nur der Inhalt irgend einer, im eigentlichen Sinne rein mathematischen Abhandlung sein kann, und für Jeden verständlich, wer nur die allgemeinen Formeln kennt, durch welche auf Grundlage der Kepler'schen Gesetze die Planetenbewegung dargestellt oder charakterisirt wird, eine Kenntniss, die wahrlich Jeder sich mit leichter Mühe erwerben kann, wenn ihm nur die allgemeine Theorie der Kegelschnitte nicht fremd ist. Wer aber diese Kenntniss sich zu erwerben sich nicht die Mühe nimmt, und dadurch des Genusses, welchem das Studium einer an eleganten Entwickelungen so reichen Abhandlung wie die vorliegende verlustig geht, schadet seiner allgemeinen mathematischen Ausbildung sehr, und lernt sehr viele Hülfsmittel, die ihm bei anderen Untersuchungen sehr wesentliche Dienste zu leisten geeignet sind, nicht kennen. Möchten diese Bemerkungen nicht bloss Astronomen, sondern namentlich auch recht viele sogenannte reine Mathematiker veranlassen, sowohl der vorliegenden, als auch noch manchen anderen trefflichen Abhandlungen von ähnlicher Tendenz des von uns hochverehrten Herrn Verfassers ein sorgfältiges Studium zu widmen, was Jedem gewiss einen eben so grossen Genuss gewähren wird, wie uns das Studium dieser Abhandlungen schon häufig gewährt hat, was wir hier mit besonderem, dem Herrn Verfasser von uns gezollten Danke auszusprechen nicht unterlassen wollen.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass der Herr Verfasser auf Seite 276. ff. aus den in dieser Abhandlung entwickelten Formeln auch die schöne Auflösung des Kepler'schen Problems ableitet, welche er schon früher in den von ihm selbst in Gemeinschaft mit Herrn Petersen in Altona zum grössten Nutzen der gesammten astronomischen Wissenschaft so trefflich, in einer ihres ersten Begründers, des leider zu früh verstorbenen Schumachers, vollkommen würdigen Weise redigirten Astromischen Nachrichten. Nr. 836. veröffentlicht hat.

Physik.

Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung, zum Gebrauche in den höheren Schulen und zum Selbst-Unterrichte, von Dr. August Kunzek, k. k. ord. Professor der Physik an der Universität in Wien u. s. w. Mit 387 eingedruckten Abbildungen. Wien. Braumüller. 1853. 8. 3 Rthlr. 10 Sgr.

Jedes neue „Lehrbuch der Physik mit mathematischer Begründung" macht uns besondere Freude. Namentlich sollte in den oberen Klassen der Gymnasien und noch mehr der Realschulen der physikalische Unterricht nie ohne strenge mathematische Begründung ertheilt werden, weil nach unserer Ueberzeugung derselbe erst dadurch wahrhaft bildend und zugleich zu einem kräftigen Förderungsmittel des eigentlichen mathematischen Unterrichts wird. In der That scheint man sich auch dieser von uns schon oft ausgesprochenen Ansicht immer mehr und mehr zuzuneigen, weil die meisten neueren Lehrbücher der Physik offenbar weit mehr Rücksicht auf mathematische Begründung nehmen, als dies in den älteren der Fall war, welche sich gewöhnlich mit der Aufstellung der wichtigsten Naturgesetze ohne alle mathematische Begründung und der bloss historischen Angabe einer Menge von Formeln begnügten, die bei dieser Art und Weise der Behandlung der Physik den Schülern nur wie Hieroglyphen erscheinen mussten. Nach unserer Ansicht soll man kein Gesetz ohne strenge mathematische Begründung in das Lehrbuch aufnehmen und sich lieber mit wenigen sicher begründeten Naturgesetzen begnügen, als dass man dem Schüler eine Menge unbegründeter Sätze und Formeln vorführt, die ihm unter dieser Form doch nichts nützen und nur dienen, ihn zu verwirren. In einer diesen Ansichten vollkommen entsprechenden Weise ist das vorliegende Lehrbuch verfasst. Dasselbe enthält eine, so weit es mit Hülfe der Elementarmathematik möglich ist, streng theoretisch begründete Darstellung der gesammten Physik, einschliesslich der Lehre vom Lichte, von der Electricität und vom Magnetismus und der streng mathematischen Erklärung der wichtigsten meteorologischen Erscheinungen. Die mathematischen Demonstrationen sind, was wir mit ganz besonderem Lobe hervorheben, in der älteren, strengen, synthetischen und zugleich constructiven, d. h. überall an deutlich gezeichnete und in Holzschnitten ausgeführte Figuren sich anschliessenden Weise, die sich oft der bei diesen Lehren so wichtigen und erfolgreichen Gränzenbetrachtungen bedient, geführt, und nicht in der leichtfertigen Weise, die man in manchen neueren.

zum Theil sehr beliebten Lehrbüchern der Physik antrifft, welche sich eigentlich nur das Ansehen einer mathematischen Begründung geben wollen, ohne dieselbe wirklich zu erzielen, und dadurch dem Lehrlinge eher schaden als nützen. Dem vorliegenden Lehrbuche dagegen sieht man es auf jeder Seite an, wie sehr der Herr Verfasser überall nach mathematischer Strenge und Gründlichkeit gestrebt hat; und fast immer ist dieselbe von ihm auch ohne zu grosse Weitläufigkeit erreicht worden. Wir empfehlen daher dieses Lehrbuch der Physik allen Lehrern der Mathematik und der Naturwissenschaften auf das Dringendste zur sorgfältigsten Beachtung. Auch sind wir der Meinung, dass der Titel den Zusatz: „und zum Selbstunterrichte" mit vollem Rechte trägt, da die Darstellung so verständlich gehalten ist, dass Jeder, wer nur die erforderliche Bekanntschaft mit der sogenannten Elementarmathematik mitbringt, das Werk ohne Beihülfe eines Lehrers vollständig zu verstehen im Stande ist; ja, wir sind der Meinung, dass Jeder, wer das Studium der Elementarmathematik beendigt hat, sich mit dem grössten Vortheile unmittelbar an das Studium des vorliegenden Werkes machen wird, indem er, neben den daraus zu schöpfenden gründlichen und umfassenden physikalischen Kenntnissen, durch das Studium desselben sich auch in seinen mathematischen Kenntnissen zum grössten Vortheil für seine gesammte mathematische Ausbildung fester setzen und die vielfachen Anwendungen, welche sich von der Mathematik machen lassen, kennen lernen wird. Je mehr wir uns selbst über die grosse mathematische Gründlichkeit dieses Werkes gefreut haben, desto mehr wünschen wir dem Herrn Verfasser Glück, dass er bei den Hörern seiner eignen physikalischen Vorlesungen ein solches Maass mathematischer Vorkenntnisse voraussetzen kann, welche es ihm möglich machen, denselben dieses in mehr als einer Beziehung, vorzüglich aber wegen der in demselben gemachten sehr umfassenden und gründlichen Anwendung der Mathematik, ausgezeichnete Lehrbuch als Compendium zu Grunde zu legen.

Grundriss des photometrischen Calcüles. Von Dr. August Beer, Privatdocenten an der Universität Bonn. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig. Vieweg. 1854. 8. 1 Rthlr.

Es ist jedenfalls ein sehr verdienstliches Unternehmen, dass der schon durch mehrere optische und andere, auch rein mathematische Arbeiten auf die vortheilhafteste Weise bekannte Herr Verfasser die seit ziemlich langer Zeit, wenn auch nicht fast

gessene, aber doch seit fast 100 Jahren nicht wieder systematisch bearbeitete Photometrie einer neuen Bearbeitung unterzogen und in dem vorliegenden Grundriss ein sehr ansprechendes und für den Unterricht äusserst geeignetes Lehrbuch derselben geliefert hat. Besonders gefreut hat uns die grosse Sorgfalt, welche der Herr Verfasser auf die Entwickelung der Grundbegriffe und die Darstellung der Grundformeln verwandt hat, weil wir glauben die Bemerkung gemacht zu haben, dass man namentlich in der Photometrie sich öfters mit ziemlich vagen und unbestimmten Begriffen begnügt hat. Im Uebrigen hat sich der Herr Verfasser hauptsächlich an Lamberts im Jahre 1760 erschienene Photometria sive de mensura et gradibus luminis, calorum et umbrae gehalten, ohne dass dadurch seine Darstellung der Eigenthümlichkeit verlustig gegangen wäre, indem wir vielmehr in dem Buche manche eigenthümliche elegante analytische Anwendungen gefunden haben, die auch dem Anfänger zu einer sehr zweckmässigen Uebung in der Analysis dienen können und werden. Der Hauptinhalt des Werkchens, mit dessen Angabe wir uns hier begnügen müssen, ist folgender: Einleitung. — Grundsätze der Photometrie. — Die directe Erleuchtung. I. Erleuchtung im Allgemeinen. II. Erleuchtung einer Fläche durch einen leuchtenden Punkt. III. Erleuchtung einer Fläche durch eine Fläche. IV. Erleuchtung durch eine Gasmasse. V. Mittlere Helligkeit einer Fläche. — Die indirecte Erleuchtung. I. Von der Helligkeit dioptrischer und katoptrischer Bilder. II. Absorption des Lichts. — Die sichtbare Helligkeit. I. Von der sichtbaren Helligkeit. II. Von der Beurtheilung der sichtbaren Helligkeit.

Je mehr der Herr Verfasser durch dieses Werkchen einen neuen, sehr erfreulichen Beweis von seiner Gewandtheit in der eleganten analytischen, natürlich auch die Differential- und Integralrechnung durchgängig in Anspruch nehmenden Behandlung physikalischer Objecte gegeben hat; je mehr sich diese Schrift auch durch Reichthum ihres Inhalts auf einem verhältnissmässig kleinen Raume auszeichnet; je fühlbarer endlich der gänzliche Mangel einer neuen systematischen Behandlung der Photometrie bisher gewesen ist: desto mehr verdient die vorliegende Schrift der sorgfältigen Beachtung der Mathematiker und Physiker empfohlen zu werden.

Blicke in das Universum mit specieller Beziehung auf unsere Erde. Bearbeitet von **L. Gruson**, Königlich Preussischem Ingenieur-Major a. D. Mit 42 Holzschnit-

ten und 3 lithographirten Tafeln. Magdeburg. Bänsch. 1854. 8. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Wir würden diese „Blicke in das Universum" hier einer Besprechung nicht unterziehen, wenn der Herr Verfasser durch die vielen eingeflochtenen, ja fast auf allen Seiten vorkommenden mathematischen Betrachtungen sich nicht das Ansehen zu geben beliebte, als wenn bei diesen „Blicken" ihm „mathematische Augen" gedient hätten. Freilich haben ihm dabei mathematische Augen gedient, aber leider sind dieselben ziemlich trübe gewesen; und wenn der Herr Verfasser in dem Vorwort an seine Leser sich mit der Bitte wendet: „dass diejenigen, die vielleicht in ihrer mathematischen Ausbildung nicht so weit fortgeschritten sein sollten, um mit Erfolg die von ihm aufgestellten mathematischen Formeln und Rechnungen verfolgen zu können, sich deshalb keineswegs von einer näheren Bekanntschaft mit dem übrigen Inhalte des Buchs abhalten lassen möchten"; so können wir an unsere Leser, d. h. die Leser des Archivs, nur die höchst dringende Bitte richten, dass keiner derselben sich die Mühe nehmen möge, sich mit den mathematischen Rechnungen und Demonstrationen des Herrn Verfassers den Kopf zu zerbrechen. Wie es mit der mathematischen Strenge und Evidenz des Herrn Verfassers steht, sieht man u. A. gleich aus der Seite 22. ff. gegebenen mathematischen Entwickelung der Gesetze des Falls, aus der auf das Deutlichste hervorgeht, dass derselbe gar keine Ahnung hat, worauf es bei diesem ganz elementaren Gegenstande eigentlich ankommt; wenn man freilich ohne alle weitere Begründung Schlüsse macht wie den folgenden auf Seite 22.: „Bezeichnen wir der Kürze wegen die nach Ablauf der ersten Secunde erlangte Endgeschwindigkeit von 30 Fussen durch g, so ist auch der von ihm zurückgelegte Raum gleich $\frac{g}{2}$", dann kann man allerdings in der Mathematik überall sehr kurz wegkommen. Höchst ergötzlich ist auch die auf Seite 179. gegebene Auflösung der Gleichung

$$\frac{88{,}2}{(60-x)^2}=\frac{1}{x^2},$$

die wir doch mittheilen müssen, um unsern Lesern einen Begriff von der ungemeinen analytischen Gewandtheit des Herrn Verfassers zu geben. Sie ist wörtlich folgende:

$$88{,}2.x^2=(60-x)^2$$

$$88{,}2.x^2=60^2-120x+x^2$$

$$88{,}2.x^2-x^2=60^2-120x$$

$$87{,}2x^2+120x=3600, \text{ durch } 87{,}2 \text{ dividirt,}$$

$$x^2+1{,}37x=41{,}2 \text{ und hierzu } 0{,}18^2 \text{ addirt,}$$

$$x^2+1{,}37x+0{,}18^2=41{,}2+0{,}18^2, \text{ daraus } \sqrt{\ },$$

$$x+0{,}68=\sqrt{41{,}66},$$

endlich:

$$x=6{,}46-0{,}68=5{,}78.$$

Sollen wir noch ein Wort verlieren über solche Algebra?! Wir fragen einen uns gerade in den Wurf kommenden Real-Tertianer. Der antwortet uns sogleich: Aus

$$88{,}2\,.\,x^2=(60-x)^2$$

folgt durch Ausziehung der Wurzel auf beiden Seiten:

$$x\sqrt{88{,}2}=60-x,$$

also

$$x=\frac{60}{1+\sqrt{88{,}2}},$$

und damit Punktum. Bei Erklärung der atmosphärischen Refraction scheint auf S. 113. die Refractions-Curve ganz verkehrt gezeichnet, da doch der Herr Verfasser ganz wörtlich sagt, „dass der Lichtstrahl *ab* durch ein Medium, das schichtenweise an Dichte zunimmt, gehen solle." — Wenn man in §. 44. die Erklärung der Dämmerungserscheinungen liest, so muss man in der That über die Grossartigkeit der Anschauungsweise des Herrn Verfassers von dem Dämmerungsphänomen staunen. Nun, wir können es nicht über uns gewinnen, uns den Magen noch weiter mit dieser unverdaulichen Speise zu verderben. Das Archiv hat durch die obigen Bemerkungen seine Pflicht erfüllt, nämlich die: seine Leser auf das Dringendste vor diesem allerneuesten Producte der deutschen astronomisch-physikalisch-chemisch-mineralogisch-geologisch-mathematischen Literatur zu warnen.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1849. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. V. Jahrgang. Redigirt von Professor Dr. W. Beetz und Professor Dr. G. Karsten. Berlin. Reimer. 1853. 8. 2 Rthlr. 15 Sgr.

Wir haben schon einige Mal in diesen Literarischen Berichten auf die Verdienstlichkeit des vorliegenden Werkes hingewiesen und thun dies jetzt von Neuem zugleich mit dem Wunsche,

dass die einzelnen Jahrgänge schneller als bisher erscheinen möchten, damit das Werk bald bis zum Jahre 1853 fortgeführt wird und auf diese Weise mit den Fortschritten der Wissenschaft möglichst gleichen Schritt hält. So weit unsere Kenntniss und auch, weil das Jahr 1849 jetzt schon vier Jahre hinter uns liegt, unsere Erinnerung reicht, haben in diesem Jahrgange alle wichtigeren Arbeiten Berücksichtigung gefunden, wie schon die Ansicht des reichhaltigen, 16 Seiten einnehmenden Inhaltsverzeichnisses zeigt. Die Hauptrubriken, unter welche das reiche Material gebracht ist, mit deren Angabe wir uns hier begnügen müssen, sind folgende: Allgemeine Physik. Akustik. Optik. Wärmelehre. Elektricitätslehre. Meteorologie. Physikalische Geographie. — Möge das Unternehmen auch fernerhin glücklichen Fortgang haben und die verdiente Beachtung immer mehr finden.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LXII. S. 821.)

Tome XVII. IIe Partie. 1850. und Tome XVIII. Ire Partie. 1851. enthalten grössere mathematische Aufsätze nicht, wohl aber manche interessante meteorologische und andere Mittheilungen, namentlich von Herrn Quetelet.

Tome XVIII. IIe Partie. 1851. p. 14. Sur les piles à acides et alcalis, séparés par des corps poreux, par M. Martens. — p. 41. Quelques propriétés descriptives des surfaces gauches du second degré démontrées par la géométrie, par M. J. B. Br[illegible]ur. — p. 137. Mémoire sur la télégraphie électrique, par M. [illegible]oesener. — p. 144. Note sur la division ordonnée de Fourier et sur son application à l'extraction de la racine carrée, par M. Schaar. — p. 157. Note sur l'éclipse solaire du 28 juillet 1851, par M. A. Quetelet. — p. 279. Aurore boréale du 2 octobre, note de M. Quetelet. — p. 305. Notice sur le rapport fait en 1851 à l'Académie de Munich par M. Lamont sur l'hypsométrie et la météorologie de la Bavière, par M. Delcros. — p. 594. Note [illegible] les observations de température faites à Bastogne et à Honnay, par M. Crahay.

Literarischer Bericht
LXXXVII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Notice sur des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide, par M. le Docteur Woepcke. Paris. Imprimérie nationale. 1851. 8.

Herr Doctor Woepcke in Paris hat sich schon durch die Herausgabe der im Literar. Ber. Nr. LXVII. S. 861. angezeigten Algebra des Omar Alkhayyâmi ein grosses Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben. Ein neues Verdienst erwirbt er sich durch die obige höchst interessante kleine Schrift, in welcher er zwei verloren gegangene, nur in arabischen Uebersetzungen vorhandene Schriften des Euklides, die erste in der arabischen und in einer danach angefertigten französischen Uebersetzung, die zweite nur in einer französischen Uebersetzung aus dem Arabischen, publicirt.

Die erste dieser beiden Schriften ist eine aus vier Propositionen und einigen vorangeschickten Axiomen bestehende Abhandlung über den Hebel, in welcher die Gesetze desselben in eigenthümlicher Weise erläutert werden. Herr Dr. Wöpcke bemerkt mit Recht, dass man zweifeln könne, ob diese dem Euklides zugeschriebene Schrift demselben wirklich angehöre, führt jedoch auf der anderen Seite auch Gründe an, die das Letztere allerdings wahrscheinlich machen. Jedenfalls würde es sehr interessant sein, wenn sich mit völliger Bestimmtheit nachweisen liesse, dass die angeführte Schrift wirklich dem Euklides angehöre und derselbe also die Gesetze des Hebels schon vor Archimedes gekannt habe. Herr Dr. Wöpcke, auf dessen sehr interessante Schrift selbst wir dringend verweisen, sagt allerdings

S. 2.: „Un passage du manuscrit latin no 8680 A de la Bibliothèque nationale, manuscrit du XIVe siècle, semble corroborer cette supposition et constater que c'est à Euclide que remonte la démonstration du principe du levier."

Die zweite hier in einer französischen Uebersetzung aus dem Arabischen publicirte, dem Euklides zugeschriebene Schrift ist ein Tractat über die Theilung ebener Figuren, die, von dem Herrn Herausgeber mit lehrreichen Anmerkungen bereichert, mehrere interessante Aufgaben und Auflösungsmethoden aus der angegebenen Lehre enthält, und gleichfalls allen unseren Lesern, die an der Geschichte der Mathematik Interesse nehmen, zur Beachtung empfohlen werden muss.

Notice sur une théorie ajoutée par Thabit ben Korrah à l'Arithmétique spéculative des Grecs, par M. F. Woepcke.

Der Titel der hier jedoch nur im Auszuge in französischer Uebersetzung mitgetheilten Schrift ist: Traité composé par Aboûl Haçan Thâbit ben Korrah sur la manière de trouver des nombres amiables d'après une méthode facile. — Auch diese Schrift ist sowohl in allgemeiner historischer Beziehung, als auch wegen der darin enthaltenen Methoden, amicable oder befreundete Zahlen zu finden, interessant. Ueber den Begriff befreundeter Zahlen und die von Michael Stifel in seiner Ausgabe der Coss Christoph Rudolphs, von Schooten (Exercitationes mathematicae. L. V. Sect. 9.), von Krafft (Commentarii Novi Acad. Petrop. T. II.) und Euler (Opuscula varii argumenti. T. II. p. 23.) gegebenen Methoden, solche Zahlen zu finden, wird man am Besten den betreffenden Artikel im Mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 246. nachsehen. Von der obigen, jetzt erst aufgefundenen Schrift des Thabit ben Korrah konnte natürlich in diesem Artikel keine Rede sein. Die Vergleichung der Methoden des letzteren mit denen der neueren Mathematiker dürfte mannigfaltiges Interesse darbieten, und wir kommen vielleicht im Archiv auf diesen Gegenstand zurück.

Für jetzt nur Herrn Doctor Wöpcke unsern wärmsten Dank für diese neuen werthvollen Beiträge zu der nur allzusehr vernachlässigten Geschichte unserer Wissenschaft.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Herr Ingenieur Joh. de la Camp zu Hamburg hat mir nachstehende Anzeige der verschiedenen Lehrbücher des Herrn Lüb-

sen zugesendet, mit dem Wunsche, dass dieselbe im Archiv abgedruckt werden möchte. Wegen der Verdienstlichkeit der genannten Lehrbücher habe ich diesem Wunsche gern entsprochen. G.

In dieser Zeit, in der durch die eminenten Fortschritte, welche die unermüdlichen Bestrebungen auf dem Gebiete der Technik und der Industrie zur Folge gehabt haben, das Bedürfniss immer dringender wird, die mathematischen Wissenschaften einer grösseren Ausbreitung unter dem Publikum fähig zu machen, ist es wohl nicht ungeeignet, auf einen kleinen, noch keineswegs geschlossenen Cyklus von Büchern aufmerksam zu machen, die, sämmtlich von einem Verfasser herrührend, nach und nach alle Hauptzweige der Mathematik umfassen werden. Es sind dies folgende fünf Bücher:

I. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens, von H. B. Lübsen. 3. verb. Aufl. Hamburg 1853. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

II. Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höheren Geometrie, zum Selbstunterricht, mit 121 Figuren im Text, von H. B. Lübsen. 2. verm. u. verb. Aufl. Leipzig 1849. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

III. Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 180 Figuren im Text, von H. B. Lübsen. Hamburg 1851. 1 Thlr.

IV. Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 58 Figuren im Text, von H. B. Lübsen. Hamburg 1852. 21 Ngr.

V. Ausführliches Lehrbuch der Analysis, zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 6 Fig. im Text, von H. B. Lübsen. Hamburg 1853.

Die Recensionen der vier ersteren (von dem letzten eben erst erschienenen ist mir noch keine bekannt), die sämmtlich vortheilhaft ausgefallen sind, sind leider theilweise in Blätter eingesetzt worden, die vom grossen Publikum sehr wenig gelesen werden. Herr Lübsen hat sich weniger darum Mühe gegeben, der Wissenschaft Neues hinzuzufügen, er führt in seinen Büchern nicht

in vorher noch unbetretene Gebiete der Mathematik; ihm ist vielmehr das gewiss nicht geringere Verdienst zuzuerkennen, die schon bekannten Gebiete für Jedermann leichter zugänglich zu machen. Er hat seinen Büchern das Prädicat „Ausführlich" gegeben, obgleich er darin keineswegs eine vollständige Erschöpfung der behandelten Disciplinen giebt, sondern, und deshalb mit vollem Recht, weil die von ihm als für den Praktiker brauchbar erkannten und deshalb in die Bücher aufgenommenen Themata mit der Deutlichkeit und Ausführlichkeit behandelt sind, nothwendig, um dem Anfänger eine klare Anschauung davon zu geben. Die Herleitungsweise der Sätze und die Beweisführung, die Herr Lübsen innehält, ist so evident, dass der Anfänger den Eindruck empfängt, als habe alles so eben Erlernte schon längst in ihm gelegen, und es habe nur an dem richtigen Mittel gefehlt, es zu erwecken. Professor Grunert sagt in Band XX. seines Archivs für Mathematik und Physik über die vier ersten Bücher Folgendes: „Alle diese Lehrbücher zeichnen sich durch eine ungemeine Deutlichkeit sehr vortheilhaft aus und enthalten überall in sehr verständiger Auswahl von den betreffenden Wissenschaften allemal das, was für das praktische Bedürfniss nöthig ist und zu demselben in nächster Beziehung steht, ohne die für tüchtige praktische Anwendung der Mathematik bestimmte Kraft des Knaben und Jünglings durch eine Menge oft sehr unnützer Sätze und Sätzchen eher zu schwächen und zu ermüden, als zu stärken, wie leider viele unserer Lehrer immer noch thun. . . ." „Herrn Lübsen's in vieler Beziehung sehr zu empfehlende Lehrbücher scheinen uns ein interessanter und sehr ansprechender Ausdruck dieses gewiss sehr richtigen pädagogischen und methodischen Grundsatzes zu sein, weshalb wir sie hier allen Lehrern, die solche Knaben und Jünglinge zu unterrichten haben, welche für ein praktisches Fach, das auf einer mathematischen Basis ruht, bestimmt sind, bestens haben empfehlen wollen."

Ueber das Lehrbuch der Trigonometrie sagt Professor Dienger an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe in seiner Recension unter Anderm: „Das vorliegende Buch enthält eine vollständige und klare Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie nach einem Plan, der uns in jeder Beziehung vortrefflich erscheint." Und nach specieller Besprechung des Inhalts: „Man wird aus dem Obigen ersehen, dass das hier angezeigte Lehrbuch die Grundlehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie ziemlich vollständig enthält. Die Darstellung ist, dem Erachten des Referenten nach, sehr zweckmässig und durchaus deutlich, überall durch, wenn auch nicht zahlreiche Beispiele un-

terstützt, so dass dieses Buch Jedem empfohlen werden kann, der sich mit diesem Gegenstande bekannt machen will. Referent kann dies mit um so grösserer Ueberzeugung, als er selbst bei seinen Vorträgen einen ganz ähnlichen Gang einzuschlagen pflegt und so den hier angegebenen für zweckmässig schon früher erachtet hat."

Das Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie recensirt nach einigen allgemeinen Betrachtungen der Prof. Scheibert in der „Pädagogischen Revue" folgendermassen: „So ist denn dem Lehrer ein Buch willkommen, wie dies des Herrn Lübsen, welches wirklich das Nothwendigste und Wichtigste heraushebt, bei den Anfängerschwierigkeiten die nöthige Zeit verweilt, sich über die eigenthümliche Betrachtungsweise in der analytischen Geometrie an den gehörigen Orten des Weiteren ergeht, mit sehr interessanten und überraschenden Anwendungen und Aufgaben anlockt, veranschaulicht und dem Anfänger Muth macht, andererseits durch rasches Hinwegführen über mehr der Vollendung der Wissenschaften nur dienende Partieen den Gang beschleunigt und so die Wanderer frisch erhält, und so endlich auf 212 Seiten den Anfänger so weit führt, dass er Ahnung und Anschauung von der reichen Welt erhält, welche ihm durch diese neue Sprache der Mathematik aufgeschlossen ist. Das Buch ist in seinem Vortrage durchweg so plan gehalten, dass es für einen gehörig vorbereiteten Schüler nicht schwer werden wird, durch Selbststudium diesen Zweig der Wissenschaften kennen zu lernen und sich einigermassen in ihm heimisch zu machen."

In der „Allgemeinen Schulzeitung" vom 9. Juli 1846 wird über das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Folgendes gesagt: „Das Buch zeichnet sich durch viele gute Eigenschaften vor manchen anderen Schriften ähnlichen Inhalts und ähnlichen Zweckes so vortheilhaft aus, dass die beurtheilende Feder nicht anders, als gern bereit sein kann, belobend das Wort zu nehmen. . . ." Ferner: „Hat nun unser Verfasser sein Lehrbuch, wie er es offen erklärt, nur für den Selbstunterricht bestimmt, so müssen wir gestehen, dass er es mit Glück und Geschick, mit Erfahrung und Umsicht gethan hat. Wenn ferner Herr Schumacher, der bekannte grosse Astronom in Altona, in dem empfehlenden Vorworte von unserm Verfasser sagt: „„dass er mit Erfolg gegen sich gearbeitet habe, indem das Buch die Hülfe des Lehrers, also auch seine eigene, überflüssig macht"", so liegt allerdings darin die von uns ebenfalls erkannte und anerkannte Wahrheit, aber zugleich auch noch der starke Schein einer anderen, wonach sich nämlich das Buch für den Handgebrauch nicht

eignen dürfte. Gegen die Richtigkeit dieses Scheines müssen wir uns streng erklären. Das Buch ist sogar wie geschaffen zu einem guten Schulbuche, und das hauptsächlich für solche Lehrer, welche in dem zum Unterrichte benutzten Hülfsbuche ohne beleidigtes Selbstgefühl einen mit ihnen auf derselben Bildungshöhe stehenden Gehülfen neben sich ertragen können; für Lehrer, welche in dem Schulbuche weiter nichts als ein Skelett, als ein nacktes Rüstwerk zu einem von ihnen selbst aufgebauten Gebäude haben wollen, für solche ist unser Buch nicht passend eingerichtet. . . . .“ „Die Ausführlichkeit wird nirgends beschwerlich weitläufig oder gar übertrieben gründlich, nein, der Verfasser ist eigentlich nur für den Lehrer ausführlich, für den Schüler meistens noch kurz, oft so kurz, dass ihm des Lehrers Hülfe dabei noch sehr wesentlich nothwendig erscheinen dürfte.“

Das Bekanntwerden dieser Recensionen, verbunden mit dem Bedürfniss nach Lehrbüchern der Art wird den vorliegenden Büchern gewiss in kurzer Zeit eine bedeutend grössere Ausbreitung sichern, als die, deren sich dieselben jetzt schon, wenigstens im westlichen Deutschland, erfreuen, und ist dies im Interesse der allgemeinen Bildung allerdings nur zu wünschen.

Hamburg, den 22. August 1853.

Joh. de la Camp, Ingenieur.

Arithmetik.

Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten. Von Joseph Petzval. Auf Kosten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Erster Band. Wien. Braumüller. 1853. 4.

Dieses ausgezeichnete Werk gehört jedenfalls zu den bedeutendsten neueren Erscheinungen auf dem Gebiete der deutschen mathematischen Literatur, und verdient daher hier ausführlicher besprochen zu werden, als sonst in diesen literarischen Berichten zu geschehen pflegt. Was zuerst den allgemeinen Charakter desselben betrifft, so hat der Herr Verfasser, rücksichtlich des Inhalts oder des Objects der Betrachtung, wie auch schon der Titel in ganz bestimmter Weise ausspricht, sich auf die linearen Differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen Coefficienten beschränkt, weil bei Weitem die meisten Untersuchungen

auf dem Gebiete der Mechanik, Astronomie, Physik, als erstes Resultat, oder als Ausgangspunkt, auf eine Differentialgleichung dieser Form, oder auf ein System solcher Differentialgleichungen führen, was, nach der sehr richtigen Bemerkung des Herrn Verfassers in der Vorrede, wenigstens und vorzugsweise in Bezug auf die in das Gebiet der eigentlichen Physik gehörenden Untersuchungen, seinen Grund im Wesentlichen darin hat, dass man entweder schwingende Bewegungen von sehr kleinen Amplituden zu erörtern, oder zu bereits in erster Annäherung bekannten Bewegungselementen sehr kleine Correctionen zu rechnen hat, und daher jedesmal, die Glieder höherer Ordnung vernachlässigend, zur linearen Form gelangen muss. Rücksichtlich der Art der Abfassung ist zu bemerken, dass das Werk in höchst zweckmässiger Weise eine gewisse Mitte hält zwischen einem ausführlichen Handbuche und einer Darlegung der dem Herrn Verfasser ganz eigenthümlichen Entwickelungs- und Rechnungsmethoden. Derselbe hat es daher in der anerkennungswerthesten Weise nicht verschmäht, z. B. die Methode der Variation der Constanten, die von Fourier, Liouville u. s. w. herrührenden Formeln, das Laplace'sche und andere Integrale, einem grossen Theile nach in neuer Darstellungsweise, zwischen seinen in grossem Reichthume auftretenden ganz eigenthümlichen Rechnungs- und Auflösungsmethoden einzuschalten, um dadurch sein Werk, ohne Beihülfe grösserer Bibliotheken, zugänglich zu machen, woraus sich von selbst ergiebt, dass dasselbe für den angehenden und gereiften Analytiker in gleicher Weise lehrreich und anziehend ist und dass durch die Herausgabe desselben in beiden Beziehungen der Herr Verfasser sich jedenfalls ein wesentliches Verdienst erworben hat, was die folgende, freilich leider nur kurze, auf das Einzelne nur so viel als es uns hier der Beschränktheit des Raumes wegen möglich ist, eingehende Inhaltsangabe noch weiter bestätigen wird.

In einer, den ersten Abschnitt des Werkes bildenden, sehr lehrreichen Einleitung entwickelt der Herr Verfasser die nothwendigsten fundamentalen Lehrsätze über die Existenz und Form der Integrale linearer Differentialgleichungen, so wie über den Bau der letzteren, und zeigt, dass der Gegenstand in steter Analogie mit der Theorie der algebraischen Gleichungen fortschreite, worin er Veranlassung findet, diese Analogie auch fernerhin festzuhalten, und die folgenden Lehren dermassen in Abschnitte zu theilen, dass einem jeden derselben ein analoges Kapitel auf dem Felde der algebraischen Gleichungen entspricht. Es soll daher:

Erstens der zweite Abschnitt die Lehre enthalten von den-

jenigen Differentialgleichungen aller Ordnungen und mit bestimmtem Coefficientenbau, deren Integration in Folge dieses letzteren durch geschlossene Formeln möglich ist, wohin z. B. die Formen:

$$A_n y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = F(x),$$

$$A_n (h+kx)^n y^{(n)} + A_{n-1}(h+kx)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + A_1 (h+kx) y' + A_0 y = F(x),$$

$$(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = F(x),$$

$$a_n . x^n . y^{(n)} + x^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1} x^m) y^{(n-1)} + \dots$$
$$\dots + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m} + \dots + h_0 x^{mn}) y = F(x)$$

gehören, und noch einige andere, wobei wir bemerken, dass der Herr Verfasser für

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}$$

der Kürze wegen $y', y'', \dots y^{(n)}$ schreibt. Dieser Lehre, sagt der Herr Verfasser, entspricht auf dem Gebiete der algebraischen Gleichungen die von den binomischen, reciproken u. s. w. Gleichungen, welche, in Folge ihres Coefficientenbaues, eine Auflösung durch geschlossene Formeln zulassen.

Zweitens. Der dritte Abschnitt enthält die Formenlehre der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten algebraische und rationale Functionen von x sind, und stellt die Kennzeichen auf, nach welchen die Formen der Genüge leistenden particulären Integrale aus jenen der Coefficienten abgeleitet werden. Diesem Abschnitte entspricht auf dem Felde der algebraischen Gleichungen eine Reihe von Lehrsätzen, wie die von Descartes, Fourier, Sturm.

Drittens. Ein vierter Abschnitt hat die Transformation der Differentialgleichungen zum Gegenstande, und lehrt, aus der gegebenen Gleichung eine andere abzuleiten, deren particuläre Integrale mit jenen der ersteren in einem gewissen analytischen Zusammenhange stehen.

Viertens. In einem fünften Abschnitte werden Methoden entwickelt, die, der Form nach bereits bekannten particulären Integrale wirklich zu berechnen, und, da oft ein und dasselbe particuläre Integral unter verschiedenen Formen erscheinen kann, auch Methoden, diese Formen in einander zu verwandeln, damit man aus denselben die vortheilhafteste, etwa die geschlossene oder eine andere, den Vorzug der Durchsichtigkeit in höherem Grade besitzende, zu wählen im Stande sei. Endlich

Fünftens soll in einem sechsten Abschnitte den Systemen von mehreren Differentialgleichungen und den partiellen Differentialgleichungen besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden.

Ausser der den ersten Abschnitt bildenden Einleitung liegen in diesem ersten Bande noch der zweite und dritte der sechs vorher näher charakterisirten Abschnitte vor, und wir müssen bekennen, dass wir durch dieselben in vielen Beziehungen sehr befriedigt worden sind und vielfache Belehrung aus denselben geschöpft haben. Die Einleitung beschäftigt sich insbesondere mit der Integration der linearen Differential- und Differenzen-Gleichungen der ersten Ordnung, mit dem Beweise der Existenz und der allgemeinen Form des Integrals einer linearen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung, mit der Bildung der Differentialgleichung aus den particulären Integralen und mit der Methode der Variation der Constanten. Der Inhalt des zweiten Abschnittes ist oben schon mit hinreichender Ausführlichkeit angegeben, der Inhalt des dritten Abschnittes aber so reichhaltig, dass eine nur einigermassen vollständige Angabe desselben hier leider nicht möglich ist. Ueberhaupt ist dieses Werk so reich an neuen Methoden und dem Herrn Verfasser eigenthümlichen Darstellungen älterer Methoden, dass man nur durch ein sehr sorgfältiges und eingehendes Studium desselben sich einen ganz deutlichen Begriff von seinem Wesen und seiner Bedeutung verschaffen kann.

Wir wünschen sehr, durch diese kurze Anzeige die Aufmerksamkeit der Mathematiker, sowohl in Deutschland, als auch im Auslande auf dasselbe hinzulenken, indem wir selbst nochmals mit besonderem Danke bekennen, aus demselben vielfache Belehrung geschöpft zu haben. Möge der Herr Verfasser die Wissenschaft recht bald mit dem zweiten Theile beschenken und ihm der Beifall und die Anerkennung im reichsten Maasse zu Theil werden, die er durch dieses Werk von Neuem in Anspruch zu nehmen so sehr berechtigt ist!

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LXXXVI. S. 16.)

Tome XIX. Ire Partie. 1852. p. 16. Note sur le développement des expressions de la forme $\frac{\sqrt{A}+a}{a}$ en fraction conti-

nue; par M. Schaar. — p. 23. Note sur les expressions des racines et des puissances d'un nombre en produits infinis; par M. Lefrançois. — Procédé pour rendre perceptibles et pour compter les vibrations d'une tige élastique; par M. Montigny. — p. 513. Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations; par M. Liagre. — p. 534. Variations de la déclinaison et de l'inclinaison magnétique à Bruxelles depuis un quart de siècle; par M. Quetelet. — p. 537. Démonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule, à diverses latitudes; par M. Crahay. — p. 543. Sur les moyens de faire donner aux plantes leurs feuilles, leurs fleurs et leurs fruits à des époques déterminées d'avance; par M. Quetelet (ein sehr interessanter Aufsatz).

Tome XIX. IIe Partie. 1852. p. 161. Sur le théorème d'Euler, rélatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps; par M. Pagani. — p. 300. Rapport de M. Quetelet sur une note de M. le professeur Montiguy, relative aux fluctuations de la bulle des niveaux. — p. 303. Sur quelques propriétés curieuses que présentent les résultats d'une série d'observations, faites dans la vue de déterminer une constante, lorsque les chances de rencontrer des écarts en plus et en moins sont égales et indépendantes les unes des autres; par M. A. Quetelet. — p. 476. Rapport de M. Schaar sur un mémoire de M. Montigny relatif aux expériences pour déterminer la densité de la terre. — p. 490. Rapport de M. Lamarle sur un mémoire de M. l'ingénieur Manilius, relatif à l'emploi de l'infini dans les mathématiques. — p. 496. Sur l'électricité de l'air, d'après les observations de Munich et de Bruxelles; lettre de M. Quetelet à M. Lamont. — p. 502. Sur la répartition des hauteurs barométriques, par rapport à la hauteur moyenne, par M. Liagre.

Tome XIX. IIIe Partie. 1852. p. 31. Sur la nouvelle expérience de M. Leon Foucault. Réclamation de priorité par M. Lamarle. — p. 49. Mémoire sur le mouvement d'un point matériel rapporté à trois axes fixes dans un corps mobile autour d'un point; par M. Pagani. — p. 71. Examen des cas douteux dans les triangles sphériques; par M. Carbonelle. — p. 82. Influence de la température sur l'époque de la floraison; par M. A. Quetelet. — p. 272. Mémoire sur les médianes; par M. Ernest Quetelet, officier du génie. Rapport de M. Timmermanns. In dieser Abhandlung kommt u. A. das folgende interessante Theorem vor: „Deux surfaces d'un degré m se touchent suivant une courbe plane, toute transversale intercepte, à partir du plan, dans chacune des surfaces, m segments tels que la somme de leurs inver-

ses est égale de part et d'autre." — p. 274. Résumé général présentant les bases du calcul relatif aux effets que produit la rotation de la terre sur le mouvement gyratoire des corps entraînés dans la rotation diurne. Lettre de M. Lamarle à M. Quetelet. — p. 289. Sur le calcul des tables de mortalité; par M. A. Quetelet. — p. 296. Notice concernant l'emploi de l'air echauffé, au lieu de vapeur d'eau, comme moteur dans les machines; par M. De Vaux. — p. 436. Résumé général présentant les bases du calcul relatif aux effets que produit la rotation de la terre sur le mouvement gyratoire des corps entraînés dans la rotation diurne. Suite à la lettre adressée par M. Lamarle à M. Quetelet. — p. 408. Notice sur Michel Florent Van Langren, cosmographe et mathématicien des archiducs Albert et Isabelle, et ensuite de Philippe IV., roi d'Espagne; par le chevalier Marchal. — p. 497. Sur l'astronome Langren; par M. Quetelet. (Interessante historische Mittheilung.)

Tome XX. Ire Partie. 1853. p. 145. Sur la théorie des résidus quadratiques; par M. Angelo Genocchi. Rapport de M. Schaar. — p. 148. Sur les temps des révolutions des satellites de Jupiter et de Saturne; par M. A. Quetelet. — p. 150. Sur des cercles lunaires; par M. A. Quetelet. — p. 151. Notice sur l'hiver de 1852 à 1853; par M. A. Quetelet. (Höchst interessante Mittheilungen über den so vielfach merkwürdigen Winter 1852—53.) — p. 317. Sur un mémoire de M. Montigny intitulé: Corrélation des hauteurs du baromètre et de la pression du vent. Rapports par M. M. Crahay et Duprez. — p. 324. Sur la mesure des distances au moyen de la Stadia; par M. Liagre. — p. 471. Sur un appareil photo-électrique, inventé par M. J. Jaspar. Rapport de M. Crahay. — p. 473. Sur la température et l'état de la végétation pendant les mois de février et mars 1853; par M. A. Quetelet. — p. 748. Description d'un appareil photo-électrique conservant la lumière au même point, inventé et construit par M. J. Jaspar à Liège.

Tome XX. IIe Partie. 1853. p. 4. Sur une note de M. Ign. Carbonelle, intitulée: Théorie géométrique du parallélogramme de Watt. Rapport de M. Timmermanns. — p. 11. Théorie géométrique du parallélogramme de Watt; par M. Ign. Carbonelle. — p. 39. Tremblements de terre ressentis en 1852; par M. Alexis Perrey. — p. 244. Sur les variations périodiques et non périodiques de la température, d'après les observations faites pendant 20 années à l'Observatoire de Bruxelles; par M. A. Quetelet. — p. 299. Sur la détermination de la latitude, de la longitude, de l'heure et de l'azimut par des passages observés dans deux ver-

ticaux; par M. Houzeau. Rapport de M. Nerenburger. — p. 303. Sur l'erreur probable d'un passage observé à la lunette méridienne de l'Observatoire royal de Bruxelles; par M. Liagre. — p. 312. Sur l'ouragan du 28. Juin 1853; par M. A. Quetelet. — p. 392. Démonstration élémentaire d'une formule logarithmique de M. Binet; par M. Angelo Genocchi, de Turin. — p. 397. Sur une propriété des nombres; par M. Angelo Genocchi, de Turin. — p. 400. Sur l'emploi du fer de fonte dans la confection d'aimants artificiels; par M. Crahay. — p. 405. Sur les chaleurs des 7., 8. et 9. Juillet 1853, et sur leurs effets désastrueux; par M. A. Quetelet.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. LXXXIV. S. 8.)

Jahrgang 1853. XI. Band. 1. Heft. S. 9. Schabus: Krystallform des Zinkoxydes. — S. 46. Grailich: Untersuchungen über den ein- und zweiaxigen Glimmer. — S. 87. v. Hauer: Ueber die Beschaffenheit der Lava des Aetna von der Eruption im Jahre 1852. — S. 121. Kreil: Geographische und magnetische Bestimmungen aus dem Nilthale. Von Ritter von Fridau. — S. 213. Brücke: Ueber die Wirkung complementär gefärbter Gläser beim binoculären Sehen.

Jahrgang 1853. XI. Band. 2. Heft. S. 307. Haidinger: Die Austheilung der Oberflächenfarben am Murexid. — S. 375. Petrina: Ueber eine Vereinfachung beim telegraphischen Correspondiren in grosse Entfernungen. — S. 393. Haidinger: Die Farben des Mausits. — S. 397. Derselbe: Paläo-Krystalle, durch Pseudomorphose verändert.

Literarischer Bericht
LXXXVIII.

Arithmetik.

Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra, für Gymnasien und Gewerbeschulen bearbeitet von Friedrich Hofmann, Professor der Mathematik am Gymnasium zu Bayreuth. In drei Theilen. Erster Theil. Bayreuth. Grau. 1852. Zweiter und dritter Theil. Daselbst 1853.

Der erste, die arithmetischen Aufgaben enthaltende Theil dieser sehr reichhaltigen Aufgabensammlung ist im Literar. Bericht Nr. LXXVI. S. 953. angezeigt worden. Jetzt sind nun auch die beiden letzten Theile, welche die algebraischen Aufgaben enthalten, erschienen. Wir haben es uns schon a. a. O. angelegen sein lassen, auf die Verdienstlichkeit des ersten Theils dieser Aufgabensammlung aufmerksam zu machen und denselben den Lehrern der Mathematik dringend zur sorgfältigsten Beachtung zu empfehlen. Ein ganz gleich günstiges Urtheil müssen wir auch über den zweiten und dritten Theil fällen. Die grosse Reichhaltigkeit dieser beiden Theile zeigt sowohl ihr Umfang, da der zweite Theil 205, der dritte Theil 310 Seiten umfasst, als auch die folgende Angabe des Inhalts nach seinen Hauptabschnitten: Die vier Grundoperationen mit Buchstabengrössen. Potenzen mit positiven ganzen Exponenten. Wurzelgrössen. Reductionen (sehr viele lehrreiche Aufgaben). Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten. Aufgaben zur Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Wurzelgrössen (Fortsetzung). Potenzen mit allgemeinen Exponenten. Vermischte Reductionen. Logarithmen. Kettenbrüche. Unbestimmte Gleichungen. (Sollte wohl heissen **unbestimmte Aufgaben**.) Gleichungen vom ersten

Grade mit mehreren unbekannten Grössen. Gleichungen vom zweiten Grade. Aufgaben zur Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten Grössen. Aufgaben zur Anwendung der Gleichungen vom zweiten Grade. Arithmetische und geometrische Reihen. Zinseszinsen und Rentenrechnung.

Jedenfalls ist dies die reichhaltigste Aufgabensammlung, welche die mathematische Literatur bis jetzt besitzt, und auch bei diesen beiden letzten Theilen haben wir uns eben so wie bei dem ersten über die Präcision des Ausdrucks der Aufgaben gefreut, welche natürlich bei einer solchen Sammlung ein Haupterforderniss ist. Auch halten wir die Aufgaben fast sämmtlich für sehr zweckmässig, und sind der Meinung, dass ein nur einigermassen gut vorbereiteter Schüler sie sämmtlich ohne grosse Schwierigkeit zu lösen im Stande sein wird. Denn vom pädagogischen Standpunkte aus sind wir der Meinung, dass namentlich Aufgaben zur Anwendung der algebraischen Gleichungen so gefasst sein müssen, dass der Schüler, um demselben wahres Interesse an der Sache einzuflössen und seine Liebe zu derselben dauernd zu erhalten, den Wortausdruck der Aufgabe ohne besondere Schwierigkeit in die Sprache der Algebra übersetzen kann, und dass die Aufgaben auch nicht zu viele bloss numerische oder auch Buchstaben-Rechnungen in Anspruch nehmen, was bei manchen Aufgabensammlungen der Fall ist, selbst bei dem sonst recht empfehlenswerthen Buche von Heis, wie wir neuerlich uns zufällig hin und wieder bei dem Gebrauch dieses letzteren Buches zu überzeugen Gelegenheit gehabt haben. In beiden obigen Beziehungen steht das jedenfalls mit dem grössten pädagogischen und mathematischen Takte verfasste Buch von Meier Hirsch nach unserer Meinung immer noch oben an; aber das vorliegende Buch von Hofmann eifert demselben in würdiger Weise nach und übertrifft es an Reichhaltigkeit.

Wir wünschen daher dieser neuen arithmetischen und algebraischen Aufgabensammlung die sorgfältigste Beachtung von Seiten der Lehrer, können aber auch bei diesen beiden neuen Theilen den schon früher ausgesprochenen Wunsch nicht unterdrücken, dass es dem Herrn Verfasser recht bald gefallen möge, in einem besonderen Hefte die Resultate aller Aufgaben herauszugeben. Für den Lehrer sind dieselben unentbehrlich, da man ihm nicht zumuthen kann, alle Aufgaben, ehe er sie aufgiebt, erst selbst zu rechnen, und für den fleissigen und verständigen Schüler ist die Kenntniss der Resultate jedenfalls nützlich, damit er sieht, ob das von ihm gefundene Resultat das richtige ist; der unfleissige und unverständige Schüler wird sich doch verbotene Hülfs-

mittel anderweitig genug zu verschaffen wissen, wogegen, wie gegen absoluten Unverstand überhaupt, nun doch einmal nichts zu machen ist.

Geodäsie.

Handbuch der höheren und niederen Messkunde oder gründliche Unterweisung in der gewöhnlichen Feldmesskunst, so wie zu grösseren geodätischen Aufnahmen, zu geographischen Triangulirungen, barometrischen Höhenmessungen, zu Nivellements und zum Gebrauch der Instrumente. Nach dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft bearbeitet von Dr. Fr. W. Barfuss. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 15 lithographirten Foliotafeln. Weimar. Voigt. 1854. 8.

Die erste Auflage dieses Handbuchs der Messkunde ist im Literar. Ber. Nr. IX. S. 140. angezeigt worden. Die Anlage desselben ist im Ganzen und im Wesentlichen völlig unverändert geblieben, so dass wir auch jetzt das von uns a. a. O. gefällte allgemeine Urtheil, dass uns in demselben ein systematischer Faden, welcher sich durch das ganze Werk hindurch zieht, nicht festgehalten zu sein scheint, wiederholen müssen; und bei wiederholter genauer Durchsicht des Buchs haben wir uns von der Richtigkeit dieses Urtheils von Neuem überzeugt. Dagegen aber wiederholen wir aber auch das, was wir a. a. O. zur Empfehlung des Buchs gesagt haben, und fügen zu weiterer Empfehlung noch bei, dass der Herr Verfasser wenigstens auf einige der von uns dort gerügten Mängel Rücksicht genommen zu haben scheint, indem er z. B. jetzt eine ziemlich ausführliche Entwickelung der Methode der kleinsten Quadrate beigefügt hat, bei der wir nur noch ein specielleres Eingehen auf die Anwendung dieser Methode in der Geodäsie, was doch hier die Hauptsache ist, gewünscht hätten. Eine sehr werthvolle Bereicherung hat ferner diese neue Ausgabe in der Theorie und Beschreibung des ursprünglich von Oppikofer angegebenen, von Wetli wesentlich verbesserten (m. s. Literar. Ber. Nr. LVI. S. 774.) und von Hansen zur Vollendung gebrachten Planimeters erhalten. Was die Darstellung im Allgemeinen betrifft, so können wir nicht sagen, dass sie uns besonders angesprochen hätte, indem sie offenbar in einem älteren Geiste gehalten ist und vielfach an Tobias Mayer erinnert. In der Instrumental-Kenntniss ist diese neue Ausgabe gegen die erste

im Jahre 1842 erschienene fast gar nicht fortgeschritten, und es sind zum Theil noch verschiedene, gegenwärtig als veraltet zu betrachtende Instrumente beschrieben. Was z. B. die Boussole betrifft, so ist ein Instrument dieser Art mit Fernröhren — und wer braucht jetzt wohl andere? — gar nicht beschrieben, und das von dem Herrn Verfasser auf S. 273. gefällte ungünstige Urtheil über dergleichen Instrumente beruht geradezu auf Unkenntniss der Sache, indem wir selbst ihm mehrere Fernrohr-Boussolen vorlegen könnten, die an Leichtigkeit des Transports und der Handhabung gewiss gar nichts zu wünschen übrig lassen. Auf die neueren Verbesserungen der Messkette (m. s. z. B. in Schneitler's Instrumente und Werkzeuge. Zweite Auflage. Leipzig 1852. S. 7. die Messkette von Oldendorff, und im Archiv. Thl. IV. S. 68. die Messkette von Berlin, sowie über diese Messkette auch Schneitler a. a. O.) ist in höchst auffallender Weise gar keine Rücksicht genommen, da diese Verbesserungen eines bei den allergewöhnlichsten Operationen der Feldmesskunst unausgesetzt in Anwendung kommenden und deshalb in jeder Beziehung höchst wichtigen Instruments gewiss von der grössten Bedeutung sind; und sollte etwa der Herr Verfasser diese Verbesserungen der Genauigkeit der Messungen für nicht eben förderlich halten, so müssten wir gestehen, dass dies uns keinen sonderlichen Begriff von der Genauigkeit, die der Herr Verfasser bei seinen Messungen zu erreichen strebt, beibringen würde. Eben so auffallend ist es uns gewesen, dass statt des, oder wenigstens neben dem älteren Theodoliten nicht auch der Theodolit mit gebrochenem Fernrohr beschrieben worden ist, da diese neueren Instrumente in jeder Beziehung die wesentlichsten Vortheile gewähren und daher jetzt fast allgemein gebraucht, auch in mehreren der grösseren und besseren mechanischen Werkstätten fast nur allein angefertigt werden, in welcher Beziehung der Herr Verfasser sich nur etwa die Cataloge des polytechnischen Instituts in Wien (m. vergl. z. B. auch das in jeder Beziehung treffliche und ausgezeichnete Handbuch der niederen Geodäsie von Hartner. Wien. 1850.) hätte ansehen sollen. Das Heliotrop ist nur nach der ursprünglichen Einrichtung von Gauss beschrieben, und auf die neueren vereinfachten Einrichtungen dieses Instruments von Steinheil, Stierlin und Anderen ist gar keine Rücksicht genommen, was wenigstens bei einem Handbuche der höheren Geodäsie nicht gebilligt werden kann. Noch mehr einzelne Beispiele dieser Art anzuführen, fehlt uns der Raum; auch wird das Bisherige schon hinreichen, den Nachweis zu führen, dass man aus dem vorliegenden Buche keine dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechende Instrumentalkenntniss schöpfen kann. Eben so wenig hat der Herr Ver-

fasser auf die neueren Fortschritte der Geodäsie in theoretischer Beziehung besondere Rücksicht genommen. Wenn wir auch fast fürchten müssen, der Eigenliebe beschuldigt zu werden, wollen wir doch bemerken, dass in den bis jetzt erschienenen 21 Bänden des „Archivs" eine Menge der Geodäsie gewidmeter Aufsätze von sehr verschiedenen Verfassern enthalten sind, die von neueren Schriftstellern über Geodäsie keineswegs so gänzlich unberücksichtigt gelassen worden sind, wie der Herr Verfasser des vorliegenden Buchs gethan hat, und daher doch wohl etwas zur Förderung der betreffenden Wissenschaft beigetragen haben müssen, wie, um nur Einiges zu bemerken, z. B. die Aufsätze über die Fehler der mit verschiedenen Instrumenten gemessenen Horizontalwinkel; über die Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung (die S. 423. in der Note vom Herrn Verfasser gegebene Darstellung ist wenigstens höchst schwerfällig und berührt keineswegs die Punkte, auf die es hier vorzüglich ankommt); über das trigonometrische Höhenmessen mit ganz besonderer Berücksichtigung der Strahlenbrechung; über die vielen neuen Methoden zur graphischen Auflösung des Pothenot'schen Problems; über die elegante Methode zur genauen Aufstellung des Messtisches, oder vielmehr eines gegebenen Punktes auf demselben, über einem gegebenen Punkte auf der Erde, welche alle die künstlichen Einrichtungen des Messtischblattes, die der Herr Verfasser Seite 144. bei seinem nicht sehr zu empfehlenden Messtische beschreibt, durch welche die so überaus wichtige Festigkeit und Unverrückbarkeit des Instruments, auf welche bei dem genauen Arbeiten mit diesem Instrumente so ungemein viel ankommt, nur beeinträchtigt werden muss, völlig überflüssig und ganz und gar unnütz macht, u. s. w. u. s. w.

Unser Gesammturtheil über das vorliegende, in „dritter verbesserter und vermehrter Auflage" erschienene, „nach dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft bearbeitete" Handbuch der höheren und niederen Geodäsie geht daher dahin, dass dasselbe den neueren Zustand dieser wichtigen Wissenschaft darzustellen nicht geeignet ist, wenn wir auch sonst seine Brauchbarkeit für untergeordnetere Arbeiten nicht verkennen wollen.

Handbuch der niederen Geodäsie nebst einem Anhange über die Elemente der Markscheidekunst. Zum Gebrauche für technische Lehranstalten, so wie für das Selbststudium bearbeitet von Friedrich Hartner, Professor der höheren Mathematik und praktischen Geometrie am steierm. ständ. Joanneum zu Gratz. Wien. Seidel. 1850. 8.

Die erste Lieferung dieses Handbuchs der niederen Geodäsie

ist schon im Literar. Ber. Nr. LVIII. S. 287. kurz angezeigt worden. Nachdem jetzt alle vier Lieferungen erschienen sind, erfordert die Auszeichnung, welche das Buch seiner inneren Tüchtigkeit und seiner Brauchbarkeit wegen für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist, eine vollständigere Anzeige. Schon a. a. O. haben wir darauf hingewiesen, dass uns sowohl die grosse Deutlichkeit der Darstellung im Allgemeinen, als auch insbesondere der sehr sorgfältig von dem Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortschreitende Gang in der Beschreibung und Beurtheilung der Instrumente, wobei auch die nothwendigsten optischen Hülfslehren nicht übergangen worden sind, angesprochen habe. Jenes Urtheil wiederholen wir jetzt nach dem Erscheinen des vollständigen Werkes aus vollster Ueberzeugung und fügen demselben noch Folgendes hinzu. Was zuerst die Instrumente betrifft, so bemerken wir, dass sowohl die Instrumente zum Zeichnen auf dem Papier als auch die Instrumente zum Messen auf dem Felde sehr sorgfältig beschrieben und in schönen Holzschnitten dargestellt worden sind. Der Herr Verfasser hat sich aber nicht bloss mit der Abbildung der ganzen zusammengestellten Instrumente begnügt, sondern hat auch alle wichtigeren einzelnen Theile derselben in grösserem Maassstabe besonders abgebildet und natürlich auch äusserst deutlich beschrieben, was dieses Buch vor vielen anderen Lehrbüchern der Geodäsie höchst vortheilhaft auszeichnet, und den Lehrling in den Stand setzt, sich von der Einrichtung der Instrumente in allen ihren einzelnen Theilen eine höchst deutliche Anschauung zu verschaffen. Bei der Beschreibung der Instrumente hat der Herr Verfasser ferner auf die neueren Fortschritte sehr sorgfältig Rücksicht genommen, und daher z. B. auch den verbesserten Einrichtungen der Messkette, dem Theodoliten mit gebrochenem Fernrohr, den verschiedenen Arten der Distanzmesser, den neueren vortrefflichen Nivellir-Instrumenten aus der Werkstätte des polytechnischen Instituts in Wien, den verschiedenen Arten der Markscheider-Instrumente, u. s. w., besondere Aufmerksamkeit gewidmet, so dass wir nicht wüssten, was der Lehrling in dieser Beziehung noch wünschen sollte. Eben so sorgfältig sind die Instrumente nach ihren Fehlern, mit deren mathematischer Bestimmung, charakterisirt worden, und überall hat der Herr Verfasser die am leichtesten praktisch ausführbaren und zugleich genauesten Methoden zur Berichtigung der Instrumenten gelehrt. Was ferner die Messungsmethoden betrifft, so sind alle Methoden gelehrt worden, welche in die niedere Geodäsie, der ja auch das Buch nur gewidmet sein soll, gehören. Bei den Höhenmessungen hat das geometrische, trigonometrische (natürlich mit Rücksicht auf die Krümmung der Erde und die Refraction S. 231. 232.), das baro-

metrische und thermometrische Höhenmessen, so weit diese Operationen in den Kreis der niederen Geodäsie gehören, Berücksichtigung gefunden, so wie auch die zu forstlichen Baumhöhenmessungen u. s. w. erforderlichen und jetzt gebräuchlichen Instrumente, die, so wie ein einfaches, zu Höhenmessungen brauchbares Gefässbarometer gleichfalls abgebildet worden sind. Endlich hat der Herr Verfasser auch der Coordinatenmethode bei der Berechnung der Messungen seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet, und über die Methode der kleinsten Quadrate so viel beigebracht, als die niedere Geodäsie irgend zu fordern berechtigt ist.

Wir schliessen diese Anzeige mit der Bemerkung, dass wir gegenwärtig in der That kein Handbuch der niederen Geodäsie und Markscheidekunst wüssten, welches wir einem Anfänger in der Geodäsie mit grösserer Zuversicht als das vorliegende empfehlen könnten. Wir wünschen dem Buche die grösste Verbreitung und sind der Meinung, dass es zu einer besseren und gründlicheren Bildung der Feldmesser, als dieselbe wohl jetzt hin und wieder angetroffen wird, wesentlich beitragen wird. Möge es uns der Herr Verfasser nicht übel nehmen, wenn wir schliesslich uns den Wunsch auszusprechen erlauben, dass wir in einer neuen Auflage, die recht bald anzeigen zu können wir mit Zuversicht hoffen, wohl ein Urtheil eines so sachkundigen und praktisch geübten Geodäten, wie der Herr Verfasser ist, über die im Archiv. Thl. XVI. gelehrte Methode zur genauen Aufstellung des Messtisches, oder eigentlich eines bestimmten Punktes auf demselben, über einem auf der Erde gegebenen Punkte, welche nach unserer Meinung alle künstlichen, die Festigkeit des Messtisches nur beeinträchtigenden Einrichtungen zur Bewerkstelligung dieser Aufstellung völlig entbehrlich macht, lesen möchten.

Vermischte Schriften.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. Nr. 231—309. (Vergl. Literar. Ber. Nr. LXXII. S. 923.)

Wir bedauern, mit den Auszügen aus diesen, der allgemeinen Beachtung in jeder Beziehung höchst werthen Mittheilungen so lange in Rückstand geblieben zu sein, was wir nur durch den Mangel an Raum entschuldigen können. Wir beeilen uns jetzt, das Versäumte nachzuholen.

C. Fischer-Ooster, Beschreibung eines neuen einfachen Bathometers, mit einer Abbildung. Nr. 233—235.

R. Wolf, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Christian Wursteisen von Basel. Nr. 237 und 238.

C. Brunner, Ueber Trennung von Kupfer und Zink bei Analysen. Nr. 237 und 238.

R. Wolf, Beitrag zur Lehre von der Wahrscheinlichkeit. Nr. 239 u. 240.

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 241 u. 243.

C. Fischer-Ooster, Beschreib. eines neuen Hypsometers. Nr. 243 u. 244.

Derselbe, Beiträge zur Höhenkenntniss des Cantons Bern, enthaltend die Bestimm. einiger zweifelhaften Punkte mittelst des Barometers. Nr. 243 u. 244.

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 245 u. 247.

Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Simon Lhuilier. (Zweiter Artikel.) Nr. 245 und 247.

C. Brunner, Ueber die Bestimmung von Gasgemengen. Nr. 252 bis 254.

Derselbe, Chemische Beobachtungen. Nr. 252 bis 254.

R. Wolf, Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung. Nr. 255 bis 257. (Sehr interessante u. wichtige Abhandlung.)

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. (Ueber Sternschnuppen.) Nr. 262 bis 264.

Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. (Sonnenfinsterniss von 1706. Vertheilung der Gewitter in Zürich 1683—1718.) Nr. 262 bis 264.

Derselbe, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Sechste Versuchsreihe. Nr. 268 und 269.

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 268 und 269.

M. Hipp, Ueber Translatoren. Nr. 279 und 280.

R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 279 und 280.

Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Jahr-Rodel von Haus und Abraham Wieniger, Schulmeistern zu Bedderkinden. 1716—1770. Nr. 281 bis 283.

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 281 bis 283.

F. May, Ueber die Ausstreuung der Sterne am Himmel oder das Milchstrassensystem als Ganzes. Nr. 284 und 285. (Interessanter Aufsatz.)

R. Wolf, Ueber den jährlichen Gang der magnetischen Declinations-Variation. Nr. 292 bis 293.

Derselbe, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 292 bis 293. Nr. 294 und 295.

C. Brunner, Chemische Mittheilungen über die Analyse der atmosphärischen Luft und mehreres Andere. Nr. 296 bis 298.

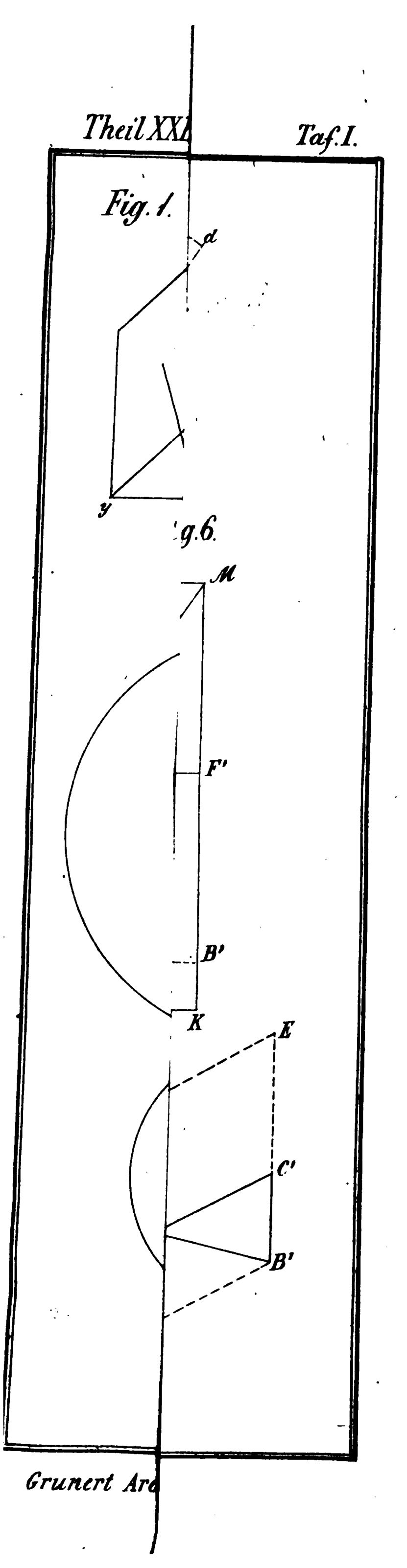
R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 296 bis 298.

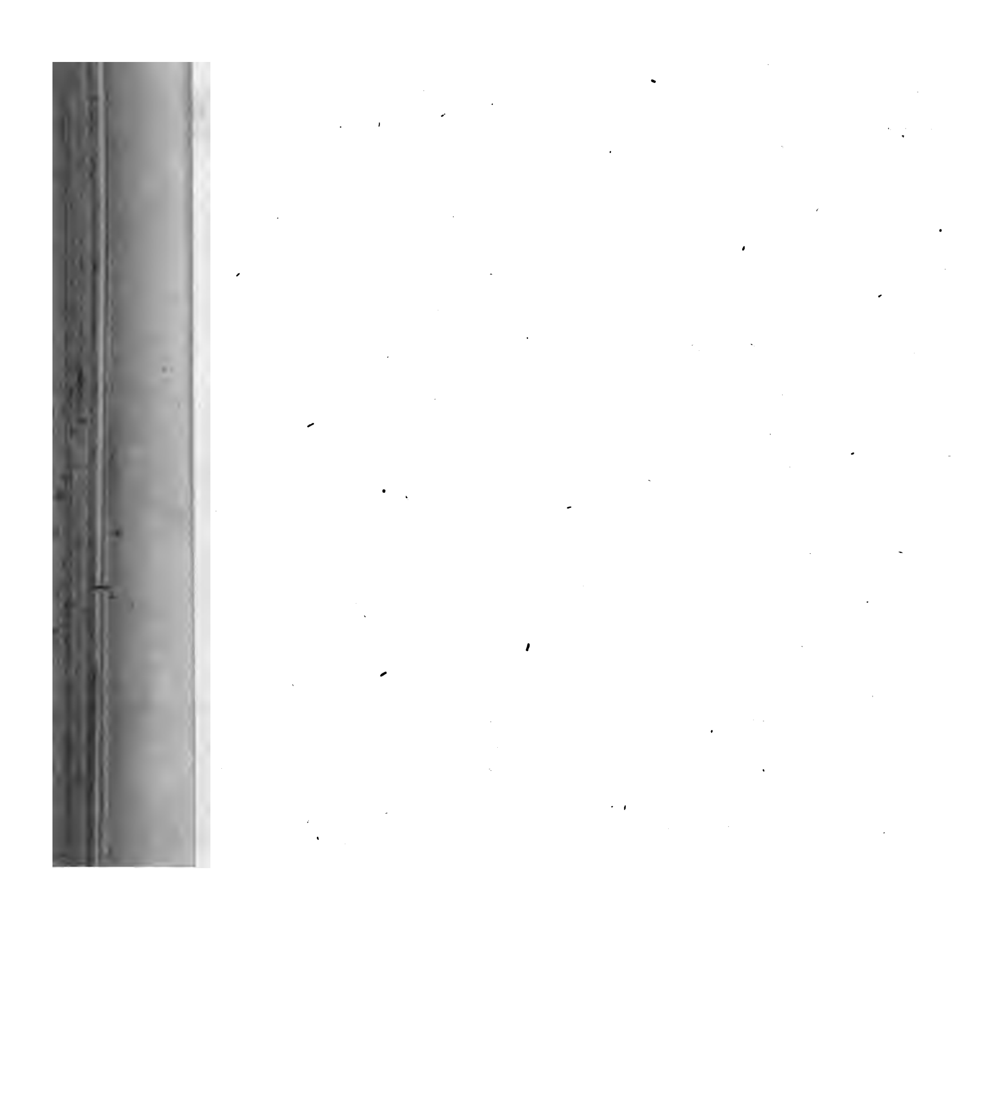
Brunner von Wattenwyl, Ueber das Taschen-Barometer. Nr. 299. Das Endurtheil des sehr sachkundigen und vielerfahrenen Herrn Verf. über dieses Instrument und andere in neuerer Zeit zu ähnlichem Zweck in Vorschlag gebrachte Barometer, namentlich auch über das von Leuten, die nichts Rechtes von der Sache verstehen, viel gerühmte Baromètre anéroide, fällt keineswegs günstig für diese Instrumente aus, und geht dahin, dass durch keins derselben ein gutes Reisebarometer ersetzt werden könne, namentlich bei den äusserst bequemen Einrichtungen, die man jetzt den letzteren Instrumenten zu geben im Stande sei. Der Aufsatz selbst ist sehr lesenswerth.

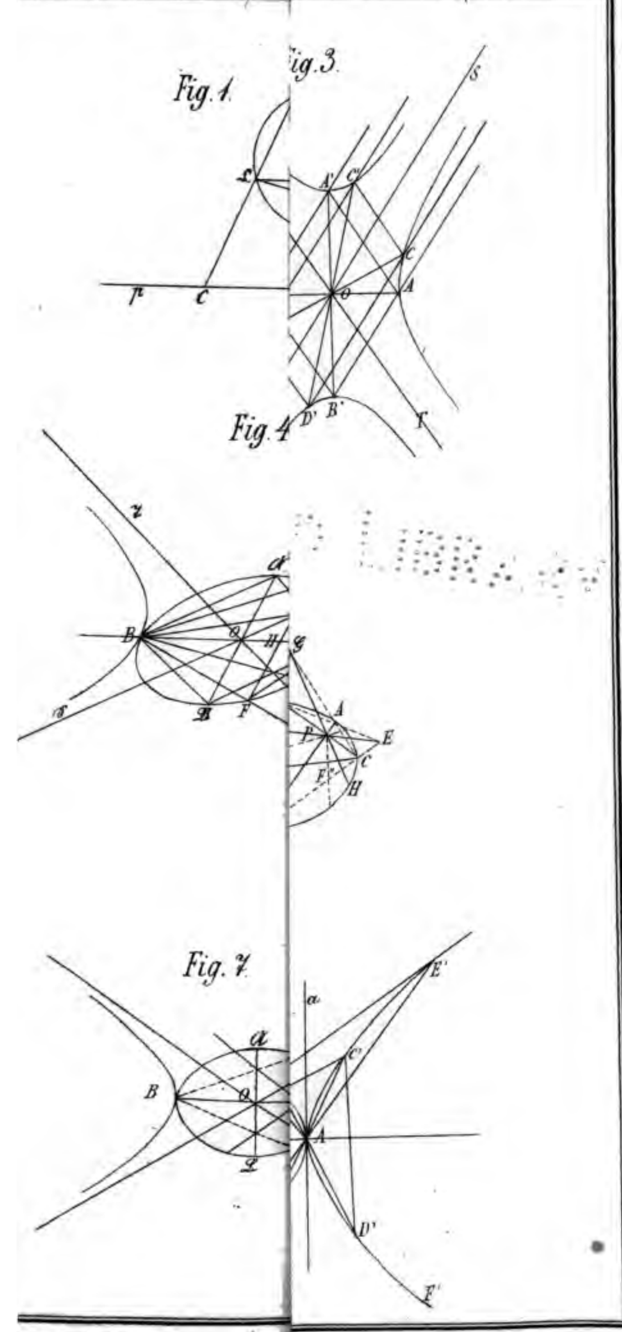
R. Wolf, Nachrichten von der Sternwarte in Bern. Nr. 300 und 301.

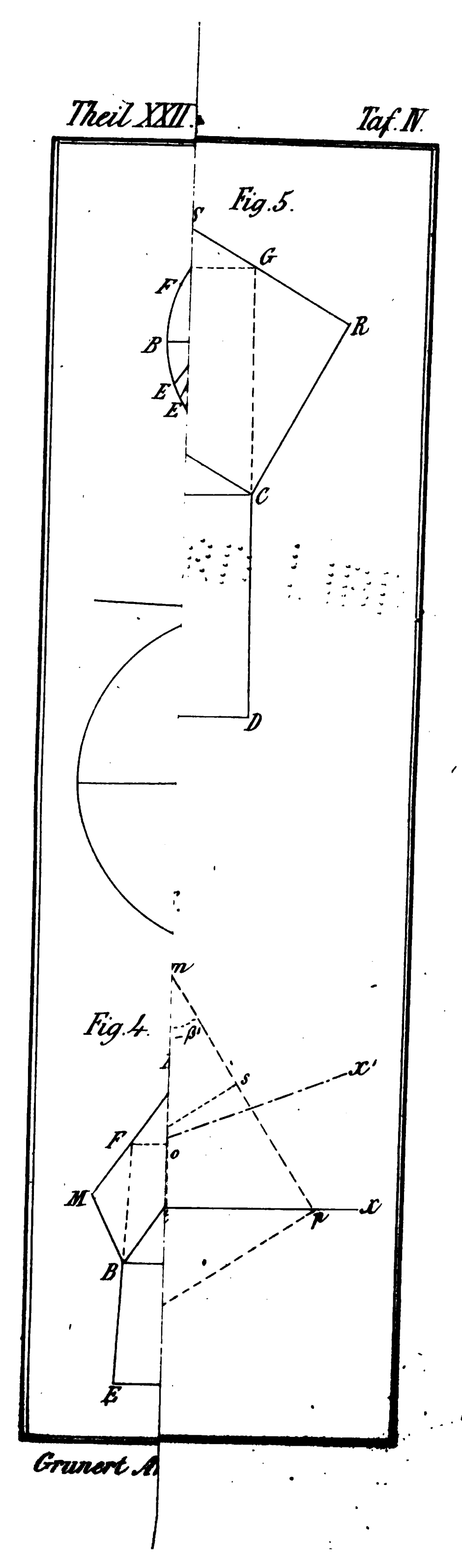
Derselbe, Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Johann Baptist Cysat. Nr. 308 und 309. Die Lebensbeschreibung dieses bis jetzt wenig bekannten schweizerischen Mathematikers und Astronomen hat Herr R. Wolf auch in einem besonderen Abdruck unter dem Titel: Johann Baptist Cysat von Luzern. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz. Von Rudolf Wolf. Bern 1853. 8. herausgegeben. Cysat war 1586 in Luzern geboren und starb daselbst am 3. März 1657. Die Lebensbeschreibung ist in vieler Beziehung interessant. Es geht aus derselben u. A. hervor, dass Cysat schon in einer 1619 erschienenen Schrift dem Saturn zwei Monde beilegt, während sonst allgemein angenommen wird, erst Huygens habe im März 1655 einen ersten Saturnsmond und Dominic Cassini 1671 einen zweiten entdeckt. Ferner hat Herr R. Wolf gezeigt, dass Cysat schon den grossen Nebel im Orion, der Galilei und Hevel entging, bereits kannte, dass also fälschlich erzählt wird, er sei erst 1656 von Heygens entdeckt worden. Demnach wird künftig als Entdecker des grossen Nebels im Orion Cysat zu nennen sein.

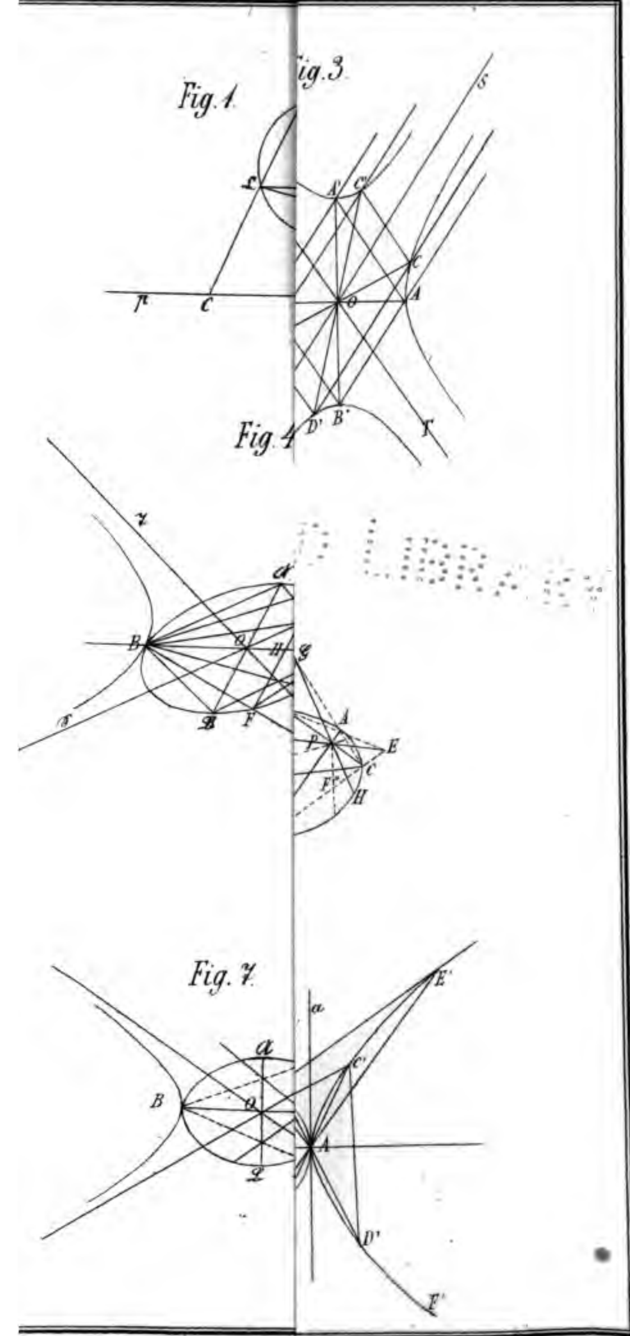
In den hier besprochenen Nummern der Mittheilungen finden sich wie in den früheren auch wieder eine grosse Menge interessanter Mittheilungen aus Briefen schweizerischer Mathematiker und Naturforscher, die man sämmtlich Herrn R. Wolf verdankt und die jedenfalls für die Geschichte der Mathematik und Physik vielfach wichtig sind.


Fig. 1.
d
y
g. 6.
M
F'
B'
K
E
C'
B'

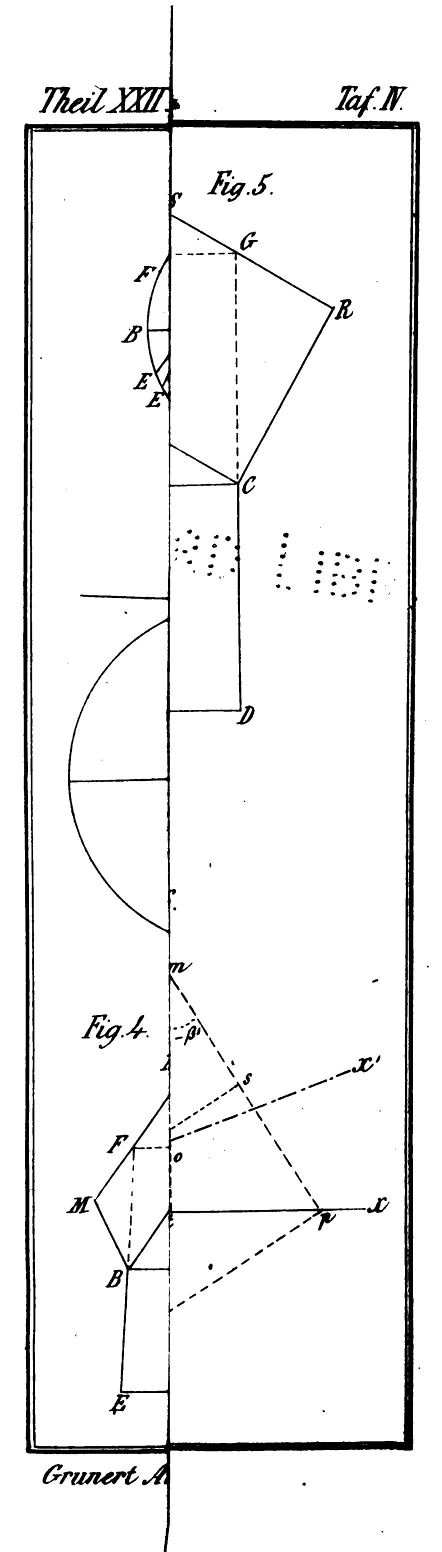



Fig. 1.
ig. 3.
Fig. 4
Fig. 7.


Fig. 5.
S
G
F
R
B
E
E
C
D
m
Fig. 4.
β'
s
x'
F
o
M
p
x
B
E


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 7.




Fig. 5.
s
G
F
R
B
E
E
C
D
m
Fig. 4.
β
s
x'
F
o
M
x
p
B
E

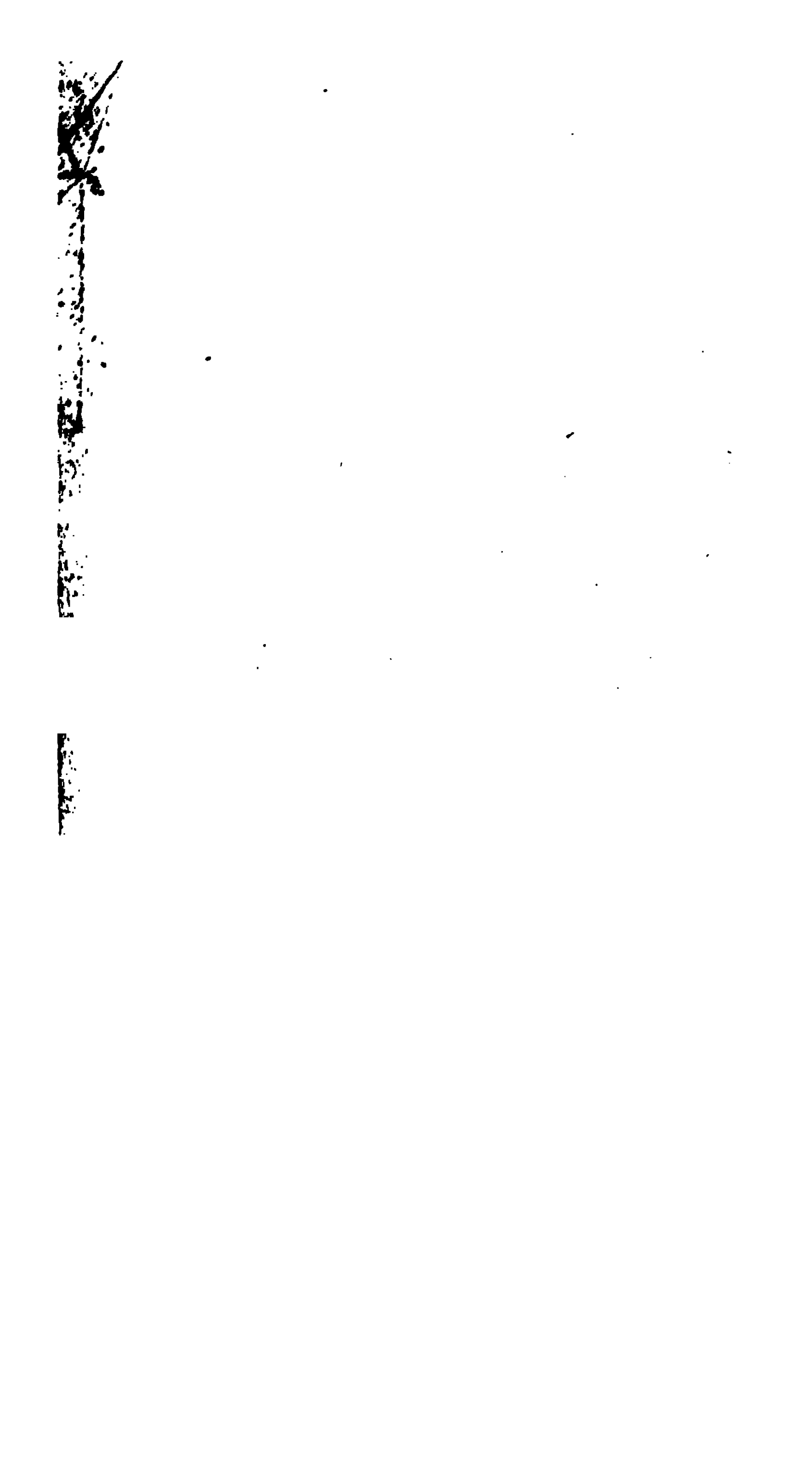


Fig. 6.

B

β

D

Fig.

A

c

F

C

Fig. 5.

D

E

B

Fig. 8.

D

o

C

A



